



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-8762-TDI/802

**OTIMIZAÇÃO DO PESO DE UMA GRANDE ESTRUTURA
ESPACIAL EM ÓRBITA BAIXA DA TERRA COM RESTRIÇÃO
NA FREQUÊNCIA FUNDAMENTAL DE VIBRAÇÃO**

José Antonio Figueiredo de Sousa

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais, orientada pelos Drs. Ijar Milagre da Fonseca e Mário César Ricci, aprovada em 24 de outubro de 2001.

INPE
São José dos Campos
2002

681.5.015.23

SOUZA, J. A. F.

Otimização do peso de uma grande estrutura espacial em órbita baixa da terra com restrição na frequência fundamental de vibração / J. A. F. Souza – São José dos Campos: INPE, 2001.

148p. – (INPE-8762-TDI/802).

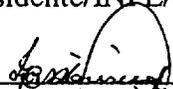
1.Otimização. 2.Auto vetores. 3.Auto valores.
4.Frequências naturais. 5.Frequências vibracionais
(estruturais). I.Título.

Aprovado pela Banca Examinadora em
cumprimento a requisito exigido para a
obtenção do Título de Mestre em
**Engenharia e Tecnologia
Espaciais/Mecânica Espacial e
Controle.**

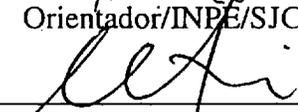
Dr. Antonio F. Bertachini de A Prado


Presidente/INPE/SJCampos-SP

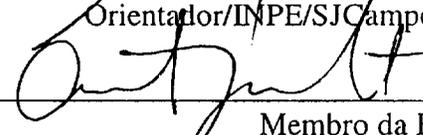
Dr. Ijar Milagre da Fonseca


Orientador/INPE/SJCampos-SP

Dr. Mário César Ricci


Orientador/INPE/SJCampos-SP

Dr. Antonio Geloneze Neto


Membro da Banca
Convidado Fac. Senai Tecnol. Mecatrônica
São Caetano do Sul - SP

Candidato: José Antonio Figueiredo de Sousa

São José dos Campos, 24 de outubro de 2001.

“O homem é mortal por seus temores e imortal por seus desejos”
Pitágoras

“Sensation is concrete perception of objects and people by means of our five senses. It provides the basic framework for our lives and its unalloyed state renders us the experience of what we commonly regard as reality in its most direct and simple form. Our senses tell us what is.”
Edwad Whitmont, in The Symbolic Quest

“When the ten thousand things are viewed in their oneness, we return to the origin and remain where we have always been.”
Sen T’sen

“I was born not knowing and have only had a little time to change that here and there.”
Richard Feynman.

À minha mãe, que sempre torceu por seus filhos, mas não pode compartilhar
da minha alegria por esta conquista.
À Cleide, esposa maravilhosa, compreensiva e companheira,
Dedico.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) que possibilitou a realização deste trabalho, na Divisão de Mecânica Espacial e Controle.

Ao Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial – Departamento Regional de São Paulo (SENAI-DR SP), pelo apoio concedido para a concretização deste trabalho. Ao Professor Fábio Luiz Marinho Aidar, na época Diretor Regional do SENAI – DR SP e ao Professor Milton Gava, na época Diretor de Educação do SENAI - DR SP, pelo deferimento a minha solicitação e pela concessão da autorização. Ao Professor Nivaldo Silva Braz, Diretor da Escola SENAI “Humberto Reis Costa”, pelo apoio, pelo incentivo, pelo encaminhamento da minha solicitação. Ao Professor João Ricardo Santa Rosa, enquanto Diretor da Escola SENAI “Armando de Arruda Pereira” e atual Gerente Regional do SENAI – DR SP, pelo convite para retornar à Escola e pela oportunidade de continuar o programa de Mestrado. Ao Professor Marcos Cardozo Pereira, Diretor da Escola SENAI “Armando de Arruda Pereira”, pelo incentivo e pelo apoio dado para a conclusão deste trabalho. Aos Instrutores, Professores, Técnicos de Ensino, Coordenadores, Equipes Escolares, Grupos Gestores, enfim, aos colegas e amigos do SENAI que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho de Dissertação de Mestrado.

Aos membros da Banca Examinadora pelas importantes: observações, orientações e sugestões nas apresentações preliminar e final desta Dissertação.

A minha família que sempre me apoiou e compreendeu, nunca deixando que eu desistisse diante às dificuldades enfrentadas.

A minha esposa Cleide, companheira e amiga, que sempre me apoiou; pelo incentivo, pelo acompanhamento, pela compreensão e pela conspiração para que este trabalho fosse concretizado.

Aos Professores, Dr. Ijar Milagre da Fonseca e Dr. Mário César Ricci, pela orientação, pela paciência, pelo incentivo, pela dedicação e pela oportunidade de fazer o curso de mestrado.

Ao Professor Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza, pelo incentivo, pelas palavras de orientação e esclarecimento, pelos “puxões de orelha”, e principalmente pelo profissionalismo na transmissão dos conhecimentos.

Às Bibliotecárias da biblioteca do INPE, pelo apoio e pela compreensão, pela atenção e objetividade no atendimento às nossas solicitações, pela incansável ajuda na pesquisa e na localização de material necessário para a pesquisa, e finalmente pelo profissionalismo no desenvolvimento do seu trabalho.

RESUMO

O crescente desenvolvimento das pesquisas espaciais, em particular a construção da Estação Espacial Internacional, que pode ser descrita como uma grande estrutura e que devido a sua aplicação espacial deve ter um peso/massa estrutural reduzido, é o grande motivador deste trabalho. Este assunto pertence ao contexto da otimização estrutural. O trabalho apresenta um modelamento matemático obtido pelo uso do método de elementos finitos e pelo uso da abordagem Lagrangiana considerando as características de corpo rígido e a respectiva flexibilidade da estrutura, que é otimizada visando a obtenção do peso/massa estrutural mínimo, respeitando a restrição de vínculo na sua frequência fundamental de vibração e a restrição lateral de área da seção transversal. O método utilizado para a otimização é o denominado Método Seqüencial, que consiste em transformar um problema de otimização com restrições/vínculos em uma série de problemas de otimização sem restrições/vínculos, sendo que é atribuída uma penalidade para evitar a violação da restrição. É obtida uma estrutura otimizada cuja seção transversal é variável, uma seção é obtida para cada elemento considerado, porém a simetria da estrutura é respeitada. A metodologia adotada para o modelamento matemático da estrutura, bem como o procedimento de otimização, permite que os conceitos apresentados possam ser utilizados para aplicações baseadas em Terra; em particular para aplicações em sistemas mecatrônicos, onde grandes velocidades e grande precisão de posicionamento são necessários. Os resultados obtidos mostram uma efetiva redução no peso/massa estrutural e a metodologia pode, também, ser estendida para um processo de otimização integrada entre estrutura e controle.

STRUCTURAL OPTIMIZATION OF A LARGE SPACE STRUCTURE IN EARTH LOW ORBIT WITH NATURAL FREQUENCY CONSTRAINT

ABSTRACT

The great space research development, specially in the International Space Station (ISS) project, that can be seen as a Large Space Structure (LSS) that ought to have the minimum weight design, is the main motivation for this present research. This subject belong to the structural optimization context. In this research the mathematical model was obtained by the application of the Finite Element Method with the Lagrangian approach and keeping in both the rigid and the flexibility structural properties. The model was optimized, to get the minimum weight with natural frequency and side bound constraints on the design variables (it means, the cross-sectional area).The optimization method used is called Sequential Method. This method compute a constrained optimization problem as a set of sequential unconstrained optimization problems, and provide some penalty to limit constraint violation. The optimized structure obtained, has variable cross-sectional areas, by each elements, but the structural symmetry is maintained. Mathematical modeling methodology, as well as the optimization procedure, can be used for Earth based structures; in particularly for mechatronic applications where high velocities and accuracy of position are required. Reduction of structural weight was obtained and this methodology can be also extended to an Integrated Structural/Control Optimization process.

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	19
1.1 - OTIMIZAÇÃO - APLICAÇÕES.....	19
1.2 - OBJETIVO.....	25
CAPÍTULO 2 – REVISÃO DA LITERATURA	27
2.1 - INTRODUÇÃO.....	27
2.2 - MOTIVAÇÃO.....	36
CAPÍTULO 3 – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	39
3.1 – O PROBLEMA DO AUTOVALOR.....	39
3.2 - PROBLEMA DA SENSIBILIDADE (“SENSITIVITY”).....	48
CAPÍTULO 4 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	51
4.1 - MODELAMENTO MATEMÁTICO.....	51
4.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO.....	99
CAPÍTULO 5 – PROCEDIMENTO DE OTIMIZAÇÃO	101
5.1 – PROCEDIMENTO SEQÜENCIAL DE OTIMIZAÇÃO.....	101
5.1.1 – MÉTODO DAS PENALIDADES.....	105
5.1.1.1 - MÉTODO DA FUNÇÃO DE PENALIDADE EXTERIOR.....	106
5.1.1.2 - MÉTODO DA FUNÇÃO DE PENALIDADE INTERIOR.....	109
5.1.1.3 - MÉTODO DA FUNÇÃO ESTENDIDA DE PENALIDADE INTERIOR.....	112
5.1.2 – MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA.....	117
5.1.3 – PACOTE NEWSUMT-A.....	121

CAPÍTULO 6 – CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS	125
6.1 – CONCLUSÕES E RESULTADOS OBTIDOS.....	125
6.2 – PERSPECTIVAS FUTURAS.....	138
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 - Ciclo típico de um produto.....	23
4.1.1 – Concepção da estrutura e sua órbita.....	51
4.1.2 – Sistemas de coordenadas.....	52
4.1.3 – Deslocamentos nodais no j-ésimo elemento da estrutura.....	52
4.1.4 – Diagrama de corpo livre de uma barra.....	55
4.1.5 – Sistema de coordenadas – elemento de massa.....	57
4.1.6 – Modelo para determinação da energia potencial.....	81
4.1.7 – Elemento de viga, sujeito à vibração por flexão.....	85
4.1.8 – Forças e momentos atuando num elemento de viga.....	86
4.1.9 – Funções de forma - “cúbicas Hermite”.....	92
5.1.1 – Representação da região viável.....	103
5.1.1.1.1 – Algoritmo para o método da função de penalidade exterior.....	107
5.1.1.1.2 – Função de penalidade exterior.....	108
5.1.1.2.1 - Função de penalidade interior.....	110
5.1.1.2.2 – Algoritmo do método da função de penalidade interior.....	111
5.1.1.3.1 – Algoritmo para o método da penalidade interior estendida.....	114
5.1.1.3.2 – Função de penalidade interior estendida.....	115
5.1.1.3.3 - Comparação qualitativa entre as funções de penalidade.....	116
5.1.2.1 – Método da seção áurea.....	118
5.1.3.1 – Diagrama de fluxo de dados do programa de otimização.....	122
5.1.3.2 – Organização do programa utilizado.....	123
5.1.3.3 – Fluxo de dados de otimização.....	123
6.1.1 – Estrutura na configuração inicial – sem otimização	128
6.1.2 – Resultado da estrutura otimizada com vinte elementos.....	128
6.1.3 – Resultado da estrutura otimizada com quatro elementos.....	130
6.1.4 – Resultado da estrutura otimizada com oito elementos.....	131
6.1.5 – Resultado da estrutura otimizada com dez elementos.....	131

6.1.6 – Resultado da estrutura otimizada com doze elementos.....	132
6.1.7 – Resultado da estrutura otimizada com dezesseis elementos.....	132
6.1.8 – Resultado da estrutura otimizada com dezoito elementos.....	133
6.1.9 – Variação das seções com relação ao comprimento da estrutura.....	134
6.1.10 – Gráfico da variação de massa da estrutura.....	135
6.1.11 – Tempo de processamento.....	137

LISTA DE SÍMBOLOS

- c_j – é um coeficiente (pode ser complexo) que representa as constantes de integração que dependem das condições iniciais impostas, no tratamento dos autovalores
- G – constante gravitacional da Terra, $6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$
- I_z – momento de inércia da estrutura, com relação ao eixo Z, relativo à Figura 4.1.6
- l – comprimento do elemento finito da estrutura
- m_T – massa da Terra, $5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
- NE – numero de elementos finitos
- oxy – sistema de coordenadas fixo ao corpo, sendo que a origem deste sistema coincide com o centro de massa (CM) da estrutura modelada
- OXY – sistema de coordenadas orbital, sendo que a origem deste sistema coincide com o centro de massa da viga, ou estrutura modelada
- $o_jx_jy_j$ – sistema de coordenadas fixo ao corpo no j-ésimo elemento da estrutura modelada
- s – é uma constante escalar, para o problema do autovalor
- R_0 – distância entre o centro da Terra e o centro de massa da estrutura, então, R_0 é o raio médio da Terra + altura da órbita, $7176 \times 10^3 \text{ m}$
- R_1 – distância entre o centro da Terra (centro da força gravitacional) e o elemento dm_s (elemento da estrutura) considerado, temos que:
- $$R_1 = \left| \vec{R}_0 + \vec{r} \right| \text{ com relação à Figura 4.1.6}$$
- T_j – energia cinética do j-ésimo elemento da estrutura
- u_{j1} e u_{j2} – são os deslocamentos transversais no j-ésimo elemento da estrutura modelada
- V – é a energia potencial da estrutura
- V_e – é a energia potencial devido à elasticidade da estrutura
- V_{ej} – energia potencial do j-ésimo elemento da estrutura, devido à elasticidade da estrutura

- V_g – é a energia potencial devido à ação do gradiente de gravidade
- V_{gj} – energia potencial do j-ésimo elemento da estrutura, devido à ação da gravidade
- V_j – é a energia potencial do j-ésimo elemento da estrutura
- x – é um vetor constante, $(nx1)$ no problema do autovalor
- x_j – distância da origem do sistema de coordenadas ao elemento, dm , de massa considerado
- [A] – matriz dinâmica do sistema, (nxn)
- [C] – matriz de amortecimento da estrutura, é uma matriz simétrica – (nxn)
- [I] – matriz identidade, (nxn)
- [K] – matriz de rigidez da estrutura, matriz simétrica – (nxn)
- [M] – matriz de massa da estrutura, é uma matriz simétrica – (nxn)
- {q} – vetor de coordenadas generalizadas da estrutura
- {r} – vetor posição genérico do elemento de massa dm da estrutura
- {x} – vetor de estados, para o problema do autovalor $(nx1)$
-
- λ – é uma constante escalar
- θ – ângulo de atitude da estrutura, é o ângulo de rotação entre os sistemas de coordenadas OXY e oxy
- θ_{j1} e θ_{j2} – são os deslocamentos angulares no j-ésimo elemento da estrutura modelada
- ρ – densidade de massa da estrutura

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Otimização - Aplicações

O conceito de otimização pode ser representado ou definido como sendo o ajuste de parâmetros para se obter um projeto mais favorável ou vantajoso (Dorf e Bishop, 1998). É muito presente esse conceito em todas as áreas da ciência, não somente na engenharia. Em se tratando de controle, a otimização ou controle ótimo é largamente estudado e apresentado em vários tópicos e possui inúmeras utilizações, desde o controle de nível de um reservatório de água até o controle de atitude de um veículo espacial.

Em processos de manufatura, esse conceito é amplamente utilizado, para reduzir defeitos, reduzir o tempo de processamento e os custos, por exemplo com base na coleta e tratamento de dados usando suporte estatístico (Maestrelli et al., 2001).

Em processos de fabricação, o menor desgaste da ferramenta de corte, o menor tempo de operação com menor gasto de energia, o melhor acabamento superficial, a melhor condição de remoção de material, por exemplo, são metas a serem atingidas, são ítems a serem otimizados.

Os processos de garantia de sistemas de gestão, ou sistemas de garantia da qualidade, buscam uma padronização dentro de nível de excelência para a gestão do negócio. Em outras palavras, almejam a gestão do negócio dentro de critérios ótimos de administração.

A otimização estrutural, teve origem no século XVIII e vem sendo objeto de vários estudos, mas ainda está longe de oferecer métodos, metodologias e procedimentos universais (ou gerais) para abordagem de todos os tipos de

problemas. A importância do peso mínimo foi inicialmente reconhecida pela indústria aeroespacial, enquanto que para outras áreas de aplicação, por exemplo, construção civil, indústrias mecânicas e automotivas, o custo do produto final é muito evidenciado, sem se esquecer que o peso pode ser um fator determinante da performance. Embora o uso de pequenos satélites artificiais tenha se mostrado um meio relativamente rápido, simples e de baixo custo de alcançar o espaço em missões espaciais com as mais diversas aplicações, é evidente que a conquista do espaço não será possível sem a construção de grandes estruturas espaciais com componentes rígido/flexíveis, a serem projetadas e lançadas em missões de maior complexidade. Grandes estruturas exigem um projeto otimizado, seja por:

- requerer um peso adequado devido à sua aplicação, por exemplo, as asas de um avião;
- ter uma característica própria para montagem, por exemplo, a Estação Espacial Internacional, que contempla uma montagem integrada de vários módulos que devem, um a um, serem levados ao espaço e lá conectados a outros para assim constituir a estrutura;
- ter uma utilização específica, pode exigir uma limitação em suas propriedades de rigidez, como no caso da Estação Espacial Internacional, ou do telescópio Hubble, ou da antiga e já inexistente Estação Espacial MIR, por exemplo.

Aplicações baseadas em Terra, como grandes pontes, edifícios, barragens, máquinas operatrizes, máquinas de medição, máquinas de transporte e posicionamento, etc., são objeto de estudos de otimização estrutural.

A evolução das técnicas e ferramentas de produção, dos recursos computacionais de simulação, dos materiais e suas ligas (que não deixam de ser consideradas também, como uma otimização das formas iniciais) permitem que os projetos possam ser mais arrojados e que o resultado da otimização possa ser melhor evidenciado.

O projeto de otimização num conceito multidisciplinar é um dos campos mais promissores na pesquisa e desenvolvimento (Zeid, 1991). Cada vez mais os sistemas tornam-se mais e mais complexos, exigindo assim do projetista habilidades, conhecimentos e recursos materiais (computacionais, softwares, simuladores, etc.) para que o sistema modelado envolva elementos que representem o mais fielmente possível o comportamento real da estrutura em condições reais de funcionamento.

Em se tratando de projeto de otimização estrutural, constata-se na literatura que o projeto integrado entre estrutura e controle ainda apresenta muitas oportunidades de estudo, uma vez que é ainda uma área muito recente (Fonseca, 1998). Neste sentido a otimização integrada, de estrutura e controle, estabelece uma ponte necessária entre os projetistas estruturais e os projetistas de controle, uma vez que, por tradicionalmente trabalharem separados, enfrentam problemas, principalmente quando se trata de grandes veículos espaciais, com estruturas complexas.

Características e requisitos conflitantes podem ser solucionados e melhor equacionados se um sistema for analisado sob um conceito integrado, uma vez que a multidisciplinaridade pode não oferecer requisitos de performance compatíveis como, por exemplo: o peso da estrutura pode ser a função objeto do projetista estrutural; o coeficiente de arrasto e coeficientes de sustentação podem ser funções objeto para o projetista aerodinâmico; a relação peso vs. empuxo pode ser a função objeto para o projetista dos propulsores; a estabilidade, os critérios de performance, a relação combustível vs. efeito do atuador, podem ser funções de custo para o projetista do sistema de controle; etc. Assim, a definição das restrições e das variáveis apresentam uma grande complexidade.

O desenvolvimento de um produto é baseado nas necessidades de mercado, ou seja, é fundamentado nas necessidades dos consumidores.

Desde a idéia inicial até a concepção final, o produto passa por duas fases principais: o *projeto do produto* e a *manufatura do produto*. O projeto em qualquer atividade é um processo complexo no qual o produto é gerado para satisfazer às necessidades do mercado consumidor. No processo de projeto temos dois principais subprocessos: a síntese e a análise. Na síntese a filosofia e a funcionalidade do produto são determinadas. O objetivo final da síntese é o projeto conceitual do produto. O subprocesso de análise, inicia-se por uma tentativa de colocar o projeto, até então com conceitos abstratos, dentro dos conceitos de performance especificados para o produto final. Isto constitui o *modelamento* e a *simulação*.

A qualidade dos resultados, as decisões envolvidas e as alterações relativas às atividades de análise do projeto, otimização do projeto e de avaliação são limitadas pela qualidade do *modelo* escolhido. Um ciclo de um produto genérico é representado na Figura 1.1. As teorias de otimização fornecem ferramentas para um projeto eficiente.

Em se tratando de projetos estruturais, a análise estrutural e a otimização estrutural são dois aspectos a serem amplamente considerados no projeto.

A noção de melhorias ou de otimização de uma estrutura, pressupõe implicitamente que temos alguma liberdade para variar a estrutura. O potencial de variação é tipicamente expresso em termos do campo de variação permissível de um grupo de parâmetros. Esses parâmetros são geralmente denominados de VARIÁVEIS DE PROJETO. As variáveis de projeto podem ser parametrizadas, controlando assim a geometria da estrutura, as propriedades do material, as formas das seções transversais, etc. Podemos classificar as variáveis de projeto em:

- Variáveis de projeto contínuas, são variáveis que dentro de um campo de variações, assumem qualquer valor. Por exemplo, em uma viga engastada, sujeita a um carregamento estático, o momento de inércia de qualquer seção transversal da viga pode ser considerado como uma variável de projeto contínua;
- Variáveis de projeto discretas, são variáveis que podem assumir valores isolados como, por exemplo, os valores de uma lista pré-concebida. Por exemplo, propriedades físicas dos materiais (módulo de elasticidade, limite de resistência, etc.), são em geral, variáveis de projeto discretas.

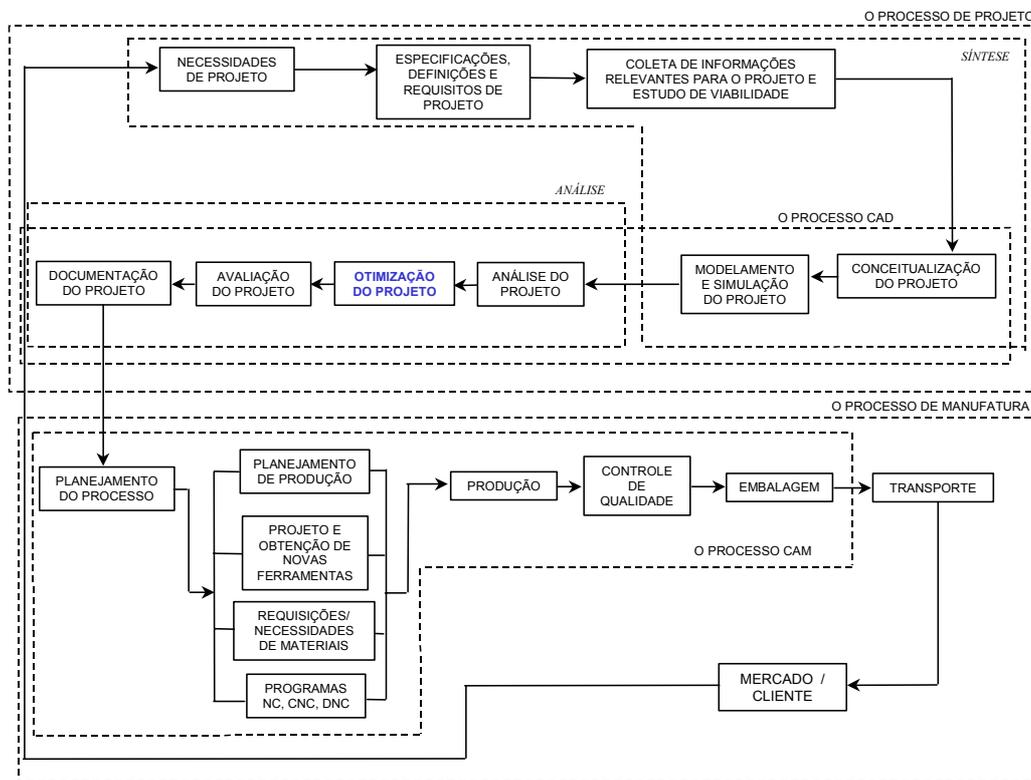


FIGURA. 1.1 - Ciclo típico de um produto.

A escolha das variáveis de projeto pode ser um fator crítico para o sucesso do processo de otimização; em particular, a escolha das variáveis de projeto deve ser consistente com o modelo de análise.

A noção de otimização considera também a existência de algumas FUNÇÕES DE MÉRITO, ou funções que podem ser melhoradas. A terminologia utilizada na otimização para essas funções é FUNÇÃO OBJETIVO.

Por um lado sistemas como grandes estruturas espaciais, tem seu comportamento classificado como uma estrutura flexível, ou seja, são admitidas deformações dentro de uma tolerância que não deve permitir que suas propriedades mecânicas sejam violadas (ou seja, não devem ser atingidos valores que provoquem o colapso da estrutura). Por outro lado, a estrutura estará sujeita às suas especificações de operação, podendo necessitar de manobras para correção de posicionamento (manobras de atitude) ou poderá estar sujeita ao gradiente de gravidade (em órbitas baixas da Terra), por exemplo; nesses casos a estrutura deverá ter comportamento compatível com sua função.

Problemas de otimização assumem um importante aspecto no dia a dia em nosso mundo atual, não só no campo das ciências exatas, mas também nas outras áreas do conhecimento.

1.2 Objetivo

O progresso e o desenvolvimento da engenharia estrutural nas últimas décadas mostra que este é um dos ramos da ciência em que o homem mais tem se desenvolvido. Como exemplos desse desenvolvimento, podemos citar a construção da Estação Espacial Internacional, o sucesso no desenvolvimento de grandes aviões para uso civil e militar, o telescópio espacial Hubble. É importante citar que o Brasil está presente nesse desenvolvimento, fazendo parte do projeto da Estação Espacial Internacional.

Este trabalho de dissertação apresenta o desenvolvimento de um modelo matemático de uma estrutura espacial em órbita baixa da Terra. A essa estrutura só é permitido o movimento de arfagem (“pitch”). São considerados apenas os torques devido ao gradiente de gravidade e são desprezados os efeitos de arrasto, os campos magnéticos e a pressão de radiação solar. A este modelo, obtido pela utilização da metodologia de elementos finitos e abordagem Lagrangiana, é conferido uma propriedade elástica, e o acoplamento entre corpo flexível e corpo rígido é considerado.

O objetivo deste estudo é obter uma estrutura otimizada, ou seja, uma estrutura de peso/massa mínimo que atenda aos requisitos de sua frequência fundamental de vibração. Visto ser uma grande estrutura espacial, o problema do peso estrutural é de vital importância, visto que a estrutura será levada à sua órbita por um veículo lançador. O primeiro modo de vibração, ou a vibração em sua frequência fundamental é o modo mais importante na análise estrutural, visto que para efeito de controle, elevando essa frequência, o sistema torna-se mais rígido.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Introdução

O projeto estrutural para um comportamento dinâmico ótimo é um importante problema, especialmente em estruturas onde a performance operacional e sua integridade dependem exclusivamente de suas características dinâmicas. A resposta dinâmica (ou a forma como o sistema responde dinamicamente à uma excitação) de um sistema estrutural é primeiramente controlada pela sua frequência natural de vibração, ou sua frequência fundamental de vibração e pelos seus modos de vibração. Assim a escolha do vínculo na frequência fundamental de vibração, por ser esta a menor frequência, conduz à uma estrutura dimensionada pela sua rigidez.

A noção de uma solução ótima para um problema de engenharia é intrigante e vem sendo investigada há um longo tempo. A emergência do cálculo das variações, ou cálculo variacional, atribuído a Bernoulli, Euler e Lagrange, durante os séculos XVII e XVIII, representou o início da “era de ouro” da otimização matemática. Apesar dos métodos variacionais serem a base do problema de minimização (ou de maximização), eles apresentam dificuldades para aplicações práticas. As equações de Euler-Lagrange, por exemplo, que expressam uma condição de extremo, e conduzem a uma ou mais equações diferenciais que, em sua maioria, são não lineares, apresentam solução difícil, exigindo condições específicas para a garantia das propriedades de continuidade e de diferenciabilidade no problema formulado.

Em se tratando de otimização estrutural, a teoria de análise estrutural teve um desenvolvimento concomitante ao longo da história. Assim podemos destacar algumas contribuições importantes:

- Galileo (G. L. Galileo, "*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze Attenenti alla Meccanica et i Movimenti Locali*", 1638), que apresentou o primeiro trabalho de descrição do estado de tensões a que uma viga está sujeita sob a ação de um carregamento de flexão. Foi, talvez, o primeiro trabalho de otimização estrutural. Em seus estudos Galileo não abordou o problema da determinação do melhor perfil da seção transversal da viga estudada;

- Bernoulli (Jean Bernoulli, "*Letter to Leibnitz on Beams of Uniform Strength*", 1687), estendeu o trabalho de Galileo, iniciou pesquisas na direção da otimização do perfil da seção transversal de uma viga. Bernoulli fez a observação de que as seções transversais planas se mantêm planas sob a ação de um esforço de flexão desde que estejam nas condições de validade da Lei de Hooke. Isto leva a uma distribuição linear de tensões ao longo de uma seção transversal da viga e, dessa forma, chegou a resultados semelhantes, relativamente às tensões axiais, aos obtidos por Galileo;

- Parent (A. Parent, "*Des Resistences des Poutres, et des Poutres de Plus Grande Resistance, Independamment de Tout Systeme Physique*", 1708 e "*Des Points de la Rupture des Figures. D'en Deduire Celles qui Sont Partout d'une Resistance Egale*" - 1710), realizou, do ponto de vista do estudo de vigas, a maior contribuição. Ele propôs que a suposição básica relativa à distribuição de tensões não dá origem a uma distribuição linear de tensão axial resultante, e introduziu o conceito de *eixo neutro* de tensões. Usando essa teoria, ele desenvolveu procedimentos para otimização estrutural em problemas de vigas com resistência uniforme sujeitas a carregamentos variáveis;

- Lagrange (J. L. Lagrange, "*Sur la Figure des Collones. Miscellanes Taurinensia*", 1770), sem saber do trabalho anteriormente realizado por Parent, chega aos mesmos resultados sobre o conceito de eixo neutro e em 1770~1773 examinou o projeto de vigas sobre carregamento axial e também verificou a forma da *curva elástica*. Esse estudo examinou o projeto de mínimo peso de uma coluna com forma assimétrica. Sua solução indicou que o projeto ótimo seria uma viga cilíndrica de seção circular constante (o que se mostrou incorreto quando se considerou o peso próprio da viga). Esse problema foi abordado e resolvido em 1851 por Clausen (T. Clausen, "*Column of Minimum Weigth*" - 1851). O assunto foi iniciado nos tempos de Lagrange e amplamente estudado até o final do século XIX, quando duas contribuições importantes foram dadas por Lévy e Maxwell;

- Lévy (M. Lévy, "*La Statique Graphie et ses Applications aux Constructions*", 1875), apresentou um estudo do projeto de armações e arcos de resistência uniforme. Ele mostrou que uma treliça sujeita a um carregamento constante deve ser estaticamente determinada para obedecer a um conceito de projeto ótimo e determinou também os eixos de um arco de resistência uniforme sem considerar o peso próprio da estrutura;

- Em 1904, Michell (A. G. M. Michell, "*The Limit of Economy of Material in Frames Structures*"), publicou um "*paper*" onde demonstra todo o significado da teoria de Maxwell, e a desenvolve para estabelecer uma ferramenta para projetos ótimos dentro do conceito de peso mínimo de estruturas com juntas pinadas relativas às restrições de tensões. A teoria só é aplicada a problemas cuja estrutura sofre ação de uma única força concentrada, ou a problemas de estrutura estaticamente determinada (sendo instável se forças adicionais forem aplicadas).

O problema de peso mínimo foi muito importante para muitos tipos de estruturas, principalmente no desenvolvimento de aviões. Inicialmente o projeto de aviões considerava essencialmente, a aerodinâmica e a estabilidade. Após a II Grande Guerra Mundial, a situação foi radicalmente mudada, sendo que as principais restrições desses tipos de estruturas eram geradas pela necessidade de evitar amassamentos na fuselagem e/ou nas longarinas (ou estrutura) internas;

- H. Wagner em 1929, examinou o projeto de elementos simples sujeitos ao dobramento. Smith e Cox ("*Structures of Minimum Weight*") fizeram o primeiro estudo nos princípios de projetos de estruturas de mínimo peso sujeitas a esforços de compressão.

A crescente necessidade global de “diminuição das distâncias” geográficas e a inerente característica humana de procurar pelo novo e desvendar o desconhecido, faz com que os projetos estruturais sejam cada vez mais sofisticados e arrojados, particularmente na indústria aeroespacial. Com a criação da Estação Espacial Internacional e, por que não, das grandes aeronaves civis e militares, esse ramo industrial tem vivido um período de êxtase. Esses grandes projetos estruturais têm motivado os pesquisadores na procura e no desenvolvimento de novas abordagens para a solução dos igualmente grandes problemas de projetos estruturais.

A literatura sobre esse assunto trata fundamentalmente dos algoritmos de otimização, das técnicas de aproximações nos vínculos, da análise da sensibilidade (“sensitivity”), do problema do autovalor, da otimização da forma ou de perfis, de técnicas de decomposição da estrutura para análise e otimização, dentre outros assuntos. O objeto de estudo desta dissertação é a otimização de uma estrutura espacial, com vínculos ou restrições na sua

freqüência fundamental de vibração, dada a sua importância no contexto do projeto estrutural, como já abordado na introdução.

Uma interessante resenha dos métodos de otimização é apresentada por Grandhi (1993), onde o assunto é organizado em diferentes capítulos abordando o estado e as diferentes formas de apresentação do problema da otimização com restrições na freqüência de vibração. Nesse trabalho também, encontramos uma análise da sensibilidade e particularmente de autovalores repetidos. Um sistema multiparâmetros admitindo autovalores repetidos e nulos no ponto de equilíbrio é considerado por Luongo et al. (2000). A análise da sensibilidade do valor próprio é feita explorando as vizinhanças do ponto de equilíbrio/ou configuração de equilíbrio.

Um exame da determinação do peso mínimo de uma estrutura satisfazendo às restrições de freqüência é apresentado por Grandhi e Venkayya (1988). Os problemas considerados são: otimização com uma restrição de freqüência de vibração (na freqüência fundamental) com um vínculo de igualdade, e com restrições em múltiplas freqüências de vibração (tratados como vínculos de igualdade e de desigualdade). O critério de otimização é baseado na diferenciação do Lagrangiano com respeito às variáveis de projeto e o projeto de mínimo peso satisfaz as restrições ou vínculos. A essência do critério ótimo é que no ponto de peso ótimo a soma ponderada do Lagrangiano deve ser a mesma em todos os elementos considerados, ou seja, o Lagrangiano é computado para cada elemento e depois avaliado para todos os elementos. Esse trabalho discute o algoritmo de otimização, o procedimento de redimensionamento e as técnicas de escala para múltiplas restrições de freqüência.

Uma interessante comparação entre alguns dos algoritmos de otimização freqüentemente utilizados para projetar uma estrutura de mínimo peso, é apresentada por Khot et al. (1979). Existe uma diferenciação somente no grau

de aproximação feito na formulação das relações de recorrência para modificar as variáveis de projeto e para avaliar os multiplicadores de Lagrange. Os autores apresentam um novo esquema iterativo para solução do problema, semelhante ao método de Newton-Raphson.

Nair et al. (1998), propõe um método numérico de aproximação para solução do problema de autovalores e autovetores de estruturas modificadas. Os termos da aproximação local baseiam-se numa série de Taylor ou numa matriz de séries de potências, que são usadas como base de autovetores para aproximar o parâmetro próprio perturbado. Para cada modo um sistema próprio é gerado. A solução do sistema gerado conduz duas possíveis estimativas do valor do autovetor e do autovalor da estrutura modificada.

Um breve estudo das limitações da otimização com restrições de frequência de vibração é apresentado por Kamat et al. (1983). Os autores abordam o tema enfatizando as limitações do projeto da estrutura ótima, obtida sob uma restrição na frequência de vibração. Mostra-se que a quantidade de material necessário para atender aos critérios de otimização de uma viga ou de uma barra sob uma determinada configuração (comprimento e condições de contorno), podem ser desproporcionalmente grandes conduzindo a um projeto impraticável.

A otimização, ou projeto ótimo de vigas sujeitas a vibrações de flexão, é abordada por Elwany e Barr (1983). A otimização consiste na minimização do peso estrutural de uma viga. O objetivo é a maximização de uma frequência de vibração (normalmente a primeira), para um dado peso da viga, ou o equivalentemente, a minimização do peso da viga para uma especificada frequência de vibração.

O projeto de estruturas complexas para satisfazer as características de resposta é dificultado pela inerente dificuldade da análise dinâmica do sistema e pelo

custo do processamento computacional. Fox e Kapoor (1968), apresentam um estudo considerando essas limitações, pois, somente pela análise do projeto não fica claro como o projeto pode ser modificado para melhorar ou manter suas propriedades dinâmicas. Assim um estudo da taxa de variação dos autovalores e dos autovetores é focalizado. Uma técnica de aproximação de primeira ordem de autovalores e autovetores, onde ocorrem valores repetidos de autovalores, é apresentada por Hou e Kenny (1992). O objetivo dos autores é o de apresentar um método para análise aproximada de autovalores e autovetores, na presença de autovalores repetidos e apresentar um método alternativo para as equações de sensibilidade dos autovetores.

A análise da sensibilidade (ou sensibilidade derivativa) é utilizada para se estudar o efeito de modificações paramétricas no sistema, calculando as direções de busca para a determinação de um projeto ótimo. Permitindo suposições/modificações no projeto, para atingir aquele projeto ótimo. Sobieski e Riley (1982), apresenta um estudo de obtenção das equações da sensibilidade para, independentemente do algoritmo utilizado, chega-se ao ponto ótimo. Uma relação de métodos aplicáveis ao cálculo da sensibilidade estrutural derivativa para estruturas modeladas pelo método dos elementos finitos é apresentada por Adelman e Haftka (1986). Hou et al. (1987), apresentam um método computacional (método de diferenças finitas para resolver o problema dos vínculos) para análise da sensibilidade de problemas de valores próprios não lineares.

O problema da maximização da frequência fundamental de vibração de uma viga fina com acoplamento de flexão e torção é abordado por Hanagud et al. (1987). Um critério de abordagem ótimo é usado para localizar valores estacionários de uma função objetivo apropriada sujeita às restrições. Projetos ótimos com seus acoplamentos são abordados pelos autores.

Projetos de grandes estruturas para aplicações aeroespaciais requerem um algoritmo eficiente de otimização, devido à existência de um grande número de variáveis e de restrições/vínculos de projeto. As maiores dificuldades associadas a esse tipo de projeto são: a convergência da solução e os requisitos computacionais necessários. Estruturas aeroespaciais geralmente envolvem limitações de deslocamentos, tensões, de peso e de frequências de vibração. Canfield et al. (1988), apresentou estudo para determinar qual técnica é factível e eficiente para a otimização de um problema complexo de projeto.

As técnicas de aproximação têm grande importância para o progresso da otimização estrutural. A técnica mais comum é a das variáveis recíprocas que produzem uma alta qualidade nas aproximações das funções de restrição. Esta técnica proporcionou um importante progresso na otimização estrutural onde métodos de elementos finitos e técnicas matemáticas são combinadas. Yoshida e Vanderplaats (1988), aborda esse tema, focalizando o uso das técnicas de aproximação para diminuir o número de análises.

A grande maioria dos trabalhos publicados sobre otimização estrutural abordam estruturas espaciais, porém baseadas em Terra. Focalizando estruturas que serão utilizadas no espaço, Usoro et al. (1986), apresenta uma abordagem para o modelamento de uma estrutura de mínimo peso utilizando o método de elementos finitos e abordagem Lagrangiana. As estruturas ou modelos estruturais baseados em Terra apresentam maior interesse para os projetistas estruturais. Observa-se que a literatura para projetos integrados de estrutura e controle ainda tem um grande avanço pela frente que talvez seja um assunto para uma seqüência dessa dissertação.

No modelamento matemático da estrutura apresentado nesse trabalho, foi utilizada a metodologia apresentada por Feiyue et al. (1993), onde o sistema é modelado utilizando-se o método de elementos finitos e a fórmula de Lagrange (ou Lagrangiano). Aqueles autores, consideram a flexibilidade de uma estrutura

espacial de grandes dimensões e pequeno peso; analisam também três estratégias de controle dessa estrutura, sendo que na presente dissertação, o controle não é abordado.

Uma interessante discussão é apresentada por Kamat (1993), sobre as ferramentas utilizadas na otimização estrutural, com detalhes sobre os pacotes computacionais NASTRAN, RAZNA e ANSYS dentre outros.

Esse trabalho pertence ao contexto da literatura anteriormente mencionada, e utiliza técnicas de modelamento, de análise e de simulação já conhecidas e abordadas por vários pesquisadores. O modelo, deste trabalho considera o torque relativo ao gradiente de gravidade, pois a estrutura é suposta em órbita de baixa altitude da Terra (438 Km de altitude). Modelo semelhante foi estudado por Fonseca (1988). Da mesma forma, no movimento de arfagem (“pitch”), são considerados o acoplamento com deslocamentos elásticos e de corpo rígido.

2.2 Motivação

A questão de otimização se insere no contexto atual, no qual o Brasil está presente.

O progresso e o desenvolvimento da engenharia espacial nas últimas décadas mostra que esta é uma das áreas em que o homem mais tem evoluído. Basta citar o exemplo do pleno sucesso dos vôos do ônibus espacial (“Space Shuttle”) e o início da construção da Estação Espacial Internacional, projeto no qual o Brasil está presente.

O Brasil obteve, nos últimos anos, grande progresso no setor espacial. Pode-se citar: o Satélite de Coleta de Dados 1 (SCD1), lançado em 1993 com uma vida útil prevista de 2 anos, no entanto, ainda operacional; o acordo em andamento de cooperação Brasil e China que resultou na construção e no lançamento com sucesso do satélite de sensoriamento remoto - “China - Brazil Earth Resource Satellite” (CBERS) em 14 de outubro de 1999; o acordo de cooperação para construção de um micro-satélite com a França; o projeto VLS, Veículo Lançador de Satélite, que obteve sucesso parcial no primeiro lançamento; o pleno sucesso do lançamento do segundo Satélite de Coleta de Dados 2 (SCD2). Estes fatos, além de colocar o Brasil no seleto grupo de países com tecnologia para construir e lançar satélites, também contribuem para que o Brasil seja convidado para fazer parte do grupo de países participantes da construção da Estação Espacial Internacional. Esta participação vai nos permitir realizar várias pesquisas e experimentos que necessitam de condições de micro-gravidade, por exemplo.

No setor da aviação comercial e militar, o Brasil tem conquistado reconhecimento, por projetos arrojados como, por exemplo, a família do avião ERJ 145, jato regional da Embraer, que definitivamente conquistou o mercado Americano nessa categoria. Hoje a Embraer ocupa o quarto lugar no ranking

das maiores companhias construtoras de aviões do mundo. O projeto ítalo-brasileiro de um avião militar, igualmente alcançou o sucesso esperado. Hoje se produz uma aeronave em quatorze meses, decorridos desde seu pedido até a sua entrega ao cliente final.

No setor de construção civil de grandes estruturas, o Brasil é reconhecido internacionalmente, transferindo essa tecnologia para outros países.

São fatos que motivam o estudo e a formulação desta dissertação de mestrado, feitos inicialmente para uma estrutura espacial, com algumas restrições em seus atributos, mas com a profundidade suficiente para permitir sua extensão a aplicações em modelos estruturais baseados em Terra e/ou a inclusão de apêndices ou mudanças nas restrições de seus atributos tornando-a mais próxima de um modelo específico.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

3.1 – O Problema do Autovalor

A Equação de movimento amortecido (ou Equação de vibração livre amortecida) para uma estrutura com n graus de liberdade (sistema linear), sendo $\{U\}$ seu vetor de coordenadas generalizadas, pode ser escrita como:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = 0 \quad (3.1.1)$$

Onde $[M]$ é uma matriz inversível.

A Equação (3.1.1), pode ser reescrita na forma:

$$[M]^{-1} \cdot [M] \{\ddot{U}\} + [M]^{-1} \cdot [C] \{\dot{U}\} + [M]^{-1} \cdot [K] \{U\} = 0$$

$$[I] \{\ddot{U}\} + [M]^{-1} \cdot [C] \{\dot{U}\} + [M]^{-1} \cdot [K] \{U\} = 0$$

Adotando o vetor de estados, como a seguir, temos;

$$x_1 = U$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{U}$$

$$e \quad \dot{x}_2 = -[M]^{-1} \cdot [C] \dot{x}_1 - [M]^{-1} \cdot [K] x_1 = -[M]^{-1} \cdot [C] x_2 - [M]^{-1} \cdot [K] x_1$$

Assim podemos escrever a Equação (3.1.1) na seguinte forma;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1} \cdot [K] & -[M]^{-1} \cdot [C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ou

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} \quad (3.1.2)$$

A matriz $[A]$ é uma matriz constante, a Equação (3.1.2) representa uma Equação diferencial homogênea linear invariante no tempo. Este tipo de Equação apresenta solução da forma:

$$x(t) = e^{\lambda.t}.x \quad (3.1.3)$$

Obtendo então a solução para a Equação (3.1.2), temos:

$\dot{x} = \lambda.e^{\lambda.t}.x$ e substituindo na Equação (3.1.2), $\lambda.e^{\lambda.t}.x = A.e^{\lambda.t}.x$, ou ainda,

$$\lambda.\{x\} = [A]\{x\} \quad (3.1.4)$$

A Equação (3.1.4), é o “problema do autovalor”. É um problema fundamental da teoria dos sistemas lineares em geral e, em particular na teoria das vibrações. Neste caso, o valor de λ representa a frequência natural de vibração do sistema (ω_n). O problema do autovalor pode ser enunciado como sendo o problema de se determinar os valores do parâmetro λ , de tal forma que a solução da Equação (3.1.4) seja não trivial. Os valores de λ são denominados autovalores da matriz $[A]$ e são determinados pela Equação característica;

$$\det([A] - \lambda[I]) = 0 \quad (3.1.5)$$

Para cada autovalor λ_j obtido, teremos um respectivo subespaço de autovetores x_j ($j=1, 2, 3, \dots, 2.n$), que é denominado de AUTOVETOR. Notamos, que ao reduzirmos a ordem do sistema, aumentamos o número de variáveis. Ambos, λ_j e x_j são, em geral grandezas complexas. Vemos que, pela

Equação (3.1.3), o comportamento (a resposta do sistema) é regido por uma exponencial que depende do valor de λ (ou λ_j). Seja então,

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \quad (j = 1, 2, \dots, 2.n) \quad (3.1.6)$$

podemos fazer as seguintes considerações:

. a parte real do autovalor, α_j , determina a amplitude do j-ésimo termo do conjunto de equações formado pela Equação (3.1.2), o termo $e^{\alpha_j t}$ representa as variações da amplitude em função do tempo;

. a parte imaginária do autovalor, β_j , representa a frequência do j-ésimo termo com uma velocidade angular β_j . O termo $e^{i\beta_j t}$, representa um vetor girante unitário do plano complexo, com velocidade angular β_j .

OBS.: a parte real do autovalor controla a estabilidade do sistema.

OBS.: uma forma mais rigorosa, que não invalida a forma apresentada anteriormente, é considerar a Equação (3.1.3) como sendo uma combinação linear do tipo:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{2n} c_j \cdot e^{\lambda_j t} \cdot x_j$$

Podemos também fazer a seguinte análise quanto às características do autovalor:

- se todos os autovalores são complexos, com sua parte real nula ($\alpha_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, 2.n$) então, todos são complexos puros conjugados, a resposta do sistema não tende a zero (nem tende a aumentar com o passar do tempo), ou

seja, o sistema oscila mas a amplitude não cresce nem diminui com o passar do tempo. Neste caso o sistema é simplesmente denominado de ESTÁVEL;

- se todos os autovalores possuem partes reais negativas ($\alpha_j < 0, j = 1, 2, \dots, 2.n$), ou se todos os autovalores são reais negativos, então a resposta do sistema tende a zero com o passar do tempo, neste caso o sistema é denominado ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL;

- se a parte real de pelo menos um autovalor complexo, ou pelo menos um autovalor real for positiva, a resposta tende a infinito com o passar do tempo. Neste caso o sistema é denominado INSTÁVEL. Neste caso o infinito deve ser entendido como um valor grande, limitado pelas condições de colapso do sistema.

Nesta formulação, o problema do autovalor foi definido utilizando uma matriz dinâmica do sistema na sua forma mais geral. Com a adoção dos vetores de estado, houve uma redução de ordem do sistema, e assim os autovalores correspondem às frequências naturais de vibração do sistema. Os autovetores correspondentes, são os modos de vibração do sistema, ou modos normais de vibração do sistema, ou seja, representam a configuração na qual o sistema vibra em uma de suas frequências naturais de vibração.

Podemos definir o problema do autovalor de uma outra forma. Consideremos um sistema linear natural conservativo. Nesta situação as forças não conservativas são nulas e a componente relativa ao amortecimento é nula e a Equação (3.1.1) pode ser reescrita como:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = 0 \quad (3.1.7)$$

A solução para esta Equação pode ser expressa na forma exponencial como:

$$u(t) = e^{s.t}.x \quad (3.1.8)$$

Então temos, $\dot{u}(t) = s.e^{s.t}.x$ e $\ddot{u}(t) = s^2.e^{s.t}.x$, que substituindo na Equação (3.1.7), fornece:

$s^2.e^{s.t}.\{x\}.[M] + e^{s.t}.\{x\}.[K] = 0$, ou ainda, $s^2.\{x\}.[M] + \{x\}.[K] = 0$. Assim podemos escrever $[K]\{x\} = -s^2.[M]\{x\}$, de onde vem que, $\lambda = -s^2$, ou ainda,

$$[K]\{x\} = \lambda.[M]\{x\} \quad (3.1.9)$$

A Equação (3.1.9), representa o conjunto de n equações algébricas homogêneas simultâneas nas variáveis não conhecidas x_i ($i=1, 2, \dots, n$). O problema então é determinar o valor de λ , de tal forma que a Equação não tenha apenas a solução trivial (é o problema do autovalor).

OBS.: considerando a Equação (3.1.9), a Equação representa um conjunto de equações diferenciais homogêneas simultâneas do tipo:

$$\sum_{j=1}^n k_{ij}.x_j = \lambda.\sum_{j=1}^n m_{ij}.x_j \quad \text{então,} \quad \sum_{j=1}^n k_{ij}.x_j - \lambda.\sum_{j=1}^n m_{ij}.x_j = 0, \quad \text{ou ainda,}$$

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - \lambda.m_{ij}).x_j = 0$$

de onde temos, $k_{ij} - \lambda.m_{ij} = 0$, ou $\lambda = \frac{k_{ij}}{m_{ij}}$. Por definição a frequência natural de vibração do sistema é $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ (ou em forma matricial $\omega_n^2.[I] = [K].[M]^{-1}$), assim temos que $\lambda = \omega_n^2$.

A Equação (3.1.9), pode ser reescrita como:

$$[K]\{x\} = \omega_n^2 \cdot [M]\{x\} \quad (3.1.10)$$

A Equação (3.1.10) é o problema do autovalor associado com as matrizes [K] e [M] e possui a solução não trivial se, e somente se, o determinante dos coeficientes de x_j for nulo, ou seja,

$$\det(k_{ij} - m_{ij} \cdot \omega^2) = 0 \quad (3.1.11)$$

A Equação (3.1.11) é denominada de determinante característico da Equação $k_{ij} - m_{ij} \cdot \omega^2$ (Equação característica, ou Equação das freqüências). Essa Equação é de grau n em ω^2 e possui em geral n raízes distintas que são os autovalores ou valores característicos. As n raízes da Equação são $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots, \omega_n^2$, cujas respectivas raízes são as denominadas de FREQUÊNCIAS NATURAIS DO SISTEMA, ω_r ($r = 1, 2, 3, \dots, n$). As freqüências naturais do sistema podem ser reagrupadas em ordem crescente de magnitude, assim podemos escrever: $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq \dots \leq \omega_n$. A menor freqüência, ω_1 , é referida como a mais importante de todas e em muitos problemas é denominada de FREQUÊNCIA FUNDAMENTAL.

OBS.: em geral as freqüências ω_r são distintas e o sinal de igualdade não aparece.

Associado a cada freqüência ω_r , existe um vetor $\{x\}_r$, não trivial, cujos elementos x_{ir} , são números reais, onde $\{x\}_r$ é a solução do problema do autovalor, de tal forma que:

$$[K]\{x\}_r = \omega_r^2 \cdot [M]\{x\}_r \quad r = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.1.12)$$

Os vetores $\{x\}_r$, são denominados VETORES CARACTERÍSTICOS, ou VETORES PRÓPRIOS, ou VETORES MODAIS e representam fisicamente os MODOS NATURAIS de vibração do sistema. Quando as forças não conservativas são desconsideradas, o amortecimento não é considerado, este problema leva assim a autovalores reais, que representam fisicamente cargas de flambagem ou frequências de vibração.

Os modos naturais de vibração apresentam uma propriedade importante, conhecida como ORTOGONALIDADE. É uma ortogonalidade não convencional (ou seja, produto entre dois vetores é nulo), mas uma ortogonalidade com respeito a matriz de massa $[M]$ do sistema. Também pode ser referida à matriz de rigidez $[K]$ do sistema. Vamos analisar a prova da ortogonalidade dos vetores $\{x\}_r$, $r = 1, 2, 3, \dots, n$. Consideremos duas soluções distintas para o problema do autovalor. Sejam, então, ω_r^2 , $\{x\}_r$ e ω_s^2 , $\{x\}_s$ essas soluções. Podemos escrever (utilizando a Equação (3.1.12)):

$$[K] \cdot \{x\}_r = \omega_r^2 \cdot [M] \cdot \{x\}_r \quad (3.1.13)$$

$$[K] \cdot \{x\}_s = \omega_s^2 \cdot [M] \cdot \{x\}_s \quad (3.1.14)$$

Multiplicando ambos os lados das equações, respectivamente, por $\{x\}_s^T$ e $\{x\}_r^T$ obtemos;

$$\{x\}_s^T \cdot [K] \cdot \{x\}_r = \omega_r^2 \cdot \{x\}_s^T \cdot [M] \cdot \{x\}_r \quad (3.1.15)$$

$$\{x\}_r^T \cdot [K] \cdot \{x\}_s = \omega_s^2 \cdot \{x\}_r^T \cdot [M] \cdot \{x\}_s \quad (3.1.16)$$

Transpondo a Equação (3.1.16), teremos;

$$\{x\}_s^T \cdot [K]^T \cdot \{x\}_r = \omega_s^2 \cdot \{x\}_s^T \cdot [M]^T \cdot \{x\}_r \quad (3.1.17)$$

Sendo as matrizes $[M]$ e $[K]$ simétricas, a Equação (3.1.17) pode ser reescrita como:

$$\{x\}_s^T \cdot [K] \cdot \{x\}_r = \omega_s^2 \cdot \{x\}_s^T \cdot [M] \cdot \{x\}_r \quad (3.1.18)$$

Subtraindo da Equação (3.1.15) a Equação (3.1.18), obtemos:

$$\{x\}_s^T \cdot [K] \cdot \{x\}_r - \{x\}_s^T \cdot [K] \cdot \{x\}_r = \omega_r^2 \cdot \{x\}_s^T \cdot [M] \cdot \{x\}_r - \omega_s^2 \cdot \{x\}_s^T \cdot [M] \cdot \{x\}_r$$

ou

$$0 = \omega_r^2 \cdot \{x\}_s^T \cdot [M] \cdot \{x\}_r - \omega_s^2 \cdot \{x\}_s^T \cdot [M] \cdot \{x\}_r$$

ou

$$0 = (\omega_r^2 - \omega_s^2) \cdot \{x\}_s^T \cdot [M] \cdot \{x\}_r$$

Considerando que para duas soluções distintas, que $\omega_s^2 \neq \omega_r^2$, o que em geral ocorre, temos que a solução para a expressão acima deve satisfazer a expressão:

$$\{x\}_s^T \cdot [M] \cdot \{x\}_r = 0 \quad \text{para } r \neq s \quad (3.1.19)$$

A Equação (3.1.19) é que descreve a condição de ortogonalidade dos vetores nodais. Nota-se que a ortogonalidade é com respeito à matriz de massa, $[M]$, do sistema, que neste caso faz o papel de uma matriz de ponderação (ou matriz que define os pesos de cada componente do autovetor, de cada modo de vibração). Esta relação de ortogonalidade somente é válida se a matriz $[M]$ for simétrica. No caso de ser uma matriz diagonal, também valem as mesmas considerações feitas.

OBS.: A condição de ortogonalidade também pode ser referida à matriz de rigidez $[K]$. Para tanto, inserindo a Equação (3.1.19) na Equação (3.1.15), obteremos;

$$\{x\}_s^T \cdot [K] \cdot \{x\}_r = 0 \quad \text{para } r \neq s$$

3.2 - Problema da Sensibilidade (“Sensitivity”)

A análise da sensibilidade (ou sensibilidade derivativa) é utilizada para se estudar o efeito de modificações paramétricas no sistema, calculando as direções de procura para a determinação de um projeto ótimo, construindo funções de aproximação e conduzindo suposições/modificações no projeto. Do ponto de vista do controle, o conceito de sensibilidade é relativo às variações no índice de controle causadas pelas variações na planta e nas matrizes de influência do controle. No projeto estrutural o conceito de sensibilidade pode ser usado para se determinar/procurar a direção da solução ótima relativa à otimização estrutural. Neste caso, então, a análise de sensibilidade envolve as derivadas dos autovalores/autovetores com respeito às variáveis de projeto (em nosso caso, a área da seção transversal).

Retomando a Equação (3.1.10), impondo a restrição de frequência, temos então que determinar a derivada da frequência em função da variável de projeto. Assim temos,

$$\omega' = \frac{\partial \omega_i}{\partial A_i}$$

A Equação (3.1.10), pode então ser reescrita como, considerando $\lambda = \omega^2$,

$$[\mathbf{K}]\{x\}_i - \lambda_i \cdot [\mathbf{M}]\{x\}_i = 0 \quad (3.2.1)$$

ou ainda,

$$([\mathbf{K}] - \lambda_i \cdot [\mathbf{M}])\{x\}_i = 0 \quad (3.2.2)$$

As matrizes $[K]$ e $[M]$ são simétricas e ainda $[K]$ é positiva semidefinida e $[M]$ é positiva definida. Normalizamos com respeito à matriz $[M]$ por,

$$\{x\}_i^T \cdot [M] \cdot \{x\}_i = 1 \quad (3.2.3)$$

A derivada do problema do autovalor pode ser expressa da seguinte forma: diferenciando as equações (3.2.2) e (3.2.3) com relação à variável de projeto, teremos respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial([K] - \lambda_i \cdot [M])}{\partial A_i} \cdot \{x\}_i + ([K] - \lambda_i \cdot [M]) \cdot \frac{\partial \{x\}_i}{\partial A_i} &= \left(\frac{\partial [K]}{\partial A_i} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial A_i} \cdot [M] - \lambda_i \cdot \frac{\partial [M]}{\partial A_i} \right) \cdot \{x\}_i + ([K] - \lambda_i \cdot [M]) \cdot \frac{\partial \{x\}_i}{\partial A_i} \\ ([K] - \lambda_i \cdot [M]) \cdot \frac{\partial \{x\}_i}{\partial A_i} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial A_i} \cdot [M] \cdot \{x\}_i &= - \left(\frac{\partial [K]}{\partial A_i} - \lambda_i \cdot \frac{\partial [M]}{\partial A_i} \right) \cdot \{x\}_i \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

e

$$\{x\}_i^T \cdot [M] \cdot \frac{\partial \{x\}_i}{\partial A_i} = - \frac{1}{2} \cdot \{x\}_i^T \cdot \frac{\partial [M]}{\partial A_i} \cdot \{x\}_i \quad (3.2.5)$$

OBS.: as equações (3.2.4) e (3.2.5) são válidas para o caso de autovalores distintos.

A variação dos autovalores pode ser obtida da Equação (3.2.4), multiplicando por $\{x\}_i^T$ e considerando a Equação (3.2.3), assim;

$$\{x\}_i^T \cdot ([K] - \lambda_i \cdot [M]) \cdot \frac{\partial \{x\}_i}{\partial A_i} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial A_i} \cdot \{x\}_i^T \cdot [M] \cdot \{x\}_i = - \{x\}_i^T \cdot \frac{\partial [K]}{\partial A_i} \cdot \{x\}_i + \lambda_i \cdot \{x\}_i^T \cdot \frac{\partial [M]}{\partial A_i} \cdot \{x\}_i$$

Considerando a Equação (3.2.3) e a Equação (3.2.2),

$$\{x\}_i^T \cdot ([K] - \lambda_i \cdot [M]) \cdot \{x\}_i = 0 \Rightarrow \det ([K] - \lambda_i \cdot [M]) = 0,$$

Então temos,

$$-\frac{\partial \lambda_i}{\partial A_i} = -\{\mathbf{x}\}_i^T \cdot \frac{\partial [\mathbf{K}]}{\partial A_i} \cdot \{\mathbf{x}\}_i + \lambda_i \cdot \{\mathbf{x}\}_i^T \cdot \frac{\partial [\mathbf{M}]}{\partial A_i} \cdot \{\mathbf{x}\}_i$$

$$-\frac{\partial \lambda_i}{\partial A_i} = -\{\mathbf{x}\}_i^T \cdot \left(\frac{\partial [\mathbf{K}]}{\partial A_i} - \lambda_i \cdot \frac{\partial [\mathbf{M}]}{\partial A_i} \right) \cdot \{\mathbf{x}\}_i$$

Assim a expressão para a derivada do autovalor em função da variável de projeto, que representa a variação da frequência natural do sistema em função da variável de projeto, é dada por,

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial A_i} = \{\mathbf{x}\}_i^T \cdot \left(\frac{\partial [\mathbf{K}]}{\partial A_i} - \lambda_i \cdot \frac{\partial [\mathbf{M}]}{\partial A_i} \right) \cdot \{\mathbf{x}\}_i$$

considerando que $\lambda = \omega^2$,

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial A_i} = \frac{\{\mathbf{x}\}_i^T \cdot \left(\frac{\partial [\mathbf{K}]}{\partial A_i} - \omega_i^2 \cdot \frac{\partial [\mathbf{M}]}{\partial A_i} \right) \cdot \{\mathbf{x}\}_i}{2\omega_i} \quad (3.2.6)$$

CAPÍTULO 4

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

4.1 Modelamento Matemático

Para o modelamento matemático de uma grande estrutura espacial será suposto/considerado a seguinte situação:

- a estrutura espacial será representada por uma viga em órbita baixa da Terra. Assim a estrutura estará sujeita ao gradiente de gravidade;
- a estrutura tem dois eixos principais, onde os momentos de inércia relativos a esses eixos são maiores do que o relativo ao seu eixo longitudinal;
- a órbita é plana e circular, a 438 km de altitude da superfície da Terra;
- à estrutura é permitido o movimento no plano da órbita, ou seja, só é permitido o movimento de arfagem (movimento de “pitch”) e de vibração neste plano.

Consideremos a Figura 4.1.1, onde representamos a estrutura a ser modelada.

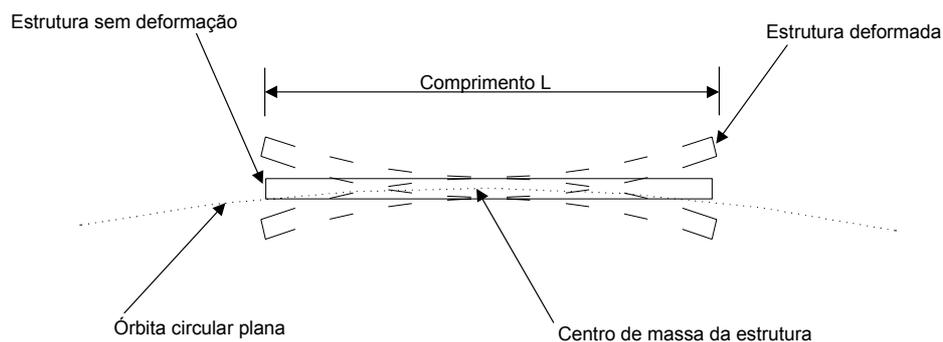


FIGURA 4.1.1 – Concepção da estrutura e sua órbita.

A dinâmica do sistema assim definido será modelada pela aplicação da formulação de elementos finitos e do Lagrangiano (Usoro, et al., 1986), (Feiyue, et al., 1993), (Kaplan, 1976), (McCuskey, 1963), (Alves Filho, 2000), (Burnett, 1988) e (Meirovitch, 1986, 1970, 1997). Será considerado para o modelamento que a estrutura tem o comprimento $L = 100$ m e que será dividida em 20 elementos, com o comprimento $l = 5$ m. Considerando então os sistemas de coordenadas orbital e o fixo no centro de massa da estrutura, conforme apresentado na Figura 4.1.2.

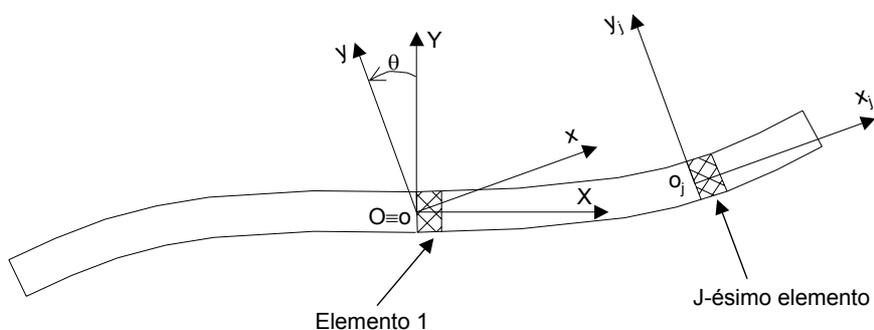


FIGURA 4.1.2 – Sistemas de coordenadas.

Para cada um dos elementos da estrutura, podemos representar os deslocamentos nodais: deslocamentos transversais e deslocamentos angulares (ou rotacionais das seções transversais), como representado na Figura 4.1.3.

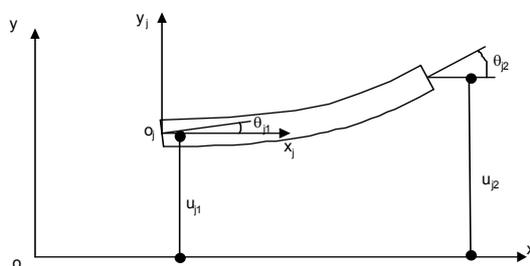


FIGURA 4.1.3 – Deslocamentos nodais no j -ésimo elemento da estrutura.

Pela abordagem adotada vamos determinar as energias cinética e potencial de cada elemento, para assim obter as energias cinética e potencial da estrutura como um todo. Em outras palavras, derivamos a energia cinética de cada elemento para obter uma matriz de massa da estrutura e da mesma forma, obtendo a energia potencial, obtemos a matriz de rigidez da estrutura. Obtemos assim, a energia cinética e potencial da estrutura como um todo. A partir daí, aplicando a Equação de Lagrange para coordenadas generalizadas, chegamos às equações do movimento da estrutura.

A energia cinética e a energia potencial da estrutura podem ser, respectivamente, expressas por:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot \{\dot{q}\}^T \cdot [M] \cdot \{\dot{q}\} \\ V &= \frac{1}{2} \cdot \{q\}^T \cdot [K] \cdot \{q\} \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Sob o ponto de vista da engenharia, as estruturas podem ser consideradas como uma montagem de elementos (elementos estruturais) interconectados em um certo número de pontos (pontos de conexão) ou nós. Se as relações de forças e deslocamentos para cada elemento forem conhecidas é possível determinar (ou estudar) as propriedades e o comportamento da estrutura como um todo.

Considerando a estrutura como um corpo “contínuo”, o número de conexões, ou nós, é infinito. Isso é um problema para uma solução numérica: a solução demandaria o conhecimento das equações diferenciais da estrutura e suas respectivas soluções, que em geral não são simples de se obter. O conceito de elementos finitos é uma tentativa de se minimizar esse problema, assumindo que o real “contínuo” possa ser dividido em elementos interconectados somente em um número finito de pontos, ou nós, onde forças fictícias atuam de

tal forma que se possam representar as tensões que atuam na borda do elemento considerado. Os requisitos dos elementos devem ser compatíveis e as forças internas devem ser balanceadas, dividindo-se entre os diversos elementos pelos nós (ou através dos nós), de tal forma que a estrutura completa possa ser vista como uma entidade única.

Assim, uma estrutura complexa é vista como uma ‘montagem’ de elementos finitos, onde cada elemento é uma parte de uma estrutura contínua.

O processo de discretização é a base do método de elementos finitos. Ele consiste no método de dividir a região, o membro, o contínuo, em subdivisões ou elementos, em um número finito de partes, em elementos finitos. Neste caso, teremos uma solução na qual consideramos a montagem dos respectivos elementos; no caso real, o membro, a estrutura é considerada contínua, representada por equações diferenciais, que resolvidas nos fornecem a solução exata para a estrutura; assim pelo método dos elementos finitos a estrutura inteira é modelada por um agregado de “estruturas” mais simples de serem resolvidas, cuja solução nos fornece uma aproximação da solução exata para a estrutura. O modo pelo qual a estrutura se comporta entre os nós do modelo, dependerá das propriedades atribuídas ao elemento escolhido, que representará a estrutura naquele trecho. Assim, uma vez conhecidos os deslocamentos e os esforços atuantes nos nós, podemos determinar o comportamento interno de cada elemento e quanto melhor especificado esse comportamento, mais a resposta do modelo se aproximará da resposta da estrutura real.

O método dos elementos finitos foi inicialmente apresentado por Turner et al., 1956, cujo trabalho teve a finalidade de apresentar um método que permitisse a diminuição no tempo de projeto de aviões.

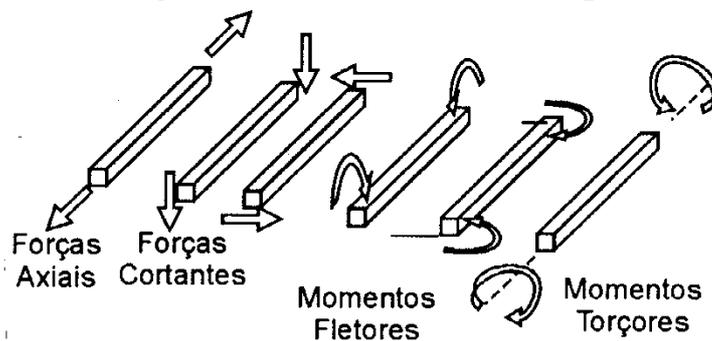


FIGURA 4.1.4 – Diagrama de corpo livre de uma barra.

FONTE: modificada de Alves Filho (2000, p.99).

Considerando a Figura 4.1.4, temos o diagrama de corpo livre de uma barra, com os diversos componentes de força que justificam o equilíbrio do elemento. No modelamento de uma viga ou uma barra, por exemplo, os elementos finitos poderiam ser vistos como nesta figura.

A concepção do modelo matemático, que representa de forma discreta a estrutura pode ser estabelecida pela aplicação de três leis da mecânica, ou relações fundamentais da mecânica:

1 – EQUILÍBRIO DE FORÇAS: considerando a condição de equilíbrio da estrutura, podemos aplicar as equações de equilíbrio a cada um dos elementos finitos isoladamente. Da mesma forma esta condição pode ser aplicada a cada elemento, se o elemento está em equilíbrio, uma parte dele também está em equilíbrio;

2 – COMPATIBILIDADE DE DESLOCAMENTOS: as extremidades dos elementos em contato com o mesmo nó estão sujeitas aos mesmos componentes dos deslocamentos;

3 – COMPORTAMENTO DO MATERIAL: os elementos se deformam ao transmitir esforços entre um nó e outro. Estes são transmitidos pelos

esforços internos no elemento. As forças internas crescem proporcionalmente às deformações. Aqui vamos considerar o contexto do REGIME ELÁSTICO, ou seja, de validade da Lei de Hooke.

A rigidez da estrutura inteira depende da rigidez de cada um de seus elementos. Assim temos que obter a matriz de rigidez da estrutura a partir da rigidez de cada um de seus elementos. Ao pensarmos em um modelo discretizado, o primeiro passo consiste em subdividir a estrutura em uma montagem de elementos, de tal forma que a rigidez do conjunto possa ser contabilizada.

Pela abordagem Lagrangiana combinada com a formulação de elementos finitos as energias cinética e potencial da estrutura como um todo podem ser obtidas pela somatória das energias cinética e potencial de cada elemento. Assim podemos escrever:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j=1}^{NE} T_j \\ V &= \sum_{j=1}^{NE} V_j \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Obs.: no modelo considerado, NE = 20 elementos.

Para o j-ésimo elemento da estrutura, a energia cinética pode ser obtida pela expressão:

$$T_j = \frac{1}{2} \int_{m_j} \{\dot{r}\}^T \cdot \{\dot{r}\} dm_j = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \cdot A_j \cdot \{\dot{r}\}^T \cdot \{\dot{r}\} dx_j \tag{4.1.3}$$

A Figura 4.1.5, ilustra o sistema de coordenadas para o j-ésimo elemento da estrutura.

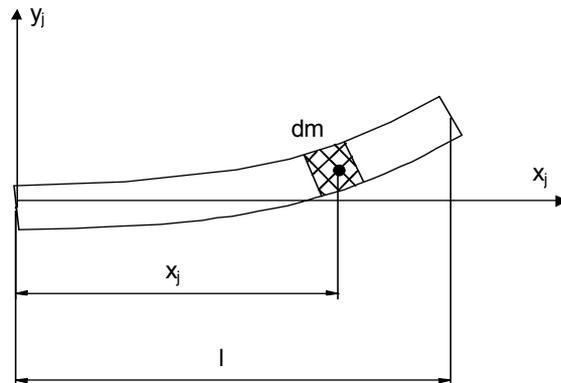


FIGURA 4.1.5 – Sistema de coordenadas – elemento de massa.

A Equação (4.1.3), representa a energia cinética de um elemento da estrutura, referenciado ao sistema de coordenadas orbital (OXY). O vetor posição $\{r\}$, neste caso é referenciado a este sistema de coordenadas. No sistema de coordenadas local (ou sistema fixo ao corpo) o vetor $\{r_j\}$ é obtido pela utilização da matriz de transformação T_o , que transforma o sistema local de coordenadas para o sistema orbital de coordenadas. Assim podemos escrever a matriz de transformação:

$$T_o = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

Podemos então escrever a seguinte expressão:

$$\{r\} = T_o \cdot \{r_j\} \quad (4.1.5)$$

Considerando a Figura 4.1.2, podemos escrever o vetor $\{r_j\}$ como:

$$\{r_j\} = \begin{bmatrix} (j-1)l + x_j \\ y_j \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, 3, \dots, \frac{NE}{2}, \text{ para o lado direito da estrutura} \quad (4.1.7)$$

$$\{f_j\} = \begin{bmatrix} -j \cdot l + x_j \\ y_j \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, 3, \dots, \frac{NE}{2}, \text{ para o lado esquerdo da estrutura} \quad (4.1.8)$$

Os deslocamentos y_j dos elementos da estrutura, ou elementos da viga, podem ser descritos pelas funções de forma, utilizando-se para isso as funções cúbicas de Hermite, ou polinômios Hermitianos (Meirovitch, 1986, 1997). Assim podemos escrever:

$$y_j(x_j, t) = L_1(x_j) \cdot u_{j1}(t) + L_2(x_j) \cdot \theta_{j1}(t) + L_3(x_j) \cdot u_{j2}(t) + L_4(x_j) \cdot \theta_{j2}(t) \quad (4.1.9)$$

Onde:

$$\begin{aligned} L_1(x_j) &= 1 - 3 \left(\frac{x_j}{l} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_j}{l} \right)^3 \\ L_2(x_j) &= \left(\frac{x_j}{l} - 2 \left(\frac{x_j}{l} \right)^2 + \left(\frac{x_j}{l} \right)^3 \right) \cdot l = x_j - 2 \cdot \frac{x_j^2}{l} + \frac{x_j^3}{l^2} \\ L_3(x_j) &= 3 \left(\frac{x_j}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{x_j}{l} \right)^3 \\ L_4(x_j) &= \left(- \left(\frac{x_j}{l} \right)^2 + \left(\frac{x_j}{l} \right)^3 \right) \cdot l = \frac{-x_j^2}{l} + \frac{x_j^3}{l^2} \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Considerando o vetor de deslocamentos definido como:

$$\{z_j\} = \left[\theta \quad u_{j1} \quad \theta_{j1} \quad u_{j2} \quad \theta_{j2} \right]^T \quad (4.1.11)$$

e sendo $\{u_j\} = \left[u_{j1} \quad \theta_{j1} \quad u_{j2} \quad \theta_{j2} \right]^T$, o vetor de deslocamentos nodais, podemos

reescrever a Equação (4.1.9), na forma: $y_j(x_j, t) = \sum L(x_j) \cdot u_j$.

O valor de $\{\dot{r}\}$, pode ser determinado por:

$$\{\dot{r}\} = \frac{\partial\{r\}}{\partial t} = \frac{\partial\{r\}}{\partial\{z_j\}} \cdot \frac{\partial\{z_j\}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\{r\}}{\partial\theta} & \frac{\partial\{r\}}{\partial u_{j1}} & \frac{\partial\{r\}}{\partial\theta_{j1}} & \frac{\partial\{r\}}{\partial u_{j2}} & \frac{\partial\{r\}}{\partial\theta_{j2}} \end{bmatrix} \cdot \{\dot{z}_j\} \quad (4.1.12)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \{\dot{r}\}^T \cdot \{\dot{r}\} &= \{\dot{z}_j\}^T \cdot \left[\frac{\partial\{\dot{r}\}}{\partial\{z_j\}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial\{r\}}{\partial\{z_j\}} \right] \cdot \{\dot{z}_j\} = \\ &= \{\dot{z}_j\}^T \cdot \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial\{r\}}{\partial\theta} \right]^T \\ \left[\frac{\partial\{r\}}{\partial u_{j1}} \right]^T \\ \vdots \\ \left[\frac{\partial\{r\}}{\partial\theta_{j2}} \right]^T \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} \frac{\partial\{r\}}{\partial\theta} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial\{r\}}{\partial u_{j1}} \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial\{r\}}{\partial\theta_{j2}} \end{bmatrix} \right] \cdot \{\dot{z}_j\} \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Considerando a Equação (4.1.3), obteremos,

$$\begin{aligned} T_j &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho \cdot A_j \cdot \{\dot{r}\}^T \cdot \{\dot{r}\} \cdot dx_j = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \cdot A_j \cdot \{\dot{z}_j\}^T \cdot \left[\frac{\partial\{\dot{r}\}}{\partial\{z_j\}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial\{r\}}{\partial\{z_j\}} \right] \cdot \{\dot{z}_j\} \cdot dx_j = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{\dot{z}_j\}^T \cdot \left[\int_0^l \rho \cdot A_j \cdot \left[\frac{\partial\{\dot{r}\}}{\partial\{z_j\}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial\{r\}}{\partial\{z_j\}} \right] \cdot dx_j \right] \cdot \{\dot{z}_j\} = \frac{1}{2} \cdot \{\dot{z}_j\}^T \cdot [M_j] \cdot \{\dot{z}_j\} \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Onde M_j é a matriz de massa do j-ésimo elemento finito da estrutura (ou viga).

Neste ponto algumas observações são importantes de serem feitas:

- . no ponto médio da estrutura, ou da viga, ou seja, na seção da estrutura que está na origem do sistema de coordenadas orbital. Será admitido que

o deslocamento transversal (devido à flexão) é nulo – a estrutura está vinculada a uma órbita em torno da Terra, porém o deslocamento angular nesta seção não é nulo;

- para cada elemento da estrutura, a sua respectiva matriz de massa (M_j) terá a dimensão 5x5, visto que são cinco os graus de liberdade conforme apontado na Equação (4.1.11).

A determinação dos elementos da matriz de massa $[M_j]$ pode ser feita como segue. Consideremos a matriz M_j , representada por:

$$[M_j] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} \end{bmatrix} \quad (4.1.15)$$

Sendo a matriz de massa simétrica, podemos escrever $M_{ab} = M_{ba}$.

Considerando as equações (4.1.4) e (4.1.5), podemos escrever, para o lado direito da estrutura (como referência a Figura 4.1.2):

$$\{f\} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j-1)l + x_j \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((j-1)l + x_j) \cos \theta - y_j \sin \theta \\ ((j-1)l + x_j) \sin \theta + y_j \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.1.16)$$

Utilizando a Equação (4.1.14), determinamos cada um dos elementos da matriz $[M_j]$, conforme a Equação (4.1.15).

Considerando os elementos do lado direito da estrutura, denominaremos a matriz correspondente de $[M_j^D]$. Assim teremos,

- elemento M_{11}^D :

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right] = \begin{bmatrix} -((j-1)l + x_j) \cdot \text{sen } \theta - y_j \cdot \text{cos } \theta \\ ((j-1)l + x_j) \cdot \text{cos } \theta - y_j \cdot \text{sen } \theta \end{bmatrix}$$

então:

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T = \left[-((j-1)l + x_j) \cdot \text{sen } \theta - y_j \cdot \text{cos } \theta \quad ((j-1)l + x_j) \cdot \text{cos } \theta - y_j \cdot \text{sen } \theta \right]$$

assim teremos,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right] &= \left[-((j-1)l + x_j) \cdot \text{sen } \theta - y_j \cdot \text{cos } \theta \right] \left[-((j-1)l + x_j) \cdot \text{sen } \theta - y_j \cdot \text{cos } \theta \right] + \\ &+ \left[((j-1)l + x_j) \cdot \text{cos } \theta - y_j \cdot \text{sen } \theta \right] \left[((j-1)l + x_j) \cdot \text{cos } \theta - y_j \cdot \text{sen } \theta \right] = \\ &= \left[(j-1)l + x_j \right]^2 \cdot [\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta] + y_j \cdot [\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta] = \\ &= \left[(j-1)l + x_j \right]^2 + y_j^2 \end{aligned}$$

Considerando que a densidade (ρ) e a área da seção transversal (A_j) do elemento considerado são constantes, podemos escrever,

$$\begin{aligned} M_{11}^D &= \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left\{ \left[(j-1)l + x_j \right]^2 + y_j^2 \right\} dx_j = \\ &= \rho \cdot A_j \left[\int_0^l \left((j-1)l \right)^2 dx_j + \int_0^l 2 \cdot (j-1)l \cdot x_j dx_j + \int_0^l x_j^2 dx_j + \int_0^l y_j^2 dx_j \right] = \\ &= \frac{\rho \cdot A_j \cdot l^3}{3} \cdot [3 \cdot j^2 - 3 \cdot j + 1] + \int_0^l \rho \cdot A_j \cdot \{u_j\}^T \cdot \{L(x_j)\}^T \cdot \{L(x_j)\} \cdot \{u_j\} dx_j \end{aligned}$$

- elemento M_{22}^D :

De maneira análoga, obtemos,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j1}\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1(x_j) \cdot \text{sen } \theta \\ L_1(x_j) \cdot \text{cos } \theta \end{bmatrix}$$

então:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j1}\}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -L_1(x_j) \cdot \text{sen } \theta & L_1(x_j) \cdot \text{cos } \theta \end{bmatrix}$$

assim teremos,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j1}\}} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j1}\}} \end{bmatrix} &= L_1^2(x_j) \cdot \text{sen}^2 \theta + L_1^2(x_j) \cdot \text{cos}^2 \theta = \\ &= 1 + 9 \cdot \frac{x_j^4}{l^4} + 4 \cdot \frac{x_j^6}{l^6} - 6 \cdot \frac{x_j^2}{l^2} + 4 \cdot \frac{x_j^3}{l^3} - 12 \cdot \frac{x_j^5}{l^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{22}^D &= \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left\{ 1 + 9 \cdot \frac{x_j^4}{l^4} + 4 \cdot \frac{x_j^6}{l^6} - 6 \cdot \frac{x_j^2}{l^2} + 4 \cdot \frac{x_j^3}{l^3} - 12 \cdot \frac{x_j^5}{l^5} \right\} dx_j = \\ &= \rho \cdot A_j \cdot \left[\int_0^l dx_j + \frac{9}{l^4} \cdot \int_0^l x_j^4 dx_j + \frac{4}{l^6} \cdot \int_0^l x_j^6 dx_j - \frac{6}{l^2} \cdot \int_0^l x_j^2 dx_j + \frac{4}{l^3} \cdot \int_0^l x_j^3 dx_j - \frac{12}{l^5} \cdot \int_0^l x_j^5 dx_j \right] = \\ &= \frac{13 \cdot \rho \cdot A_j \cdot l}{35} \end{aligned}$$

- elemento M_{33}^D :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j1}\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2(x_j) \cdot \text{sen } \theta \\ L_2(x_j) \cdot \text{cos } \theta \end{bmatrix}$$

então:

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j1}\}} \right]^T = [-L_2(x_j) \cdot \text{sen } \theta \quad L_2(x_j) \cdot \text{cos } \theta]$$

assim teremos,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j1}\}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j1}\}} \right] &= L_2^2(x_j) \cdot \{\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta\} = L_2^2(x_j) = \\ &= x_j^2 + 6 \cdot \frac{x_j^4}{l^2} + \frac{x_j^6}{l^4} - 4 \cdot \frac{x_j^3}{l} - 4 \cdot \frac{x_j^5}{l^3} \\ M_{33}^D &= \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left\{ x_j^2 + 6 \cdot \frac{x_j^4}{l^2} + \frac{x_j^6}{l^4} - 4 \cdot \frac{x_j^3}{l} - 4 \cdot \frac{x_j^5}{l^3} \right\} dx_j = \\ &= \frac{\rho \cdot A_j \cdot l^3}{105} \end{aligned}$$

- elemento M_{44}^D :

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j2}\}} \right] = \begin{bmatrix} -L_3(x_j) \cdot \text{sen } \theta \\ L_3(x_j) \cdot \text{cos } \theta \end{bmatrix}$$

então:

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j2}\}} \right]^T = [-L_3(x_j) \cdot \text{sen } \theta \quad L_3(x_j) \cdot \text{cos } \theta]$$

assim teremos,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j2}\}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j2}\}} \right] &= L_3^2(x_j) \cdot \{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta\} = L_3^2(x_j) = \\ &= 9 \cdot \frac{x_j^4}{l^4} - 12 \cdot \frac{x_j^5}{l^5} + 4 \cdot \frac{x_j^6}{l^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{44}^D &= \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left\{ 9 \cdot \frac{x_j^4}{l^4} - 12 \cdot \frac{x_j^5}{l^5} + 4 \cdot \frac{x_j^6}{l^6} \right\} dx_j = \\ &= \frac{13 \cdot \rho \cdot A_j \cdot l}{35} \end{aligned}$$

- elemento M_{55}^D :

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j2}\}} \right] = \begin{bmatrix} -L_4(x_j) \cdot \sin \theta \\ L_4(x_j) \cdot \cos \theta \end{bmatrix}$$

então:

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j2}\}} \right]^T = \left[-L_4(x_j) \cdot \sin \theta \quad L_4(x_j) \cdot \cos \theta \right]$$

assim teremos,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j2}\}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j2}\}} \right] &= L_4^2(x_j) \cdot \{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta\} = L_4^2(x_j) = \\ &= \frac{x_j^4}{l^4} - 2 \cdot \frac{x_j^5}{l^5} + \frac{x_j^6}{l^6} \end{aligned}$$

$$M_{55}^D = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left\{ \frac{x_j^4}{l^4} - 2 \cdot \frac{x_j^5}{l^5} + \frac{x_j^6}{l^6} \right\} dx_j =$$

$$= \frac{\rho \cdot A_j \cdot l}{105}$$

- elemento $M_{12}^D = M_{21}^D$:

$$M_{12}^D = M_{21}^D = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j1}\}} \right] dx_j$$

então:

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j1}\}} \right] = l \cdot j - 3 \cdot j \cdot \frac{x_j^2}{l} + 2 \cdot j \cdot \frac{x_j^3}{l^2} - l + 3 \cdot \frac{x_j^2}{l} - 2 \cdot \frac{x_j^3}{l^2} + x_j - 3 \cdot \frac{x_j^3}{l^2} + 2 \cdot \frac{x_j^4}{l^3}$$

$$M_{12}^D = M_{21}^D = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left\{ l \cdot j - 3 \cdot j \cdot \frac{x_j^2}{l} + 2 \cdot \frac{x_j^3}{l^2} - l + 3 \cdot \frac{x_j^2}{l} - 2 \cdot \frac{x_j^3}{l^2} + x_j - 3 \cdot \frac{x_j^3}{l^2} + 2 \cdot \frac{x_j^4}{l^3} \right\} dx_j =$$

$$= \rho \cdot A_j \cdot l^2 \cdot (10 \cdot j - 7)$$

- elemento $M_{13}^D = M_{31}^D$:

$$M_{13}^D = M_{31}^D = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j1}\}} \right] dx_j$$

então:

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j1}\}} \right] = l \cdot j \cdot x_j - 2 \cdot j \cdot x_j^2 + j \cdot \frac{x_j^3}{l} - l \cdot x_j + 3 \cdot x_j^2 - 3 \cdot \frac{x_j^3}{l} + \frac{x_j^4}{l^2}$$

$$M_{13}^D = M_{31}^D = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left\{ l \cdot j \cdot x_j - 2 \cdot j \cdot x_j^2 + j \cdot \frac{x_j^3}{l} - l \cdot x_j + 3 \cdot x_j^2 - 3 \cdot \frac{x_j^3}{l} + \frac{x_j^4}{l^2} \right\} dx_j =$$

$$= \frac{\rho \cdot A_j \cdot l^3}{60} \cdot (5 \cdot j - 3)$$

- elemento $M_{14}^D = M_{41}^D$:

$$M_{14}^D = M_{41}^D = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j2}\}} \right] dx_j$$

então:

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j2}\}} \right] = 3 \cdot j \cdot \frac{x_j^2}{l} - 2 \cdot j \cdot \frac{x_j^3}{l^2} - 3 \cdot \frac{x_j^2}{l} + 2 \cdot \frac{x_j^3}{l^2} + 3 \cdot \frac{x_j^3}{l^2} - 2 \cdot \frac{x_j^4}{l^3}$$

$$M_{14}^D = M_{41}^D = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left\{ 3 \cdot j \cdot \frac{x_j^2}{l} - 2 \cdot j \cdot \frac{x_j^3}{l^2} - 3 \cdot \frac{x_j^2}{l} + 5 \cdot \frac{x_j^3}{l^2} - 2 \cdot \frac{x_j^4}{l^3} \right\} dx_j =$$

$$= \frac{\rho \cdot A_j \cdot l^2}{20} \cdot (10 \cdot j - 3)$$

- elemento $M_{15}^D = M_{51}^D$:

$$M_{15}^D = M_{51}^D = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j2}\}} \right] dx_j$$

então:

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j2}\}} \right] = -j \cdot x_j^2 + j \cdot \frac{x_j^3}{l} + j \cdot x_j^2 - 2 \cdot \frac{x_j^3}{l} + \frac{x_j^4}{l^2}$$

$$M_{15}^D = M_{51}^D = \rho \cdot A_j \int_0^l \left\{ -j \cdot x_j^2 + j \cdot \frac{x_j^3}{l} + x_j^2 - 2 \cdot \frac{x_j^3}{l} + \frac{x_j^4}{l^2} \right\} dx_j =$$

$$= \frac{-\rho \cdot A_j \cdot l^3}{60} \cdot (5 \cdot j - 2)$$

- elemento $M_{23}^D = M_{32}^D$:

$$M_{23}^D = M_{32}^D = \rho \cdot A_j \int_0^l \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j1}\}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j1}\}} \right] dx_j$$

então:

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j1}\}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j1}\}} \right] = \left[1 - 3 \cdot \frac{x_j^2}{l^2} + 2 \cdot \frac{x_j^3}{l^3} \right] \cdot \left[x_j - 2 \cdot \frac{x_j^2}{l} + \frac{x_j^3}{l^2} \right]$$

$$M_{23}^D = M_{32}^D = \frac{11}{210} \cdot \rho \cdot A_j \cdot l$$

- elemento $M_{24}^D = M_{42}^D$:

$$M_{24}^D = M_{42}^D = \rho \cdot A_j \int_0^l \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j1}\}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j2}\}} \right] dx_j$$

então:

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j1}\}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j2}\}} \right] = \left[1 - 3 \cdot \frac{x_j^2}{l^2} + 2 \cdot \frac{x_j^3}{l^3} \right] \cdot \left[3 \cdot \frac{x_j^2}{l^2} - 2 \cdot \frac{x_j^3}{l^3} \right]$$

$$M_{24}^D = M_{42}^D = \frac{9}{70} \cdot \rho \cdot A_j \cdot l$$

- elemento $M_{25}^D = M_{52}^D$:

$$M_{25}^D = M_{52}^D = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j1}\}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j2}\}} \right] \cdot dx_j$$

então:

$$M_{25}^D = M_{52}^D = -\frac{13}{420} \cdot \rho \cdot A_j \cdot l$$

- elemento $M_{34}^D = M_{43}^D$:

$$M_{34}^D = M_{43}^D = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j1}\}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j2}\}} \right] \cdot dx_j$$

então:

$$M_{34}^D = M_{43}^D = \frac{13}{420} \cdot \rho \cdot A_j \cdot l$$

- elemento $M_{35}^D = M_{53}^D$:

$$M_{35}^D = M_{53}^D = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j1}\}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j2}\}} \right] \cdot dx_j$$

então:

$$M_{35}^D = M_{53}^D = -\frac{1}{140} \cdot \rho \cdot A_j \cdot l$$

- elemento $M_{45}^D = M_{54}^D$:

$$M_{45}^D = M_{54}^D = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j2}\}} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j2}\}} \end{bmatrix} \cdot dx_j$$

então:

$$M_{45}^D = M_{54}^D = -\frac{11}{210} \cdot \rho \cdot A_j \cdot l$$

Então a matriz $[M_j^D]$, relativa à parte direita da estrutura pode ser escrita como:

$$[M_j^D] = \begin{bmatrix} M_{11}^D & M_{12}^D & M_{13}^D & M_{14}^D & M_{15}^D \\ M_{21}^D & M_{22}^D & M_{23}^D & M_{24}^D & M_{25}^D \\ M_{31}^D & M_{32}^D & M_{33}^D & M_{34}^D & M_{35}^D \\ M_{41}^D & M_{42}^D & M_{43}^D & M_{44}^D & M_{45}^D \\ M_{51}^D & M_{52}^D & M_{53}^D & M_{54}^D & M_{55}^D \end{bmatrix} \quad (4.1.17)$$

Com relação a esta matriz podemos fazer as seguintes considerações:

- notamos que a primeira linha e a primeira coluna da matriz referem-se ao acoplamento do corpo rígido com relação ao sistema de coordenadas orbital;
- a submatriz $[M_{mn}]$, $m, n = 2, 3, 4, 5$, é denominada matriz de massa do elemento j ;
- a submatriz $[M_{mn}]$, $m, n = 2, 3, 4, 5$, é determinada por:

$$\int_0^l \rho \cdot A_j \cdot \{L(x_j)\}^T \cdot \{L(x_j)\} dx_j, \text{ então podemos escrever,}$$

$$\int_0^l \rho \cdot A_j \cdot \{\mathbf{L}(x_j)\}^T \cdot \{\mathbf{L}(x_j)\} dx_j = \{\mathbf{u}_j\}^T \cdot [M_{mn}] \{\mathbf{u}_j\}, \text{ sendo } \{\mathbf{u}_j\} \text{ o vetor de deslocamentos}$$

$$\text{nodais, } \{\mathbf{u}_j\} = \begin{bmatrix} u_{j1} & \theta_{j1} & u_{j2} & \theta_{j2} \end{bmatrix}^T.$$

Para o lado esquerdo da estrutura, conforme equações (4.1.8) e (4.1.9), teremos,

$$\{\mathbf{r}\} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j \cdot l + x_j \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-j \cdot l + x_j) \cdot \cos \theta - y_j \sin \theta \\ (-j \cdot l + x_j) \cdot \sin \theta + y_j \cos \theta \end{bmatrix}$$

Da mesma forma que feito para o lado direito da estrutura, podemos obter a matriz $[M_j^E]$, para o lado esquerdo da estrutura. Observa-se que a matriz de massa para o j-ésimo elemento da estrutura não se altera, assim a matriz $[M_{mn}]$ é a mesma que a obtida anteriormente.

- elemento M_{11}^E :

$$\left[\frac{\partial \{\mathbf{r}\}}{\partial \theta} \right] = \begin{bmatrix} -(-j \cdot l + x_j) \cdot \sin \theta - y_j \cdot \cos \theta \\ (-j \cdot l + x_j) \cdot \cos \theta - y_j \cdot \sin \theta \end{bmatrix}$$

então:

$$\left[\frac{\partial \{\mathbf{r}\}}{\partial \theta} \right]^T = \begin{bmatrix} -(-j \cdot l + x_j) \cdot \sin \theta - y_j \cdot \cos \theta & (-j \cdot l + x_j) \cdot \cos \theta - y_j \cdot \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial \{\mathbf{r}\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{\mathbf{r}\}}{\partial \theta} \right] = j^2 \cdot l^2 - 2 \cdot j \cdot l \cdot x_j + x_j^2 + y_j^2$$

$$\begin{aligned}
M_{11}^E &= \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right] \cdot dx_j = \\
&= \rho \cdot A_j \cdot \left[j^2 \cdot l^3 - j \cdot l^3 + \frac{l^3}{3} \right] + \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l y_j^2 \cdot dx_j = \frac{\rho \cdot A_j \cdot l^3}{3} \cdot [3 \cdot j^2 - 3 \cdot j + 1] + \{u_j\}^T \cdot [M_{mn}] \cdot \{u_j\}
\end{aligned}$$

- elemento $M_{12}^E = M_{21}^E$:

$$M_{12}^E = M_{21}^E = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j1}\}} \right] \cdot dx_j$$

então:

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j1}\}} \right] = -l \cdot j + 3 \cdot j \cdot \frac{x_j^2}{l} - 2 \cdot j \cdot \frac{x_j^3}{l^2} + x_j - 3 \cdot \frac{x_j^3}{l^2} + 2 \cdot \frac{x_j^4}{l^3}$$

$$\begin{aligned}
M_{12}^E = M_{21}^E &= \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left\{ -l \cdot j + 3 \cdot j \cdot \frac{x_j^2}{l} - 2 \cdot \frac{x_j^3}{l^2} + x_j - 3 \cdot \frac{x_j^3}{l^2} + 2 \cdot \frac{x_j^4}{l^3} \right\} \cdot dx_j = \\
&= -\frac{\rho \cdot A_j \cdot l^2}{20} \cdot (10 \cdot j - 3)
\end{aligned}$$

- elemento $M_{13}^E = M_{31}^E$:

$$M_{13}^E = M_{31}^E = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j1}\}} \right] \cdot dx_j$$

então:

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j1}\}} \right] = -l \cdot j \cdot x_j + 2 \cdot j \cdot x_j^2 - j \cdot \frac{x_j^3}{l} + x_j^2 - 2 \cdot \frac{x_j^3}{l} + \frac{x_j^4}{l^2}$$

$$\begin{aligned}
M_{13}^E = M_{31}^E &= \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left\{ -l \cdot j \cdot x_j + 2 \cdot j \cdot x_j^2 - j \cdot \frac{x_j^3}{l} + x_j^2 - 2 \cdot \frac{x_j^3}{l} + \frac{x_j^4}{l^2} \right\} dx_j = \\
&= \frac{-\rho \cdot A_j \cdot l^3}{60} \cdot (5 \cdot j - 2)
\end{aligned}$$

- elemento $M_{14}^E = M_{41}^E$:

$$M_{14}^E = M_{41}^E = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j2}\}} \right] dx_j$$

então:

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{u_{j2}\}} \right] = -3 \cdot j \cdot \frac{x_j^2}{l} + 2 \cdot j \cdot \frac{x_j^3}{l^2} + 3 \cdot \frac{x_j^3}{l^2} - 2 \cdot \frac{x_j^4}{l^3}$$

$$\begin{aligned}
M_{14}^E = M_{41}^E &= \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left\{ -3 \cdot j \cdot \frac{x_j^2}{l} + 2 \cdot j \cdot \frac{x_j^3}{l^2} + 3 \cdot \frac{x_j^3}{l^2} - 2 \cdot \frac{x_j^4}{l^3} \right\} dx_j = \\
&= \frac{-\rho \cdot A_j \cdot l^2}{20} \cdot (10 \cdot j - 7)
\end{aligned}$$

- elemento $M_{15}^E = M_{51}^E$:

$$M_{15}^E = M_{51}^E = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j2}\}} \right] dx_j$$

então:

$$\left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \theta} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \{r\}}{\partial \{\theta_{j2}\}} \right] = j \cdot x_j^2 - j \cdot \frac{x_j^3}{l} - \frac{x_j^3}{l} + \frac{x_j^4}{l^2}$$

$$M_{15}^E = M_{51}^E = \rho \cdot A_j \cdot \int_0^l \left\{ j \cdot x_j^2 - j \cdot \frac{x_j^3}{l} - \frac{x_j^3}{l} + \frac{x_j^4}{l^2} \right\} dx_j =$$

$$= \frac{\rho \cdot A_j \cdot l^3}{60} \cdot (5 \cdot j - 3)$$

Então a matriz de massa para o j-ésimo elemento do lado esquerdo da estrutura, $[M_j^E]$, pode ser escrita como:

$$[M_j^E] = \begin{bmatrix} M_{11}^E & M_{12}^E & M_{13}^E & M_{14}^E & M_{15}^E \\ M_{21}^E & M_{22}^E & M_{23}^E & M_{24}^E & M_{25}^E \\ M_{31}^E & M_{32}^E & M_{33}^E & M_{34}^E & M_{35}^E \\ M_{41}^E & M_{42}^E & M_{43}^E & M_{44}^E & M_{45}^E \\ M_{51}^E & M_{52}^E & M_{53}^E & M_{54}^E & M_{55}^E \end{bmatrix} \quad (4.1.18)$$

Valem aqui as mesmas observações feitas para a Equação (4.1.17). Para a aplicação da Equação (4.1.1), temos que obter a matriz de massa da estrutura completa, denominada de $[M]$, considerando as matrizes obtidas na equações (4.1.17) e (4.1.18).

Utilizando a metodologia disponível em Meirovitch (1986, 1997) para compor a matriz de massa da estrutura completa, podemos obtê-la utilizando a seguinte expressão:

$$[M] = \sum_{j=1}^{NE} [M_j^{D,E}] \quad (4.1.19)$$

Então podemos escrever a matriz de massa da estrutura completa como:

$$[M] = \begin{bmatrix}
M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} & M_{17} & M_{18} & \dots & M_{136} & M_{137} & M_{138} & M_{139} & M_{140} & M_{141} & M_{142} \\
& M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & M_{33} & M_{34} & M_{35} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & M_{44} & M_{45} & M_{46} & M_{47} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & M_{55} & M_{56} & M_{57} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & M_{66} & M_{67} & M_{68} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & S & & & & M_{77} & M_{78} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & I & & & & M_{88} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & M & & & & \dots & \vdots \\
& & & & & E & & & & M_{3636} & M_{3637} & M_{3638} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & T & & & M_{3737} & M_{3738} & M_{3739} & M_{3740} & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & & R & & & M_{3838} & M_{3839} & M_{3840} & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & & & I & & & M_{3939} & M_{3941} & M_{3942} & M_{3941} & M_{3942} \\
& & & & & & & & & C & & & M_{4040} & M_{4041} & M_{4042} & M_{4042} \\
& & & & & & & & & & A & & & M_{4141} & M_{4142} & M_{4142} \\
& & & & & & & & & & & & & & M_{4242} & M_{4242}
\end{bmatrix} \quad (4.1.20)$$

Onde os respectivos elementos são determinados como segue:

$$M_{11} = \sum_{j=1}^{\frac{NE}{2}} (M_{j11}^D + M_{j11}^E) = \sum_{j=1}^{10} (M_{j11}^D + M_{j11}^E) \quad M_{12} = M_{j12}^E \quad j = \frac{NE}{2} = 10$$

$$M_{13} = M_{j13}^E \quad j = \frac{NE}{2} = 10 \quad M_{14} = M_{j14}^E + M_{(j-1)12}^E \quad j = \frac{NE}{2} = 10$$

$$M_{15} = M_{j15}^E + M_{(j-1)13}^E \quad j = \frac{NE}{2} = 10 \quad M_{16} = M_{j14}^E + M_{(j-1)12}^E \quad j = 9$$

$$M_{17} = M_{j15}^E + M_{(j-1)13}^E \quad j = 9 \quad M_{18} = M_{j14}^E + M_{(j-1)12}^E \quad j = 8$$

$$M_{19} = M_{j15}^E + M_{(j-1)13}^E \quad j = 8 \quad M_{110} = M_{j14}^E + M_{(j-1)12}^E \quad j = 7$$

$$M_{111} = M_{j15}^E + M_{(j-1)13}^E \quad j = 7 \quad M_{112} = M_{j14}^E + M_{(j-1)12}^E \quad j = 6$$

$$M_{113} = M_{j15}^E + M_{(j-1)13}^E \quad j = 6 \quad M_{114} = M_{j14}^E + M_{(j-1)12}^E \quad j = 5$$

$$M_{115} = M_{j15}^E + M_{(j-1)13}^E \quad j = 5 \quad M_{116} = M_{j14}^E + M_{(j-1)12}^E \quad j = 5$$

$$M_{117} = M_{j15}^E + M_{(j-1)13}^E \quad j = 5 \quad M_{118} = M_{j14}^E + M_{(j-1)12}^E \quad j = 3$$

$$M_{119} = M_{j15}^E + M_{(j-1)13}^E \quad j = 3$$

$$M_{120} = M_{j14}^E + M_{(j-1)12}^E \quad j = 2$$

$$M_{121} = M_{j15}^E + M_{(j-1)13}^E \quad j = 2$$

$$M_{122} = M_{j15}^E + M_{j13}^D \quad j = 1$$

$$M_{123} = M_{j14}^D + M_{(j+1)12}^D \quad j = 1$$

$$M_{124} = M_{j15}^D + M_{(j+1)13}^D \quad j = 1$$

$$M_{125} = M_{j14}^D + M_{(j+1)12}^D \quad j = 2$$

$$M_{126} = M_{j15}^D + M_{(j+1)13}^D \quad j = 2$$

$$M_{127} = M_{j14}^D + M_{(j+1)12}^D \quad j = 3$$

$$M_{128} = M_{j15}^D + M_{(j+1)13}^D \quad j = 3$$

$$M_{129} = M_{j14}^D + M_{(j+1)12}^D \quad j = 4$$

$$M_{130} = M_{j15}^D + M_{(j+1)13}^D \quad j = 4$$

$$M_{131} = M_{j14}^D + M_{(j+1)12}^D \quad j = 5$$

$$M_{132} = M_{j15}^D + M_{(j+1)13}^D \quad j = 5$$

$$M_{133} = M_{j14}^D + M_{(j+1)12}^D \quad j = 6$$

$$M_{134} = M_{j15}^D + M_{(j+1)13}^D \quad j = 6$$

$$M_{135} = M_{j14}^D + M_{(j+1)12}^D \quad j = 7$$

$$M_{136} = M_{j15}^D + M_{(j+1)13}^D \quad j = 7$$

$$M_{137} = M_{j14}^D + M_{(j+1)12}^D \quad j = 8$$

$$M_{138} = M_{j15}^D + M_{(j+1)13}^D \quad j = 8$$

$$M_{139} = M_{j14}^D + M_{(j+1)12}^D \quad j = 9$$

$$M_{140} = M_{j15}^D + M_{(j+1)13}^D \quad j = 9$$

$$M_{141} = M_{j14}^D \quad j = 10$$

$$M_{142} = M_{j15}^D \quad j = 10$$

$$M_{2k} = M_{j2k}^E \quad j = 10 \quad k = 2,3$$

$$M_{2k} = 0 \quad k = 6,7,\dots,42$$

$$M_{33} = M_{j33}^E \quad j = 10$$

$$M_{3k} = 0 \quad k = 6,7,\dots,42$$

$$M_{kk} = M_{j44}^E + M_{(j-1)22}^E \quad k = 4 \quad j = 10$$

$$k = 6 \quad j = 9 \quad k = 8 \quad j = 8$$

$$k = 10 \quad j = 7 \quad k = 12 \quad j = 6$$

$$k = 14 \quad j = 5 \quad k = 16 \quad j = 4$$

$$k = 18 \quad j = 3 \quad k = 20 \quad j = 2$$

$$M_{kk} = M_{j55}^E + M_{(j-1)33}^E \quad k = 5 \quad j = 10$$

$$k = 7 \quad j = 9 \quad k = 9 \quad j = 8$$

$$k = 11 \quad j = 7 \quad k = 13 \quad j = 6$$

$$k = 15 \quad j = 5 \quad k = 17 \quad j = 4$$

$$k = 19 \quad j = 3 \quad k = 21 \quad j = 2$$

$$M_{k(k+1)} = M_{j34}^E \quad k = 4 \quad j = 10$$

$$k = 5 \quad j = 9 \quad k = 7 \quad j = 8$$

$$k = 9 \quad j = 7 \quad k = 11 \quad j = 6$$

$$k = 13 \quad j = 5 \quad k = 15 \quad j = 4$$

$$k = 17 \quad j = 3 \quad k = 19 \quad j = 2$$

$$M_{k(k+1)} = M_{j45}^E + M_{(j-1)23}^E \quad k = 4 \quad j = 10$$

$$k = 6 \quad j = 9 \quad k = 8 \quad j = 8$$

$$k = 10 \quad j = 7 \quad k = 12 \quad j = 6$$

$$k = 14 \quad j = 5 \quad k = 16 \quad j = 4$$

$$k = 20 \quad j = 2$$

$$M_{5k} = 0 \quad k = 8,9,\dots,42$$

$$M_{4k} = 0 \quad k = 8,9,\dots,42$$

$$M_{k(k+2)} = M_{j24}^E \quad k = 2 \quad j = 10$$

$$k = 4 \quad j = 9 \quad k = 6 \quad j = 8$$

$$k = 8 \quad j = 7 \quad k = 10 \quad j = 6$$

$$k = 12 \quad j = 5 \quad k = 14 \quad j = 4$$

$$k = 16 \quad j = 3 \quad k = 18 \quad j = 2$$

$$M_{k(k+2)} = M_{j35}^E \quad k = 3 \quad j = 10$$

$$k = 5 \quad j = 9 \quad k = 7 \quad j = 8$$

$$k = 9 \quad j = 7 \quad k = 11 \quad j = 6$$

$$k = 13 \quad j = 5 \quad k = 15 \quad j = 4$$

$$k = 17 \quad j = 3 \quad k = 19 \quad j = 2$$

$$M_{k(k+3)} = M_{j25}^E \quad k = 4 \quad j = 9$$

$$k = 6 \quad j = 8 \quad k = 8 \quad j = 7$$

$$k = 10 \quad j = 6 \quad k = 12 \quad j = 5$$

$$k = 14 \quad j = 4 \quad k = 16 \quad j = 3$$

$$k = 18 \quad j = 2$$

$$M_{6k} = 0 \quad k = 10, 11, \dots, 42$$

$$M_{7k} = 0 \quad k = 10, 11, \dots, 42$$

$$M_{8k} = 0 \quad k = 12, 13, \dots, 42$$

$$M_{9k} = 0 \quad k = 12, 13, \dots, 42$$

$$M_{10k} = 0 \quad k = 14, 15, \dots, 42$$

$$M_{11k} = 0 \quad k = 14, 15, \dots, 42$$

$$M_{12k} = 0 \quad k = 16, 17, \dots, 42$$

$$M_{13k} = 0 \quad k = 16, 17, \dots, 42$$

$$M_{14k} = 0 \quad k = 18, 19, \dots, 42$$

$$M_{15k} = 0 \quad k = 18, 19, \dots, 42$$

$$M_{16k} = 0 \quad k = 20, 21, \dots, 42$$

$$M_{17k} = 0 \quad k = 20, 21, \dots, 42$$

$$M_{18k} = 0 \quad k = 22, 23, \dots, 42$$

$$M_{19k} = 0 \quad k = 22, 23, \dots, 42$$

$$M_{20k} = 0 \quad k = 23, 24, \dots, 42$$

$$M_{21k} = 0 \quad k = 23, 24, \dots, 42$$

$$M_{2022} = M_{j25}^E \quad j = 1$$

$$M_{2122} = M_{j35}^E \quad j = 1$$

$$M_{2222} = M_{j55}^D + M_{j33}^D \quad j = 1$$

$$M_{22k} = 0 \quad k = 25, 26, \dots, 42$$

$$M_{kk} = M_{j44}^D + M_{(j+1)22}^D \quad k = 23 \quad j = 1$$

$$M_{kk} = M_{j55}^D + M_{(j+1)33}^D \quad k = 24 \quad j = 1$$

$$k = 25 \quad j = 2 \quad k = 27 \quad j = 3$$

$$k = 26 \quad j = 2 \quad k = 28 \quad j = 3$$

$$k = 29 \quad j = 4 \quad k = 31 \quad j = 5$$

$$k = 30 \quad j = 4 \quad k = 32 \quad j = 5$$

$$k = 33 \quad j = 6 \quad k = 35 \quad j = 7$$

$$k = 34 \quad j = 6 \quad k = 36 \quad j = 7$$

$$k = 37 \quad j = 8 \quad k = 39 \quad j = 9$$

$$k = 38 \quad j = 8 \quad k = 40 \quad j = 10$$

$$M_{k(k+1)} = M_{j34}^D \quad k = 22 \quad j = 1$$

$$k = 24 \quad j = 2 \quad k = 26 \quad j = 3$$

$$k = 28 \quad j = 4 \quad k = 30 \quad j = 5$$

$$k = 32 \quad j = 6 \quad k = 34 \quad j = 7$$

$$k = 36 \quad j = 8 \quad k = 38 \quad j = 9$$

$$k = 40 \quad j = 10$$

$$M_{k(k+1)} = M_{j45}^D + M_{(j+1)23}^D \quad k = 23 \quad j = 1$$

$$k = 25 \quad j = 2 \quad k = 27 \quad j = 3$$

$$k = 29 \quad j = 4 \quad k = 31 \quad j = 5$$

$$k = 33 \quad j = 6 \quad k = 35 \quad j = 7$$

$$k = 37 \quad j = 8 \quad k = 39 \quad j = 9$$

$$M_{k(k+2)} = M_{j35}^D \quad k = 22 \quad j = 1$$

$$k = 24 \quad j = 2 \quad k = 26 \quad j = 3$$

$$k = 28 \quad j = 4 \quad k = 30 \quad j = 5$$

$$k = 32 \quad j = 6 \quad k = 34 \quad j = 7$$

$$k = 36 \quad j = 8 \quad k = 38 \quad j = 9$$

$$k = 40 \quad j = 10$$

$$M_{k(k+2)} = M_{j24}^D \quad k = 23 \quad j = 2$$

$$k = 25 \quad j = 3 \quad k = 27 \quad j = 4$$

$$k = 29 \quad j = 5 \quad k = 31 \quad j = 6$$

$$k = 33 \quad j = 7 \quad k = 35 \quad j = 8$$

$$k = 37 \quad j = 9 \quad k = 39 \quad j = 10$$

$$M_{k(k+3)} = M_{j25}^D \quad k = 23 \quad j = 2$$

$$k = 25 \quad j = 3 \quad k = 27 \quad j = 4$$

$$k = 29 \quad j = 5 \quad k = 31 \quad j = 6$$

$$k = 33 \quad j = 7 \quad k = 35 \quad j = 8$$

$$k = 37 \quad j = 9 \quad k = 39 \quad j = 10$$

$$M_{4141} = M_{j44}^D \quad j = 10$$

$$M_{4142} = M_{j45}^D \quad j = 10$$

$$M_{4242} = M_{j55}^D \quad j = 10$$

$$M_{23k} = 0 \quad k = 27, 28, \dots, 42$$

$$M_{24k} = 0 \quad k = 27, 28, \dots, 42$$

$$M_{25k} = 0 \quad k = 29, 30, \dots, 42$$

$$M_{26k} = 0 \quad k = 29, 30, \dots, 42$$

$$M_{27k} = 0 \quad k = 31,32,\dots,42$$

$$M_{28k} = 0 \quad k = 31,32,\dots,42$$

$$M_{29k} = 0 \quad k = 33,34,\dots,42$$

$$M_{30k} = 0 \quad k = 33,34,\dots,42$$

$$M_{31k} = 0 \quad k = 35,36,\dots,42$$

$$M_{32k} = 0 \quad k = 35,36,\dots,42$$

$$M_{33k} = 0 \quad k = 37,38,\dots,42$$

$$M_{34k} = 0 \quad k = 37,38,\dots,42$$

$$M_{35k} = 0 \quad k = 39,40,\dots,42$$

$$M_{36k} = 0 \quad k = 39,40,\dots,42$$

$$M_{37k} = 0 \quad k = 41,42$$

$$M_{38k} = 0 \quad k = 41,42$$

Com a matriz de massa definida na Equação (4.1.20), podemos então determinar a energia cinética total da estrutura, utilizando a Equação (4.1.1).

A energia potencial para o sistema é obtida considerando-se a energia potencial de cada elemento agrupada de maneira semelhante ao caso da energia cinética, já ilustrado na Equação (4.1.2).

A energia potencial de cada elemento da estrutura, considerando os sistemas de coordenadas, conforme ilustrado na Figura 4.1.2, pode ser obtida pela soma de suas duas parcelas: uma devido à ação do gradiente de gravidade, e outra devido à elasticidade da estrutura. Assim, para um elemento j da estrutura, podemos escrever:

$$V_j = V_{gj} + V_{ej} \quad (4.1.21)$$

A energia potencial devido ao gradiente de gravidade é uma das causas de perturbações para as estruturas espaciais que não têm uma geometria esférica, ou seja, estruturas nas quais o centro de massa não coincide com o seu centro geométrico. Uma vez que a magnitude da ação da força

gravitacional não é igual nas diferentes partes da estrutura, binários de força aparecem, gerando assim, torques que perturbam a atitude da estrutura. Este efeito é mais significativo em órbitas baixas da Terra, objeto do presente estudo.

O efeito elucidado acima é utilizado para a estabilização passiva de estruturas espaciais, recebendo a denominação de *estabilização por gradiente de gravidade*, onde temos obrigatoriamente grandes relações entre momentos de inércia da estrutura relativos aos seus eixos principais. Nesta configuração o gradiente de gravidade “captura” a estrutura pelo seu eixo de menor momento de inércia, alinhando esse eixo com a vertical local. Então, quando necessário, é utilizado um controle ativo para amortecer as oscilações no movimento de arfagem (“pitch”), deixando-as dentro de limites aceitáveis ou faixa especificada de oscilação. Este tipo de controle ativo é utilizado quando necessitamos de alta precisão de posicionamento ou quando temos uma estrutura altamente flexível sujeita a gradiente de gravidade.

A energia potencial da estrutura pode então ser obtida pela expressão:

$$V = V_g + V_e = V_g + \frac{1}{2} \cdot \{u\}^T \cdot [k] \cdot \{u\} \quad (4.1.22)$$

Podemos ainda escrever a seguinte expressão:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \{q\}^T \cdot [K] \cdot \{q\} \quad (4.1.23)$$

onde:

[K] – é a matriz de rigidez generalizada da estrutura.

Consideremos a Figura 4.1.6, para a determinação da expressão para a energia potencial devido à ação do gradiente de gravidade.

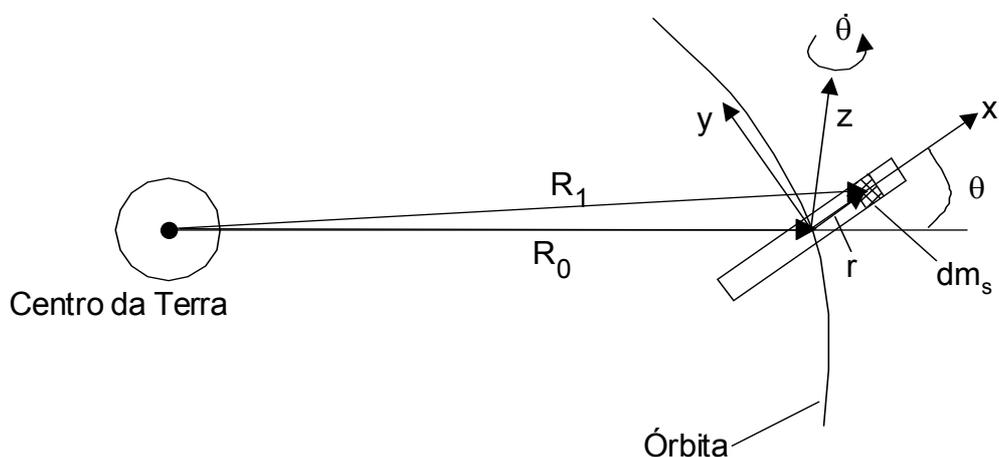


FIGURA 4.1.6 – Modelo para determinação da energia potencial.

A energia potencial devida ao gradiente de gravidade pode então ser determinada pela seguinte integral:

$$V_g = -G.m_T \cdot \int_{m_s} \frac{dm_s}{R_1} \quad (4.1.24)$$

Podemos ainda escrever,

$$R_1^2 = (\vec{R}_0 + \vec{r}) \cdot (\vec{R}_0 + \vec{r}) = R_0^2 + 2\vec{R}_0 \cdot \vec{r} + r^2, \quad R_1 = \sqrt{R_0^2 + 2\vec{R}_0 \cdot \vec{r} + r^2}$$

assim,

$$R_1^{-1} = \frac{1}{R_1} = (R_0^2 + 2\vec{R}_0 \cdot \vec{r} + r^2)^{-1/2} = R_0^{-1} \cdot \left(1 + \frac{2\vec{R}_0 \cdot \vec{r}}{R_0^2} + \frac{r^2}{R_0^2} \right)^{-1/2} \quad (4.1.25)$$

Pela geometria da estrutura, temos que $\frac{r}{R_0} \ll 1$, então podemos expandir a expressão da Equação (4.1.25) em uma série de potências, obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} = & \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_0^3} \cdot \vec{R}_0 \cdot \vec{r} + \frac{1}{2R_0^3} \cdot \left[\frac{3}{R_0^2} \cdot (\vec{R}_0 \cdot \vec{r}) - r^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R_0^4} \cdot \left[\frac{5}{R_0^3} \cdot (\vec{R}_0 \cdot \vec{r})^3 - \frac{3}{R_0} \cdot (\vec{R}_0 \cdot \vec{r}) r^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

Temos que o produto vetorial $\vec{R}_0 \cdot \vec{r}$, pode ser escrito na forma: $\vec{R}_0 \cdot \vec{r} = R_0 \cdot r \cdot \cos \theta$, assim podemos rescrever a Equação (4.1.26) na forma, como apresentada na literatura,

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R_0} \right)^n \cdot P_n \cdot \cos \theta \quad (4.1.27)$$

Onde $P_n \cdot \cos \theta$, são os Polinômios de Legendre de grau n e argumento $\cos \theta$. Considerando então os três primeiros termos da série, representados pela Equação (4.1.26), e substituindo na Equação (4.1.24), obtemos a seguinte expressão para a energia potencial devida à ação do gradiente de gravidade:

$$\begin{aligned} V_g = & -G \cdot m_T \cdot \int_{m_s} \frac{1}{R_0} \cdot dm_s - G \cdot m_T \cdot \int_{m_s} \frac{1}{R_0^3} \cdot (\vec{R}_0 \cdot \vec{r}) \cdot dm_s - G \cdot m_T \cdot \int_{m_s} \frac{1}{2R_0^3} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot (\vec{R}_0 \cdot \vec{r})^2 - r^2 \right] \cdot dm_s = \\ = & -\frac{G \cdot m_T}{R_0} \cdot \int_{m_s} dm_s - \frac{G \cdot m_T}{R_0^2} \cdot \int_{m_s} r \cdot \cos \theta \cdot dm_s - \frac{3 \cdot G \cdot m_T}{2 \cdot R_0^3} \cdot \int_{m_s} r^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot dm_s + \frac{G \cdot m_T}{2 \cdot R_0^3} \cdot \int_{m_s} r^2 \cdot dm_s \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

Interpretando membro a membro os termos da Equação (4.1.28), obteremos:

$$-\frac{G \cdot m_T}{R_0} \cdot \int_{m_s} dm_s = -\frac{G \cdot m_T \cdot m_s}{R_0} \quad (4.1.29)$$

onde m_s é a massa total da estrutura

$$-\frac{G.m_T}{R_0^2} \cdot \int_{m_s} r \cdot \cos \theta \cdot dm_s = 0 \quad (4.1.30)$$

uma vez que consideramos o centro de massa da estrutura coincidindo com a origem do sistema de referência da estrutura. A integral representa um momento de inércia de primeira ordem sobre o eixo Z.

$$-\frac{G.m_T}{R_0} \cdot \int_{m_s} r^2 \cdot dm_s = -\frac{G.m_T}{2.R_0^3} \cdot I_Z \quad (4.1.31)$$

onde I_Z é o momento de inércia da estrutura em relação ao eixo Z, conforme Figura 4.1.5.

$$-\frac{3.G.m_T}{2.R_0^3} \cdot \int_{m_s} r^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot dm_s = -\frac{3.G.m_T}{2.R_0^3} \cdot \cos^2 \theta \cdot I_Z = -\frac{3}{4} \cdot \frac{G.m_T}{R_0^3} \cdot I_Z \cdot (1 + \cos 2\theta) \quad (4.1.32)$$

Assim a expressão para a energia potencial devido ao gradiente de gravidade pode ser escrita por:

$$V_g = -\frac{G.m_T \cdot m_s}{R_0} + \frac{G.m_T}{2.R_0^3} \cdot I_Z - \frac{3}{4} \cdot \frac{G.m_T}{R_0^3} \cdot I_Z - \frac{3}{4} \cdot \frac{G.m_T}{R_0^3} \cdot I_Z \cdot \cos 2\theta$$

$$V_g = -\frac{G.m_T \cdot m_s}{R_0} - \frac{1}{4} \cdot \frac{G.m_T}{R_0^3} \cdot I_Z - \frac{3}{4} \cdot \frac{G.m_T}{R_0^3} \cdot I_Z \cdot \cos 2\theta \quad (4.1.33)$$

O termo $\frac{G.m_T \cdot m_s}{R_0}$, representa que ambos os corpos (Terra e estrutura) são tratados como partículas (ou pontos materiais), isso implica que a resultante

das forças devidas ao gradiente de gravidade passam pelos centros de massa, não resultando assim em torques. Essa expressão, portanto, não apresenta interesse em nosso estudo. Assim, a expressão para a energia potencial devida ao gradiente de gravidade, reescrevendo a Equação (4.1.28), é expressa por:

$$V_g = \frac{G.m_T}{R_0^3} . I_z . \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} . \cos 2\theta \right) = \frac{G.m_T}{R_0^3} . I_z . \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} . \text{sen}^2 \theta \right) \quad (4.1.34)$$

A energia potencial devida à elasticidade da estrutura, associada a um elemento j da estrutura, pode ser obtida pela expressão:

$$V_{ej} = \frac{1}{2} . \{u_j\}^T . [k_j] . \{u_j\} \quad (4.1.35)$$

A matriz de rigidez, k_j , é determinada como se segue. Para a estrutura, podemos definir a expressão, que expressa uma relação linear entre todas as forças e deslocamentos nodais para a estrutura inteira,

$$\{F\} = [K] . \{U\} \quad (4.1.36)$$

sendo:

$\{F\}$ – vetor dos componentes das forças nodais, aplicadas ao modelo da estrutura;

$[K]$ – matriz de rigidez da estrutura, na realidade $[K] = \sum_{i=1}^{ne} k_i$, onde k_i é a rigidez

do i -ésimo elemento e “ne” é o número de elementos finitos da estrutura;

$\{U\}$ – é o vetor das componentes dos deslocamentos nodais.

A relação entre as forças e deslocamentos no âmbito da estrutura pode ser expressa pela matriz de rigidez da estrutura. A matriz de rigidez é uma função das variáveis de projeto.

Consideremos um elemento de viga, sujeito à vibração lateral, causando a flexão da barra, consideremos um elemento, conforme mostrado na Figura 4.1.7.

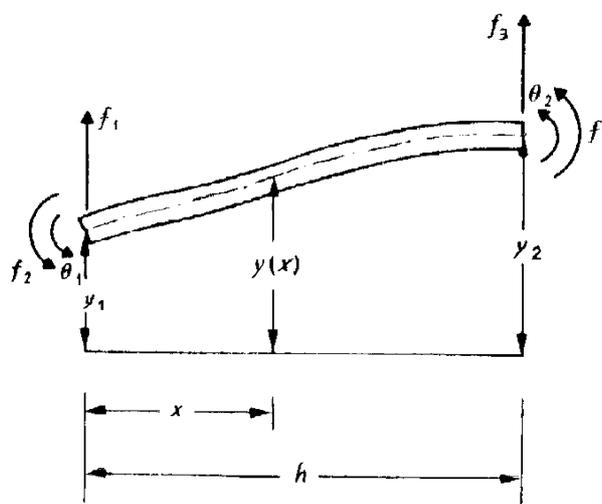


FIGURA 4.1.7 – Elemento de viga, sujeito à vibração por flexão.
FONTE: modificada de Meirovitch (1986, p. 303).

Consideremos as forças e momentos atuando sobre um elemento da viga sujeita a esta situação, conforme ilustrado na Figura 4.1.8.

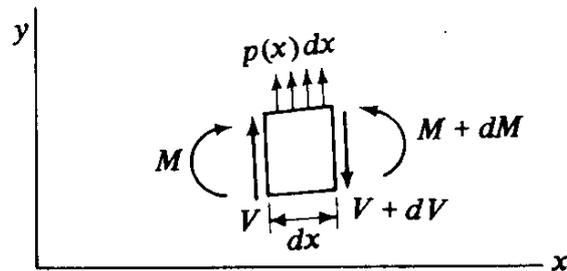


FIGURA 4.1.8 – Forças e momentos atuando num elemento de viga.

FONTE: modificada de Thomson (1973, p. 275).

Na Figura 4.1.8, V e M são os esforços de cisalhamento e os momentos fletores, devido a uma vibração lateral e $p(x)$ representa uma carga por unidade de comprimento da viga. Somando as forças na direção y , obtemos:

$$dV - p(x).dx = 0 \quad (4.1.37)$$

Somando os momentos, em relação a qualquer ponto sobre a face direita do elemento, teremos:

$$dM - V.dx = \frac{1}{2}.p(x).(dx)^2 \quad (4.1.38)$$

Das equações (4.1.37) e (4.1.38), podemos escrever,

$$\frac{dV}{dx} = p(x) \text{ e } \frac{dM}{dx} = V \quad (4.1.39)$$

De onde observamos que a taxa de variação dos esforços de cisalhamento ao longo da viga é igual à carga por unidade de comprimento, e que a taxa de

variação do momento fletor ao longo da viga é igual à força de cisalhamento. Podemos então escrever,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = p(x) \quad (4.1.40)$$

O momento de flexão M é relacionado com a curvatura da viga pela Equação;

$$M = E.I. \frac{d^2y(x)}{dx^2} \quad (4.1.41)$$

sendo:

E.I – é a rigidez a flexão da viga.

Substituindo a Equação (4.1.41) na Equação (4.1.40), obtemos;

$$\frac{d^2 \left(E.I. \frac{d^2y(x)}{dx^2} \right)}{dx^2} = p(x) \quad (4.1.42)$$

Considerando para o elemento a rigidez à flexão constante, podemos reescrever a Equação (4.1.42) na forma,

$$E.I. \frac{d^4y(x)}{dx^4} = p(x) \quad (4.1.43)$$

Para o caso representado na Figura 4.1.7, temos que a força distribuída por unidade de comprimento da viga é nula. Assim podemos reescrever a Equação (4.1.43) na forma,

$$\text{E.l. } \frac{d^4 y(x)}{dx^4} = 0 \quad 0 < x < h \quad (4.1.44)$$

Integrando a Equação (44) quatro vezes, teremos,

$$y(x) = \frac{1}{6}.c_1.x^3 + \frac{1}{2}.c_2.x^2 + c_3.x + c_4 \quad (4.1.45)$$

Onde, c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são constantes de integração. Com relação à Figura 4.1.7, podemos verificar algumas considerações feitas;

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \theta_1, \quad y(h) = y_2, \quad \frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=h} = \theta_2 \quad (4.1.46)$$

Onde y_1 e y_2 são os deslocamentos nodais e θ_1 e θ_2 são as rotações nodais, ou deslocamentos angulares nodais. Substituindo a Equação (4.1.46) na Equação (4.1.45), teremos;

$$\begin{aligned} y(0) = y_1 = c_4, \quad \frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \theta_1 = c_3, \\ y(h) = y_2 = \frac{1}{6}.c_1.h^3 + \frac{1}{2}.c_2.h^2 + c_3.h + c_4, \\ \text{e } \frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=h} = \theta_2 = \frac{1}{2}.c_1.h^2 + c_2.h + c_3 \end{aligned} \quad (4.1.47)$$

Cujas soluções para as constantes c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{6}{h^3} \cdot (2.y_1 + h.\theta_1 - 2.y_2 + h.\theta_2) \\ c_2 &= \frac{2}{h^2} \cdot (-3.y_1 - 2.h.\theta_1 + 3.y_2 - h.\theta_2) \\ c_3 &= \theta_1 \quad \text{e} \quad c_4 = y_1 \end{aligned} \quad (4.1.47)$$

Substituindo a Equação (4.1.47) na Equação (4.1.45), obtemos:

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{h^3} \cdot (2 \cdot y_1 + h \cdot \theta_1 - 2 \cdot y_2 + h \cdot \theta_2) \cdot x^3 + \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{h^2} \cdot (-3 \cdot y_1 - 2 \cdot h \cdot \theta_1 + 3 \cdot y_2 - h \cdot \theta_2) \cdot x^2 + \theta_1 \cdot x + y_1 = \\
 &= \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{x}{h} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{h} \right)^3 \right] \cdot y_1 + \left[\frac{x}{h} - 2 \cdot \left(\frac{x}{h} \right)^2 + \left(\frac{x}{h} \right)^3 \right] \cdot h \cdot \theta_1 + \\
 &+ \left[3 \cdot \left(\frac{h}{x} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{h} \right)^3 \right] \cdot y_2 + \left[- \left(\frac{x}{h} \right)^2 + \left(\frac{x}{h} \right)^3 \right] \cdot h \cdot \theta_2
 \end{aligned} \tag{4.1.48}$$

Das equações (4.1.41) e (4.1.39), considerando a rigidez a flexão constante, temos,

$$\frac{dM}{dx} = V = EI \cdot \frac{d^3 y(x)}{dx^3} \tag{4.1.49}$$

Considerando a Figura 4.1.7, a relação entre as forças e os deslocamentos nodais, pode ser descrita como:

$$EI \cdot \frac{d^3 y(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} = f_1 \quad \text{e} \quad EI \cdot \frac{d^3 y(x)}{dx^3} \Big|_{x=h} = -f_3 \tag{4.1.50}$$

Considerando a Figura 4.1.7 e a Equação (4.1.41), temos;

$$EI \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = f_2 \quad \text{e} \quad EI \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \Big|_{x=h} = f_4 \tag{4.1.51}$$

Rearranjando os valores para f_1 , f_2 , f_3 e f_4 teremos;

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{E.I}{h^3} \cdot (12.y_1 + 6.h.\theta_1 - 12.y_2 + 6.h.\theta_2) \\
f_2 &= \frac{E.I}{h^2} \cdot (6.y_1 + 4.h.\theta_1 - 6.y_2 + 2.h.\theta_2) \\
f_3 &= \frac{E.I}{h^3} \cdot (-12.y_1 - 6.h.\theta_1 + 12.y_2 - 6.h.\theta_2) \\
f_4 &= \frac{E.I}{h^2} \cdot (6.y_1 + 2.h.\theta_1 - 6.y_2 + 4.h.\theta_2)
\end{aligned} \tag{4.1.52}$$

As equações (4.1.52) podem ser reescritas na forma matricial. Assim podemos escrever,

$$\{f\} = [k]\{y\} \tag{4.1.53}$$

onde:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2/h \\ f_3 \\ f_4/h \end{Bmatrix} \quad e \quad \{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{4.1.54}$$

Respectivamente, o vetor das forças e o vetor dos deslocamentos nodais, dessa forma a matriz de rigidez do elemento pode ser escrita como;

$$[k] = \frac{E.I}{h^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6.h & -12 & 6.h \\ 6.h & 4.h^2 & -6.h & 2.h^2 \\ -12 & -6.h & 12 & -6.h \\ 6.h & 2.h^2 & -6.h & 4.h^2 \end{bmatrix} \tag{4.1.55}$$

A Equação (4.1.48), pode ser reescrita na forma,

$$y(x) = L_1(x).y_1 + L_2(x).h.\theta_1 + L_3(x).y_2 + L_4(x).h.\theta_2 \quad (4.1.56)$$

Onde:

$$\begin{aligned} L_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ L_2(x) &= \frac{x}{h} - 2\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ L_3(x) &= 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ L_4(x) &= -\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{x}{h}\right)^3 \end{aligned} \quad (4.1.57)$$

As equações (4.1.57), são denominadas de FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO, ou FUNÇÕES DE FORMA. Esse nome vem do fato que elas nos permite obter o deslocamento para qualquer posição x entre os nós considerados, ou seja, ao longo do comprimento h , ou ainda, definem o comportamento no elemento considerado. Essas funções estão representadas na Figura 4.1.9, e são denominadas de “funções cúbicas Hermite” e já foram utilizadas na formulação para determinação da matriz de massa da estrutura.

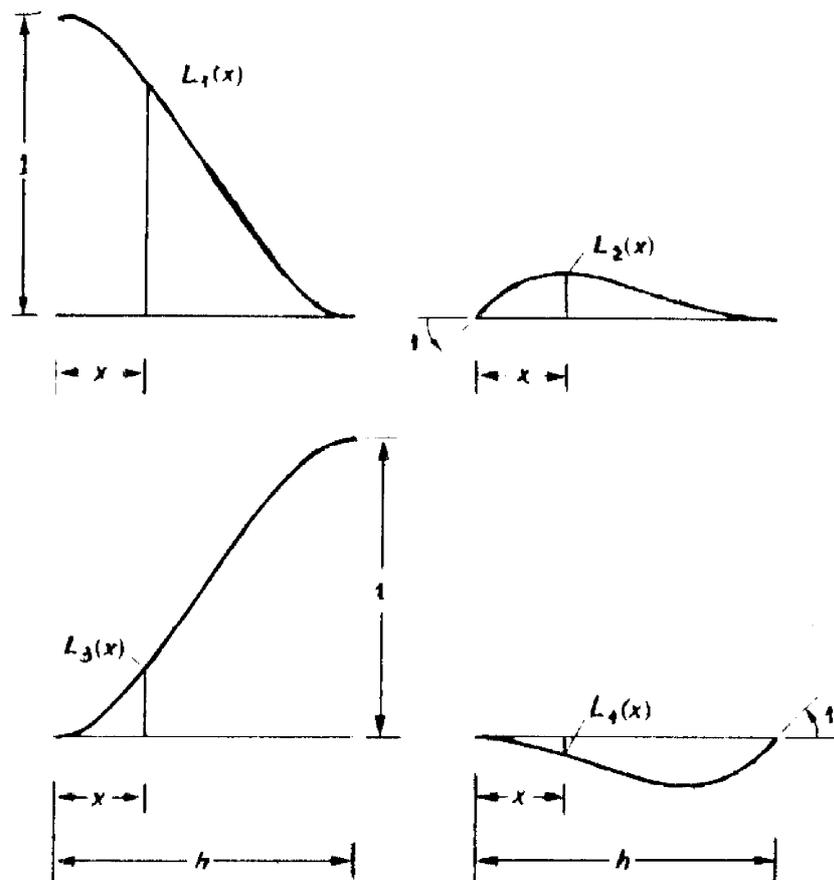


FIGURA 4.1.9 – Funções de forma - “cúbicas Hermite”.

FONTE: modificada de Meirovitch (1997, p. 306).

Reescrevendo a Equação (4.1.55) e retomando a formalização relativa à Figura 4.1.3 e a Equação (4.1.35), temos:

$$[k_J] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.1.58)$$

A matriz de rigidez generalizada da estrutura, K, pode ser expressa por:

$$[K] = \begin{bmatrix}
 K_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & K_{55} & K_{56} & K_{57} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & K_{66} & K_{67} & K_{68} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & S & & & & & K_{77} & K_{78} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & I & & & & & K_{88} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & M & & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & E & & & & & K_{3636} & K_{3637} & K_{3638} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & T & & & & & K_{3737} & K_{3738} & K_{3739} & K_{3740} & 0 & 0 \\
 & & & & & & R & & & & & K_{3838} & K_{3839} & K_{3840} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & I & & & & & K_{3939} & K_{3941} & K_{3941} & K_{3942} \\
 & & & & & & & & C & & & & & K_{4040} & K_{4041} & K_{4042} \\
 & & & & & & & & & A & & & & & K_{4141} & K_{4142} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & K_{4242}
 \end{bmatrix} \quad (4.1.59)$$

Onde os respectivos elementos são determinados como segue:

$$K_{11} = V_g$$

Lado esquerdo da estrutura

$$K_{22} = k_{j11}$$

$$K_{23} = k_{j12}$$

$$K_{33} = k_{j22}$$

$$K_{n(n+2)} = k_{j13} \quad n = 2,4,6,8,\dots,20$$

$$K_{n(n+3)} = k_{j14} \quad n = 2,4,6,8,\dots,20$$

$$K_{n(n+1)} = k_{j23} \quad n = 3,5,7,9,\dots,19$$

$$K_{n(n+2)} = k_{j24} \quad n = 3,5,7,9,\dots,19$$

$$K_{nn} = k_{j11} + k_{j33} \quad n = 4,6,8,\dots,20$$

$$K_{nn} = k_{j22} + k_{j44} \quad n = 5,7,9,\dots,21$$

$$K_{n(n+1)} = k_{j12} + k_{j34} \quad n = 4,6,8,\dots,20$$

Lado direito da estrutura

$$K_{2022} = k_{j14}$$

$$K_{2122} = k_{j24}$$

$$K_{nn} = k_{j22} + k_{j24} \quad n = 22,24,26,\dots,40$$

$$\begin{array}{llll}
K_{nn} = k_{j11} + k_{j33} & n = 23,25,27,\dots,39 & K_{n(n+1)} = k_{j23} & n = 22,24,26,\dots,40 \\
K_{n(n+2)} = k_{j24} & n = 22,24,26,\dots,40 & K_{n(n+2)} = k_{j13} & n = 23,25,27,\dots,39 \\
K_{n(n+3)} = k_{j14} & n = 23,25,27,\dots,39 & K_{4141} = k_{j33} & \\
K_{4142} = k_{j34} & & K_{4242} = k_{j44} &
\end{array}$$

Formulação de Lagrange

A função de Lagrange, ou Lagrangiano, L , é uma função do tempo, t ; das coordenadas generalizadas do sistema, q , e de todas as suas velocidades generalizadas, \dot{q} . Então, podemos escrever o Lagrangiano de uma forma compacta, como:

$$L(q, \dot{q}, t) \quad (4.1.60)$$

Assumimos que as seguintes derivadas existem

$$\frac{\partial L}{\partial q}; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \text{ e } \frac{\partial L}{\partial t} \quad (4.1.61)$$

O estado mecânico de um sistema fica completamente especificado pelas suas coordenadas e suas velocidades num determinado instante de tempo, assim o Lagrangiano define o estado mecânico do sistema, ou ainda, qualquer função na forma da Equação (4.1.60) que satisfazem as equações (4.1.61), podem ser usadas para descrever um sistema mecânico. Isso não quer dizer que uma função qualquer dessas citadas irá descrever um sistema possível de ser encontrado na natureza, mas a recíproca será verdadeira, ou seja, um pequeno número de leis, ou ainda, um pequeno número de equações como a

representada na Equação (4.1.60), podem fornecer modelos para todas as interações fundamentais observadas na natureza.

A fórmula mais geral da lei de movimento de sistemas mecânicos é dada pelo princípio da ação mínima, ou “Princípio de Hamilton”. De acordo com esse princípio, todo sistema mecânico é caracterizado por uma função como a representada na Equação (4.1.60), devendo o sistema satisfazer a seguinte condição: nos instantes t_1 e t_2 , conhecidos, o sistema ocupa as posições q_1 e q_2 , respectivamente e igualmente conhecidas. Entre esses pontos o sistema descreve uma trajetória de modo que a integral,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (4.1.62)$$

assuma o menor valor possível.

OBS.: a integral S é denominada de “ação do sistema”.

As equações diferenciais que determinam o mínimo da integral representada na Equação (4.1.62), podem ser obtidas supondo que o sistema tenha somente um grau de liberdade, por simplicidade, de tal forma que ele seja definido somente por uma função do tipo $q(t)$.

Seja então $q = q(t)$, a função para a qual a Equação (4.1.62) apresenta um mínimo (ou um extremo), isso significa que S crescerá se substituirmos $q(t)$ por uma função qualquer, onde

$$q(t) + \delta q(t) \quad (4.1.63)$$

onde $\delta q(t)$ é uma função infinitamente pequena em todo o intervalo entre os extremos t_1 e t_2 .

Por hipótese, inicialmente consideramos que nos instantes t_1 e t_2 as variações são nulas, então podemos escrever:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (4.1.64)$$

A alteração sofrida por S devido à variação $\delta q(t)$, é dada por:

$$\int_{t_1}^{t_2} (q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t), t) dt - \int_{t_1}^{t_2} (q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (4.1.65)$$

A condição necessária para que S seja mínima é que esses termos se anulem. Isso é chamado de primeira variação (ou simplesmente variação) da integral. Então o princípio da ação mínima pode ser escrito por:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (4.1.66)$$

ou efetuando a variação, obtemos;

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0 \quad (4.1.67)$$

notamos na Equação (4.1.67) que $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$, integrando o segundo membro por partes, obteremos;

$$\delta q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \quad (4.1.68)$$

Em face das condições representadas pela Equação (4.1.64), o primeiro termo da Equação (4.1.68) se anula. Assim, resta que o valor da integral deve ser nulo para qualquer valor de δq . Isso só ocorre, ou só será possível se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (4.1.69)$$

A Equação (4.1.69), representa um conjunto de equações diferenciais que determinam o mínimo da integral representada pela Equação (4.1.62) e são denominadas em mecânica de “Equações de Lagrange”.

Assim, se a função de Lagrange, ou Lagrangiano, de um sistema for conhecida, então a Equação (4.1.69) estabelecerá as relações entre as acelerações, velocidades e as coordenadas do sistema, ou ainda as equações representadas pela Equação (4.1.69) constituem as “Equações de Movimento do Sistema”.

Definindo Equação de Lagrange, como:

$$L = T - V \quad (4.1.70)$$

Podemos, então, obter a Equação do movimento do sistema, aplicando a Equação de Lagrange. O sistema modelado não considera amortecimento estrutural e/ou ação de outras forças dissipativas, assim o sistema modelado pode ser considerado um sistema conservativo. Então a Equação (4.1.69), pode ser aplicada.

Obteremos o sistema de equações não lineares, fazendo as seguintes considerações:

a) da Equação (4.1.1), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} \cdot \{\dot{q}\}^T \cdot [M] \cdot \{\dot{q}\} - \frac{1}{2} \cdot \{q\}^T \cdot [K] \cdot \{q\} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\xi) &= \{\dot{q}\}^T [M](\xi) \\
\frac{\partial L}{\partial q}(\xi) &= -\{\dot{q}\}^T \cdot [K](\xi) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left(\{\dot{q}\}^T \cdot [M] \cdot \{\dot{q}\} \right) (\xi) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) (\xi) &= \{\ddot{q}\}^T \cdot \frac{d[M]}{dt}(\xi) + \{\dot{q}\}^T \cdot [M](\xi)
\end{aligned} \tag{4.1.71}$$

Onde (ξ) representa um vetor no espaço \mathfrak{R}^n .

Escrevendo a Equação de Lagrange, obtemos:

$$\{\ddot{q}\}^T \cdot [M](\xi) + \{\dot{q}\}^T \cdot [K](\xi) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(\{\dot{q}\}^T \cdot [M] \cdot \{\dot{q}\} \right) (\xi) + \{\dot{q}\}^T \cdot \frac{d[M]}{dt}(\xi) = 0 \tag{4.1.72}$$

Fazendo a consideração de que a estrutura está em regime e em sua órbita. No decorrer do tempo, o sistema não está sujeito à variação de massa. Em uma missão temos uma fase de transição, onde geralmente manobras de grande amplitude são necessárias. Pela consideração de regime em sua órbita, entende-se a manutenção das especificações nominais de atitude e sem nenhuma grande manobra. Assumindo que a condição de equilíbrio descrita pela configuração de estabilidade por gradiente de gravidade (ou seja o eixo longitudinal da estrutura – eixo de menor momento de inércia, está alinhado, ou bastante próximo do alinhamento, com a vertical local) e pela condição elástica de não deformação, ou deformações pequenas (como uma estrutura rígida). Assim, linearizando as equações de movimento, podemos escrever o sistema linear de equações associado como:

$$[M] \cdot \{\ddot{q}\} + [K] \cdot \{q\} = 0 \tag{4.1.73}$$

4.2 - Formulação do Problema de Otimização

O problema de otimização estrutural com restrições de frequência e restrições laterais, pode ser estabelecido como: minimizar o peso de uma estrutura. A função objetivo a ser minimizada pode ser expressa por:

$$W(A) = \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot A_i \cdot l_i \quad (4.2.1)$$

sujeita às seguintes restrições:

. restrições quanto à frequência de vibração:

$$g_j(A) = \omega_j^2 - \varpi_j^2 \geq 0 \quad j = 1,2,3,\dots,k \quad (4.2.2)$$

. restrições laterais:

$$A_i^l \leq A_i \leq A_i^u \quad (4.2.3)$$

sendo:

A_i - variável de projeto, área da seção transversal;

ρ_i - densidade do material;

l_i - comprimento do elemento i da estrutura;

ω_j - j -ésima frequência natural de vibração;

ϖ_j - j -ésima frequência natural de vibração, especificada.

CAPÍTULO 5

PROCEDIMENTO DE OTIMIZAÇÃO

5.1 – Procedimento Seqüencial de Otimização

O problema considerado consiste na otimização, ou determinação do peso mínimo, de uma estrutura com restrição na sua freqüência fundamental de vibração. Para tanto, será utilizado um método seqüencial de otimização, que consiste em transformar o problema de otimização com vínculos em uma seqüência de problemas de otimização sem restrições ou vínculos.

As técnicas de programação matemática, são um tipo de procedimento usado desde a década de 60 para o cálculo de projetos de mínima massa/peso estrutural, ou para projeto de componentes estruturais sujeitos à restrições (ou vínculos), por exemplo: tensões admissíveis e/ou deslocamentos admissíveis.

A abordagem geral é a minimização da função objetivo como uma função sem vínculos, porém, aplicando penalidades quando a condição de restrição for ultrapassada, ou violada. Isso requer a solução de uma seqüência de problemas sem restrições, para assim obter um projeto ótimo. Este método é denominado de SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique). Pela relativa simplicidade, o método SUMT é a mais popular técnica de programação matemática utilizada para a solução de problemas de otimização estrutural.

Consideremos então a formulação geral do problema,

- Minimizar a função:

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (5.1.1)$$

sujeita às seguintes restrições:

. restrições quanto à frequência de vibração:

$$\begin{aligned}g_j(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \omega_j^2 - \varpi_j^2 \leq 0 & j = 1, 2, 3, \dots, n_{\text{desig}} = m \\h_j(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \omega_j^2 - \varpi_j^2 = 0 & j = 1, 2, 3, \dots, n_{\text{iguald}} = l\end{aligned}\tag{5.1.2}$$

. restrições laterais:

$$X_i^l \leq X_i \leq X_i^u\tag{5.1.3}$$

Para esse fim é definida uma função composta, que considera a função objetivo e seus vínculos, ou seja, é definida uma função pseudo-objetivo, que tem a seguinte forma:

$$\phi(X, r_p) = F(X) + r_p \cdot P(X)\tag{5.1.4}$$

onde:

$P(X)$ - é uma função de penalidades, imposta, que considera os vínculos do problema;

r_p - é um escalar que determina a magnitude da função de penalidade.

Para introdução dos vínculos do projeto, é criada uma função pseudo-objetivo com uma função de penalidade. Essa função de penalidade, tem a função de considerar o vínculo, de tal forma a não permitir (ou permitir, porém, desde que esta violação esteja dentro de uma determinada tolerância) a violação do vínculo. O método SUMT transforma um problema de otimização com vínculos em um problema de otimização sem vínculos. No procedimento padrão, o projeto inicia dentro de uma região viável, ou aceitável, ou possível para o projeto. Como será abordado a seguir, para preservar a continuidade da segunda derivada e permitir que o projeto possa iniciar fora da região viável (e

convergir para ela ao longo do processo) uma função quadrática de penalidade é criada e incorporada à função pseudo-objetivo.

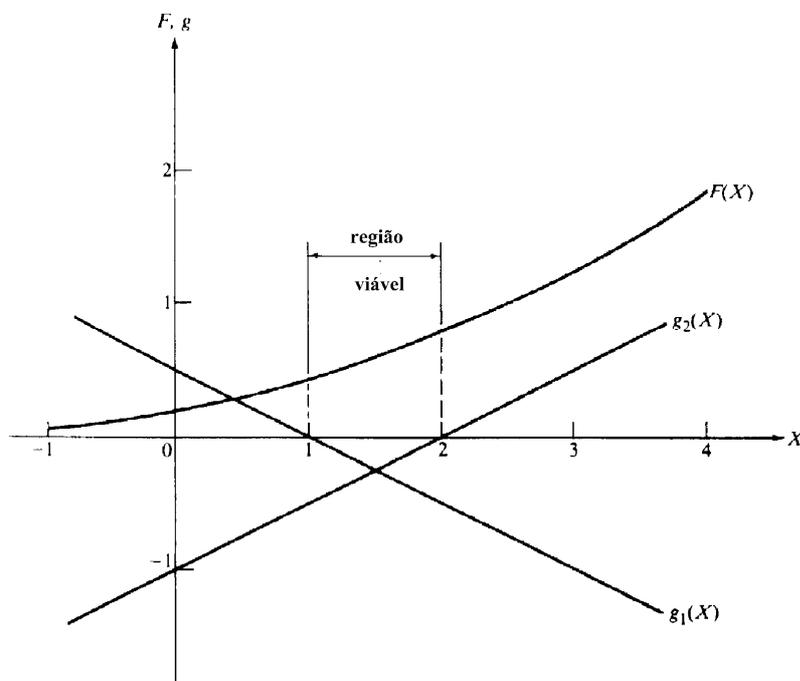


FIGURA 5.1.1 – Representação da região viável.

FONTE: modificada de Vanderplaats (1984, p.124).

A Figura 5.1.1 ilustra a metodologia, onde temos a função sendo minimizada dentro de um intervalo, ou de uma região viável para o projeto.

O algoritmo utilizado é o denominado NEWSUMT-A. Foi escolhido por incorporar a metodologia SUMT e por ser amplamente utilizado para a solução de problemas de otimização estrutural.

Este algoritmo encontra-se no Departamento de Mecânica e Controle do INPE – DMC. Khot et al., 1987, apresenta uma comparação entre resultados obtidos pela utilização de diferentes tipos de algoritmos de otimização para o projeto de estruturas com relação à obtenção da massa/peso estrutural mínimo. De

acordo com suas conclusões o método NEWSUMT-A apresenta a mínima massa/peso estrutural com o menor número de análises, uma vez comparado com os algoritmos IDESIGN e VMCON, que promoveram algumas pequenas alterações na função objetivo durante as interações e que necessitaram de um número maior de análises.

Este método também foi utilizado por Fonseca, 1988, conduzindo a resultados satisfatórios para a obtenção de uma estrutura de mínima massa/peso estrutural.

O texto anterior justifica a escolha do NEWSUMT-A, e uma breve explicação sobre as características do método é apresentada a seguir, para que o pacote de software utilizado seja entendido.

5.1.1 – Método das Penalidades

O método das penalidades consiste em uma metodologia para evitar a violação das restrições. Uma penalidade é aplicada à função pseudo-objetivo toda vez que a restrição for violada.

Três abordagens tradicionais caracterizam a abordagem do método seqüencial de minimização (Sequential Unconstrained Minimization Technique – SUMT):

- . Método da Função de Penalidade Exterior: a terminologia de penalidade exterior, refere-se ao fato de que a penalização ocorre exterior à região viável;

- . Método da Função de Penalidade Interior: este método penaliza a função objetivo ao longo do processo, toda vez que esta se aproxima do vínculo, ou seja, mantém o projeto dentro da região viável;

- . Método da Função Estendida de Penalidade Interior: este método combina as características dos métodos da função de penalidade interior e exterior, de forma a contrabalançar suas limitações.

5.1.1.1 - Método da Função de Penalidade Exterior

Neste método a função de penalidade é tipicamente definida como:

$$P(x) = \sum_{j=1}^m \{\max[0, g_j(X)]\}^2 + \sum_{k=1}^l [h_k(X)]^2 \quad (5.1.1.1.1)$$

A Equação (5.1.1.1.1), mostra que não existe penalidade imposta se todas as restrições/vínculos são satisfeitos, ou não são violados, ou seja, todos $g_j(X) \leq 0$ e todos $h_k(X) = 0$. Mas quando um ou mais vínculos são violados, o quadrado desse vínculo é incluído na função de penalidade.

A razão da violação do vínculo é elevada ao quadrado, é assim proporcionado uma variação do vínculo de zero até a borda da restrição. Entretanto a segunda derivada não é contínua sobre a borda da restrição; sendo este, um método de segunda ordem utilizado para minimização, é uma possível fonte de um problema mal condicionado.

Relativamente ao multiplicador escalar r_p , se escolhermos um valor pequeno para ele, a resultante função $\phi(X, r_p)$ é facilmente minimizada, mas pode ter uma maior violação das restrições. Por outro lado, se o valor for grande, teremos uma aparente satisfação das condições de vínculo, mas será criado um pobre problema de otimização condicionado pelo ponto de vista numérico. Entretanto, usualmente inicia-se o processo com um valor pequeno de r_p , e assim minimiza-se a função $\phi(X, r_p)$. Então se aumenta o valor de r_p , por um fator γ , e $\phi(X, r_p)$ é minimizada novamente. Assim, sucessivamente, cada minimização inicia-se com os valores obtidos no processo anterior até a obtenção de valores satisfatórios.

Um algoritmo geral de otimização para este método é apresentado na Figura 5.1.1.1.1. Neste exemplo o critério de convergência baseia-se em que a função

original $F(X)$ não varia significativamente durante a minimização sem vínculos e tem-se $g_j(X) \leq 0$ e $h_k(X) = 0$ com uma tolerância especificada, para todos j e k .

Como estamos inicialmente tratando de um problema sem vínculos, a convergência para este subproblema pode ser totalmente perdida no início e ser mais rigorosa para as sub-otimizações subsequentes. Isso vai prover uma melhoria considerável na eficiência do método, sem no entanto, afetar sua realizabilidade.

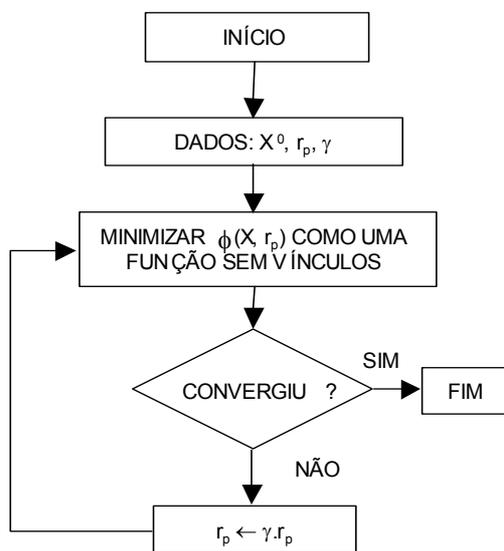


FIGURA 5.1.1.1.1 – Algoritmo para o método da função de penalidade exterior.
 FONTE: modificada de Vanderplaats (1984, p.130).

A Figura 5.1.1.1.2, representa a função de penalidade exterior, variando conforme a penalidade imposta ao problema. Podemos observar que, para um valor grande de r_p , temos a função pseudo-objetivo se “movendo” próximo à região viável para o projeto. Entretanto, a curvatura da função pseudo-objetivo, aumenta próximo do mínimo. Os altos valores dessa curvatura, com os altos valores de r_p resultam em dificuldades numéricas; com o aumento de r_p a função pseudo-objetivo torna-se cada vez mais não linear, fazendo com que o

problema de minimização seja mais difícil, trazendo a possibilidade de um “overflow” computacional. Uma forma de contrabalançar este problema é usar uma seqüência de valores de r_p , considerando seu valor mínimo como ponto de partida, ou valor inicial, e a partir daí, aumentando-o.

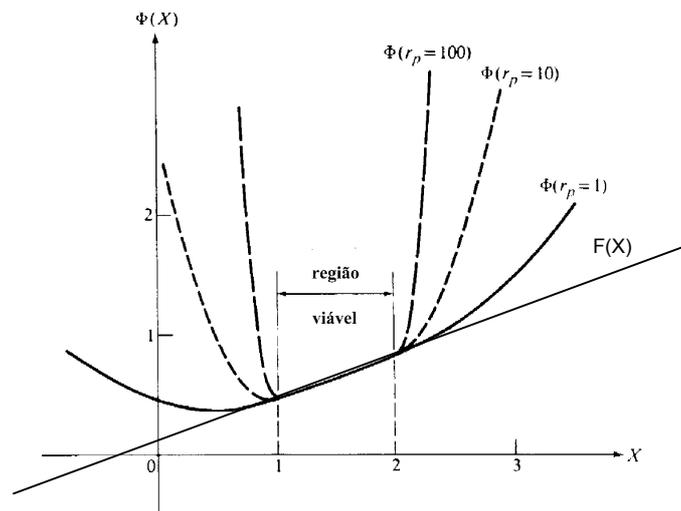


FIGURA 5.1.1.1.2 – Função de penalidade exterior.

FONTE: modificada de Vanderplaats (1984, p.125).

5.1.1.2 - Método da Função de Penalidade Interior

Uma das desvantagens do método da função de penalidade exterior é o fato de que o projeto move-se externamente à região do domínio viável; e a minimização ocorre para valores de r_p grandes.

A diferença está na forma como a função de penalidade é aplicada aos vínculos de desigualdade e o parâmetro de penalidade é decrementado ao invés de aumentado durante o processo de otimização.

A Figura 5.1.1.2.1 mostra a função de penalidade interior. Notamos que a penalidade interior mantém o projeto dentro da região viável de projeto, com o decremento da penalidade r_p .

Provavelmente a função de penalidade mais comum neste método é:

$$P(X) = \sum_{j=1}^m \frac{-1}{g_j(X)} \quad (5.1.1.2.1)$$

Usando a Equação (5.1.1.2.1) e incluindo os vínculos de igualdade via a função de penalidade da Equação (5.1.1.1.1), teremos,

$$\phi(X, r'_p, r_p) = F(X) + r'_p \cdot \sum_{j=1}^m \frac{-1}{g_j(X)} + r_p \cdot \sum_{k=1}^l [h_k(X)]^2 \quad (5.1.1.2.2)$$

O último termo da Equação (5.1.1.2.2) é a função de penalidade exterior, conforme definido anteriormente, porque desejamos direcionar $h_k(X)$ para zero. Da mesma forma r_p e $F(X)$ tem as mesmas definições anteriores.

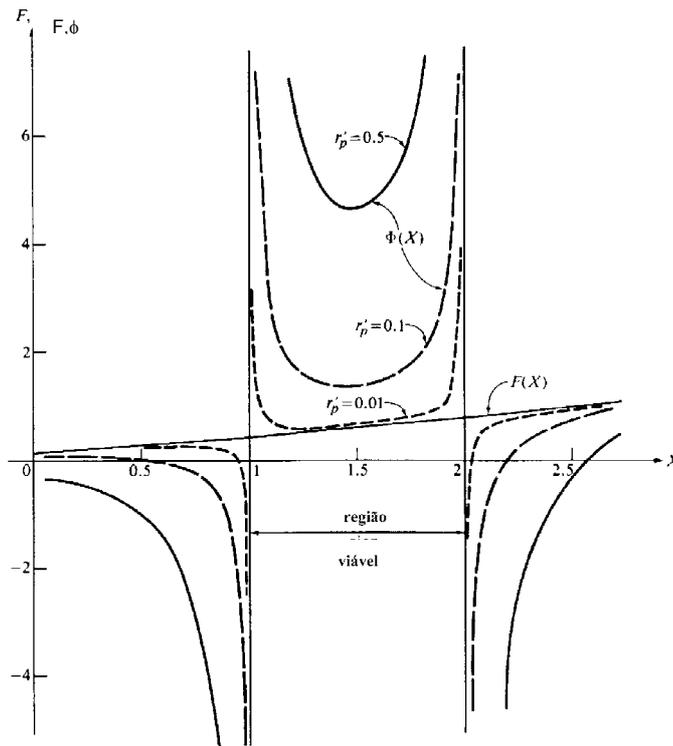


FIGURA 5.1.1.2.1 - Função de penalidade interior.

FONTE: modificada de Vanderplaats (1984, p.131).

O segundo termo do lado direito da Equação (5.1.1.2.2) é a diferença entre as abordagens das funções de penalidades exterior e interior. Nota-se que $g_j(X)$ deve ser negativo para que seja viável, $-1/g_j(X)$ será positivo e tendendo a infinito quando $g_j(X)$ tender a zero. O parâmetro de penalidade r'_p é usado para distinguir isso, porque r'_p inicia no processo com valores positivos grandes que depois diminuem, enquanto que r_p inicia no processo com valores pequenos que depois aumentam. Neste caso r'_p é multiplicado por um valor γ' após cada passo do processo de minimização sem vínculos, onde γ' é um valor menor que 1.

O algoritmo deste método é representado na Figura 5.1.1.2.2, onde a função pseudo-objetivo é definida como na Equação (5.1.1.2.2).

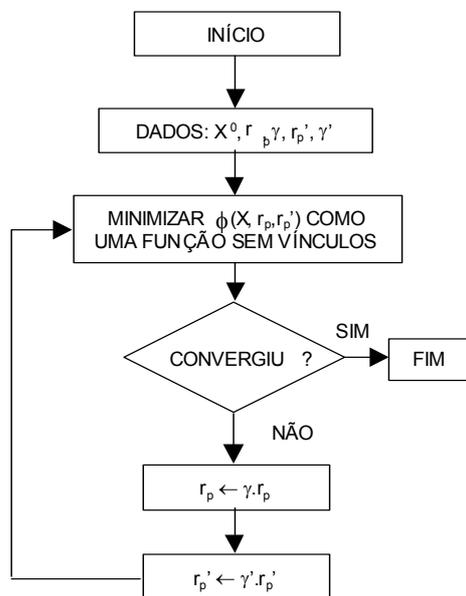


FIGURA 5.1.1.2.2 – Algoritmo do método da função de penalidade interior.

FONTE: modificada de Vanderplaats (1984, p.130).

5.1.1.3 - Método da Função Estendida de Penalidade Interior

Este método combina as características dos métodos das penalidades exterior e interior. Este método é utilizado no algoritmo NEWSUMT-A.

O método da função estendida de penalidade interior permite um processo de otimização que eventualmente se inicia fora da região viável de projeto. Existem duas definições para a função estendida de penalidade interior:

- a função estendida linear de penalidade interior;
- a função estendida quadrática de penalidade interior.

A função estendida linear de penalidade interior apresenta derivadas segundas descontínuas nos pontos de transição entre as regiões viáveis e não viáveis de projeto.

A expressão da função estendida linear de penalidade interior, a ser usada na Equação (5.1.4), pode ser escrita como:

$$P(X) = \sum_{j=1}^m \tilde{g}_j(X) \quad (5.1.1.3.1)$$

onde:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_j(X) &= \frac{-1}{g_j(X)} && \text{se } g_j(X) \leq \varepsilon && \text{(a)} \\ \tilde{g}_j(X) &= -\frac{2\varepsilon - \tilde{g}_j(X)}{\varepsilon^2} && \text{se } g_j(X) > \varepsilon && \text{(b)} \end{aligned} \quad (5.1.1.3.2)$$

O parâmetro ε é um número pequeno e negativo, que marca a transição entre a penalidade interior dada pela expressão (5.1.1.3.2 (a)) e a penalidade estendida dada pela Equação (5.1.1.3.2 (b)).

Se a seqüência de melhoramentos do projeto viável está sendo produzida, é necessário escolher ε de tal forma que a função $\phi(X, r_p')$ tenha uma variação positiva na borda do vínculo. Recomenda-se que a escolha de ε seja definida por:

$$\varepsilon = -C.(r_p')^a \quad \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{2} \quad (5.1.1.3.3)$$

Onde C é uma constante.

O valor inicial de r_p' é tal que, ambos os termos do lado direito da Equação (5.1.4) sejam iguais, isto define o valor de C para ser utilizado na Equação (5.1.1.3.3) e ε é mantido constante durante a otimização sem vínculo. Devido a esta definição, ε pode ser utilizado também, com a função de penalidade quadrática.

A Equação (5.1.1.3.3) proporciona as características desejadas para a manutenção do mínimo da função sem vínculo dentro da região viável. A Figura 5.1.1.3.1, ilustra o algoritmo do método de penalidade estendida.

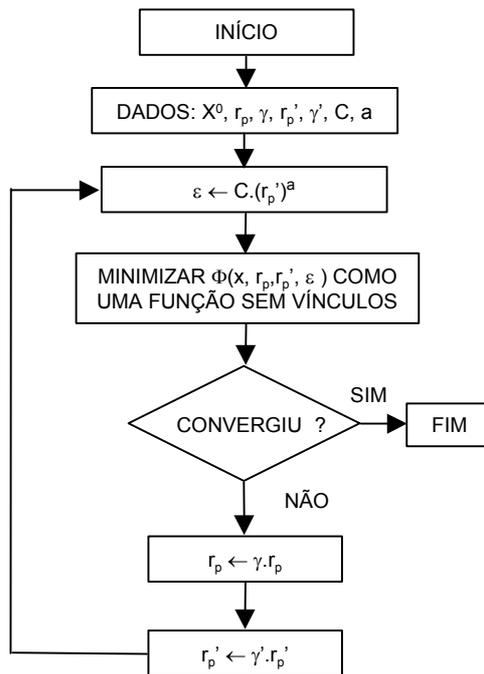


FIGURA 5.1.1.3.1 – Algoritmo para o método da penalidade interior estendida.

FONTE: modificada de Vanderplaats (1984, p.133).

A função estendida linear de penalidade estendida, é uma função contínua e apresenta a primeira derivada contínua em $g_j(X) = \epsilon$. Entretanto, a segunda derivada não é contínua. Assim, se utilizarmos um método de segunda ordem para uma minimização sem vínculos poderemos ter alguns problemas numéricos.

A definição de uma função estendida de penalidade quadrática visa a eliminação desse inconveniente. A expressão da função estendida quadrática de penalidade interior, a ser usada na Equação (5.1.4), pode ser escrita como:

$$\tilde{g}_j = \frac{-1}{g_j(X)} \quad \text{se } g_j(X) \leq \epsilon \quad (a)$$

$$\tilde{g}_j(X) = \frac{-1}{\epsilon} \left\{ \left[\frac{g_j(X)}{\epsilon} \right]^2 - 3 \left[\frac{g_j(X)}{\epsilon} \right] + 3 \right\} \quad \text{se } g_j(X) > \epsilon \quad (b) \quad (5.1.1.3.4)$$

As equações (5.1.1.3.4) podem ser muito úteis se um método de segunda ordem é utilizado para minimização sem vínculo. Entretanto o preço pago para essa continuidade de segunda ordem é que o grau de não linearidade da função pseudo-objetivo é aumentado.

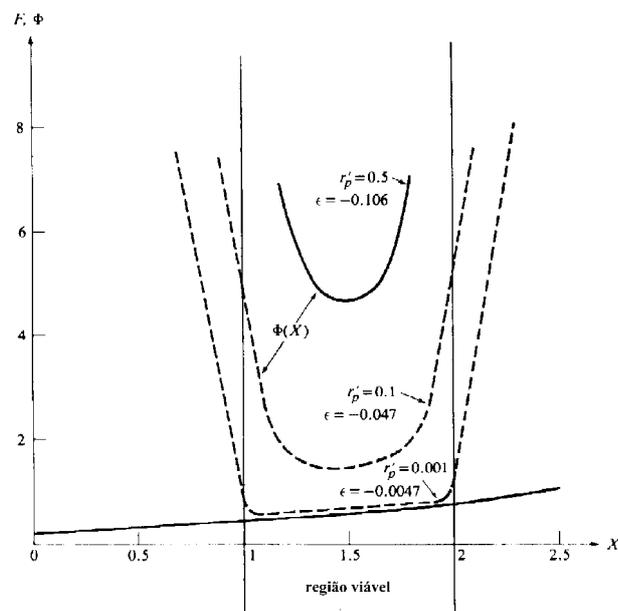


FIGURA 5.1.1.3.2 – Função de penalidade interior estendida.

FONTE: modificada de Vanderplaats (1984, p.134).

Quando a função estendida de penalidade é incorporada a um programa de otimização, temos uma gama de opções e uma grande classe de problemas são assim resolvidos.

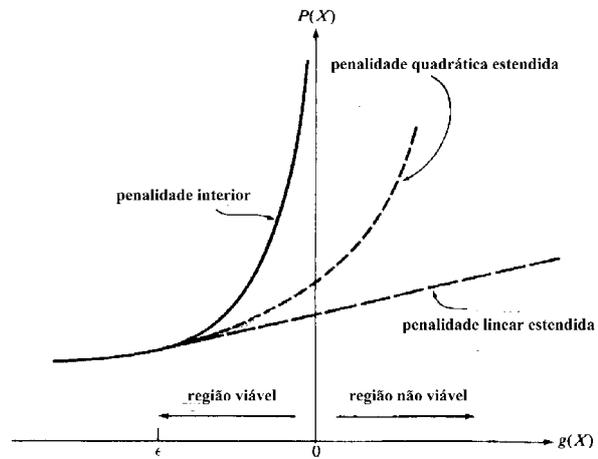


FIGURA 5.1.1.3.3 – Comparação qualitativa entre as funções de penalidade.

FONTE: modificada de Vanderplaats (1984, p. 136).

5.1.2 – Método da Seção Áurea

O método da seção áurea é uma técnica para estimar o máximo, ou mínimo ou zero de uma função de uma variável. Os algoritmos de otimização requerem um valor inicial, ou um conjunto de valores que definem o vetor inicial de variáveis de projeto. Assim, iniciando por este ponto o procedimento iterativo passo a passo modifica o projeto até obter o projeto ótimo. A forma mais comum de procedimento iterativo é dada por:

$$X_i = X_{i-1} + \alpha^* \cdot S_i \quad (5.1.2.1.)$$

sendo;

i – o coeficiente, ou número de interações

S_i – o vetor da direção de procura

α^* - é um escalar que define o peso de quanto o vetor se movimenta na direção de procura.

Uma vez que temos o vetor inicial X , a função objetivo (e a função pseudo-objetivo) ficam uma função do parâmetro α .

A Figura 5.1.2.1, mostra como o método funciona. Suponhamos que desejamos obter o mínimo da função $F=F(X)$. Consideremos ainda, que os limites superior (X_U) e inferior (X_L), são dados; isso significa que temos um intervalo definido por $X_U - X_L$. Conhecendo os limites, podemos calcular a função F nestes pontos, obtendo assim F_U e F_L . Considerando dois pontos X_1 e X_2 , tais que $X_1 < X_2$, é possível determinar os valores de $F(X)$ nestes pontos. Assumindo que a função é unimodal, segue que X_1 ou X_2 vão formar um novo limite mínimo. Neste caso F_1 é maior que F_2 , então X_1 forma um novo limite, e agora um novo intervalo é considerado, ou seja, X_1 e X_U . Sendo F_2 bem maior que F_1 fica claro que X_2 irá formar um novo limite sendo, X_2 e X_U . Neste exemplo, X_1 forma um novo limite inferior. Consideremos um novo ponto, X_3 ,

para o qual obtemos F_3 . Comparando F_2 com F_3 , notamos que F_3 é maior, então X_3 toma o lugar do limite superior X_U . Repetindo esse processo, determinamos um intervalo tão pequeno quanto permitido pela tolerância especificada.

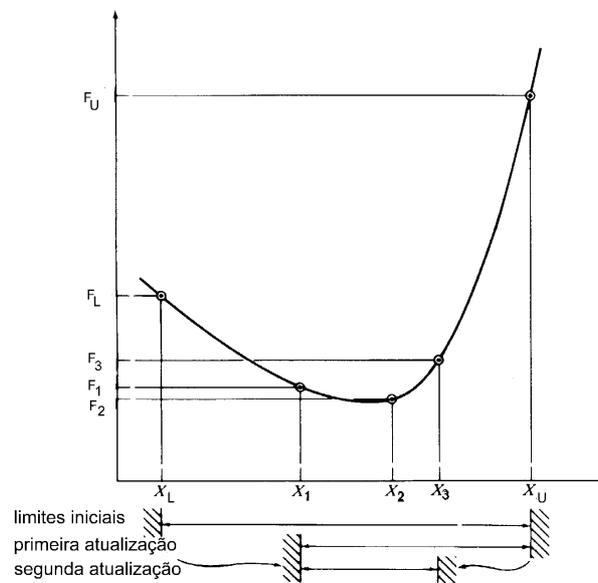


FIGURA 5.1.2.1 – Método da seção áurea.

FONTE: modificada de Vanderplaats (1984, p. 42).

Para determinação de um método para a escolha dos pontos interiores, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, para reduzir o intervalo o mais rapidamente possível podemos utilizar o seguinte processo. Após cada escolha de X_L, X_U e X_1 , é necessário uma função de avaliação do processo de iteração. Observando que X_1 será o novo limite inferior, ou X_2 será o novo limite superior, consideramos esses valores simétricos com relação ao centro do intervalo inicial, assim temos:

$$X_U - X_2 = X_1 - X_L \quad (5.1.2.2)$$

Tomando X_1 e X_2 , a seguinte relação pode ser escrita:

$$\frac{X_1 - X_L}{X_U - X_L} = \frac{X_2 - X_1}{X_U - X_1} \quad (5.1.2.3)$$

Por exemplo, se X_1 for o novo limite inferior, X_L , assim X_2 será o novo X_1 de tal forma que a relação entre $X_2 - X_1$ com o intervalo total $X_U - X_L$ permanecerá a mesma. Por conveniência, consideremos $X_L = 0$, e $X_U = 1$. Os valores de X_1 e X_2 serão, frações pertencentes ao intervalo de $[X_L, X_U]$. Observamos que, $X_2 = 1 - X_1$, e a Equação (5.1.2.3), pode ser escrita como:

$$X_1 = \frac{1 - 2.X_1}{1 - X_1} \quad (5.1.2.4)$$

ou simplificando, podemos escrever:

$$X_1^2 - 3.X_1 + 1 = 0 \quad (5.1.2.5)$$

A Equação (5.1.2.5), tem duas raízes:

$$X_1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = 0,38197 \text{ ou } 2,61803 \quad (5.1.2.6)$$

Ignorando a segunda raiz, pois, não apresenta sentido, é maior que o limite superior adotado. Recalculando $X_2 = 1 - X_1$, obteremos:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,38197 \\ X_2 &= 1 - X_1 = 0,61803 \end{aligned} \quad (5.1.2.7)$$

Tomando a relação dessa solução teremos:

$$\frac{X_2}{X_1} = 1,61803 \quad (5.1.2.8)$$

Esta relação é a denominada *seção áurea*, que tem as seguintes características:

$$\frac{X_1}{X_2} = 0,61803 = X_2 = \frac{X_2}{X_1} - 1 \quad \text{e} \quad X_1 = X_2^2 \quad (5.1.2.9)$$

5.1.3 – Pacote NEWSUMT-A

Para a simulação do modelo descrito e a obtenção da estrutura de peso otimizado foi utilizado o pacote de software denominado de NEWSUMT-A, desenvolvido por Rajive Thareja e Raphael T. Haftka, no Virginia Tech, Blacksburg, Virginia, EUA. Este pacote utiliza a otimização seqüencial conforme descrita anteriormente.

O NEWSUMT-A é uma rotina escrita em subrotinas FORTRAN, para a solução de problemas de minimização com restrições lineares e não lineares. O programa tem a capacidade de considerar aproximações nas restrições, de calcular derivadas via diferenças finitas e usar a estratégia de movimentação dos limites para prevenir grandes distorções no procedimento de otimização. Para utilização deste programa, a formulação considerada para o problema tem a seguinte forma:

Minimizar a função,

$$W(A) = \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot A_i \cdot I_i \quad (5.1.3.1)$$

sujeita às seguintes restrições:

restrições quanto à freqüência de vibração:

$$g_j(A) = \omega_j^2 - \bar{\omega}_j^2 \geq 0 \quad j = 1,2,3,\dots,k \quad (5.1.3.2)$$

restrições laterais:

$$A_i^l \leq A_i \leq A_i^u \quad (5.1.3.3)$$

Podemos então, reescrever a Equação (5.1.4) na seguinte forma:

$$\phi(A, r_p) = W(A) + r_p \cdot [\sum_{j=1}^m p(g_j) + \sum_{i=1}^n (p(A_i - A_i^L) + p(A_i^U - A_i))] \quad (5.1.3.4)$$

sendo,

n - número de vínculos de freqüência

m – o número de variáveis de projeto

O diagrama representado na Figura 5.1.3.1, representa o fluxo de dados do programa utilizado.

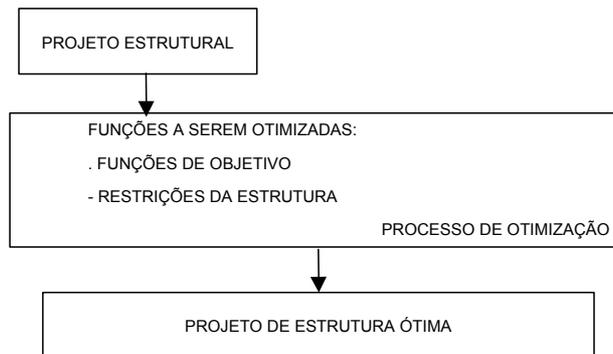


FIGURA 5.1.3.1 – Diagrama de fluxo de dados do programa de otimização.

Um projeto estrutural, ou variáveis de projeto, são inicialmente fornecidos ao programa de otimização. O programa de otimização trabalha com a função pseudo-objetivo, fornecendo valores para o projeto estrutural ótimo.

O método utilizado é o denominado “Método da Função Estendida de Penalidade Interior”, no qual a função pseudo-objetivo, $\phi(X, r_p)$, é minimizada com respeito à variável de projeto, A, por uma seqüência decrescente de valores de r_p .

A organização do programa utilizado é representado na Figura 5.1.3.2.

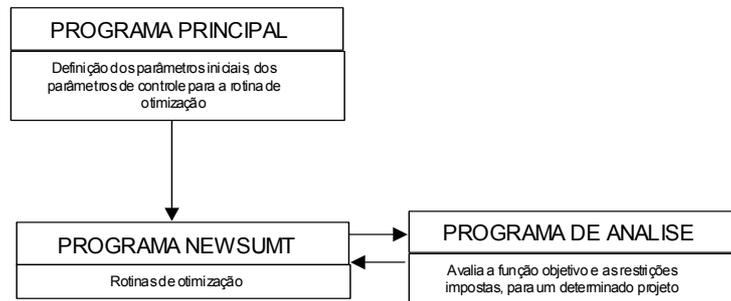


FIGURA 5.1.3.2 – Organização do programa utilizado.

Os parâmetros iniciais são fornecidos para o programa de otimização que, a cada fase, usa os valores atuais das variáveis de projeto, computando a função pseudo-objetivo.

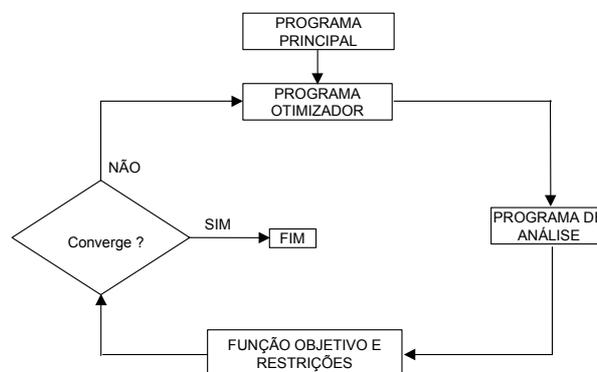


FIGURA 5.1.3.3 – Fluxo de dados de otimização.

Os dados trabalhados são avaliados, em face da função objetivo e das restrições, para as condições ótimas e realizáveis. Se existe convergência, obtemos a estrutura ótima. Se não existe convergência, um novo “loop” de otimização é iniciado. O diagrama de fluxo de dados de otimização é representado na Figura 5.1.3.3.

Como dados de entrada/parâmetros de entrada, serão adotados os seguintes valores:

$$E = 7,3084 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 2768 \text{ Kg/m}^3$$

$$L = 100,00 \text{ m}$$

$$A_i = 1,30 \text{ m}^2$$

$$h = 438 \text{ Km (altura da órbita)}$$

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

6.1 – Conclusões e Resultados Obtidos

A estrutura modelada não considera apêndices e está sujeita, por consideração de projeto, somente ao movimento de arfagem (“pitch”).

Os torques devido ao gradiente de gravidade são considerados conforme apontado no modelamento matemático da estrutura, e são esses os únicos torques impostos ao sistema.

Este trabalho partiu de um modelo estrutural, com algumas restrições no que diz respeito à sua construção, tipo: não foram considerados apêndices, foi considerado possível somente o movimento de “pitch”, não foi considerado o efeito do arrasto aerodinâmico.

O objetivo de se obter um modelo, mesmo que com uma concepção bastante simples, e se poder simulá-lo obtendo uma estrutura de peso mínimo foi atingido.

Neste trabalho apresentamos uma visão geral da literatura sobre otimização estrutural, que tem um grande campo de aplicação não só para a área espacial como também para aplicações baseadas em Terra. A otimização estrutural, dentro deste contexto, pode ser considerada multidisciplinar, visto que pode abordar aspectos relativos a materiais, formas, recursos computacionais, dentre outros.

O problema do autovalor e da sensibilidade, presente nos processos de otimização, foi abordado e destacado em um capítulo próprio. A importância do problema do autovalor neste caso é evidenciada, pois, os autovalores são as

freqüências naturais de vibração do sistema, cuja menor freqüência é a denominada freqüência fundamental. Isso define o vínculo do problema de otimização considerado.

Notamos que grande parte da literatura é apresentada para modelos baseados em Terra que são utilizados para aplicações no espaço. O modelo apresentado neste trabalho considera o ambiente de sua aplicação.

Foi apresentada uma metodologia e foram desenvolvidas as equações de movimento de uma grande estrutura espacial sujeita ao gradiente de gravidade. As matrizes de massa e rigidez da estrutura, foram determinadas e obedecem às leis de construção conforme a literatura consultada.

A formulação Lagrangiana combinada com o método dos elementos finitos foi utilizada para esse desenvolvimento.

O procedimento bem como o algoritmo de otimização foram validados, pela comparação dos resultados obtidos pelo Prof. Dr. Ijar Milagre da Fonseca, para o modelamento de uma outra estrutura espacial de grandes dimensões, estrutura esta com outras características dimensionais, a saber: comprimento 250,88 m e área da seção transversal inicial de $3,24E-3 \text{ m}^2$. Para este modelo em questão a estrutura é considerada "free-free". O algoritmo de otimização, respeitando as suas considerações, conduziu aos mesmos resultados anteriormente obtidos. A partir daí foram feitas as devidas considerações sobre o modelo e as dimensões da estrutura objeto do presente trabalho, cujos valores adotados encontram-se listados na seqüência.

A grande diferença no algoritmo de otimização, com relação ao inicial é a eliminação do grau de liberdade relativo à translação na seção transversal central da estrutura, uma vez que para o modelamento foi considerado que a estrutura está vinculada à sua órbita.

A validação do modelo, de fato, é obtida por um teste em laboratório. Entretanto, é importante ressaltar que para grandes estruturas flexíveis face ao efeito da gravidade, testes em laboratórios baseados em Terra podem não conduzir à validação dos resultados para ambientes espaciais.

Como dados de entrada/parâmetros de entrada, foram adotados os seguintes valores:

$$E = 7,3084 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 2768 \text{ Kg/m}^3$$

$$L = 100,00 \text{ m}$$

$$A_i = 1,30 \text{ m}^2$$

$$h = 438 \text{ Km (altura da órbita)}$$

O programa foi simulado em um microcomputador PC pentium®II – 750Mhz, com sistema operacional Windows NT 4.0, o que permitiu a obtenção do tempo de processamento.

Neste ponto é interessante observar que, de acordo com o modelo considerado, conforme Figura 4.1.1 (considerando a estrutura em regime de sua órbita, ou seja, com a manutenção das especificações nominais de atitude, sem nenhuma grande manobra, com seu eixo de menor momento de inércia alinhado com a vertical local - admitindo-se pequenos ângulos de “pitch”), a eliminação do grau de liberdade, vinculando a estrutura à uma órbita, não afeta a atitude da mesma.

A estrutura, que em sua configuração inicial pode ser representada como na Figura 6.1.1, apresenta um perfil não otimizado e de seção constante

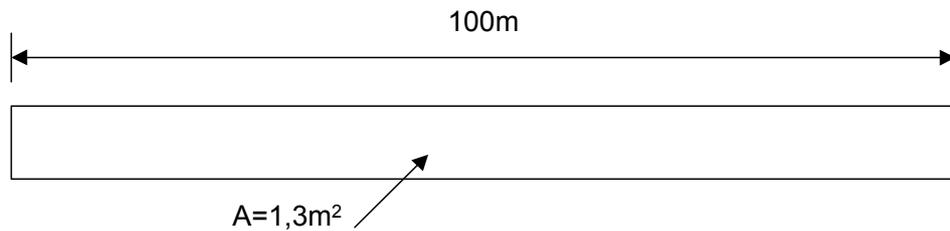


FIGURA 6.1.1 – Estrutura na configuração inicial – sem otimização.

Massa total da estrutura, não otimizada: 359840,00 Kg.

Na configuração inicial a estrutura é considerada de seção tubular constante com área de $1,30\text{m}^2$. Os limites permitidos à variação da área durante o procedimento de otimização são: limite inferior $1,10\text{m}^2$ e limite superior de $1,30\text{m}^2$.

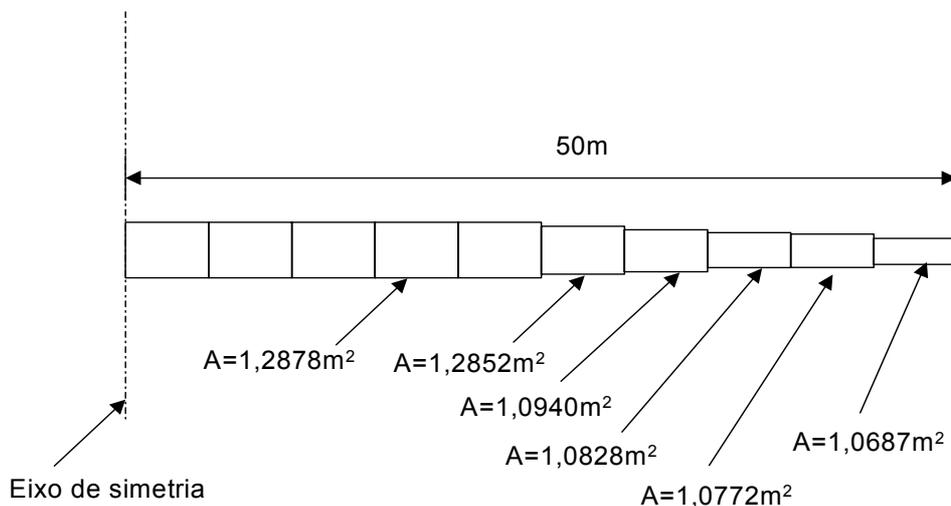


FIGURA 6.1.2 – Resultado da estrutura otimizada com vinte elementos.

Massa total da estrutura otimizada: 359701,60 Kg.

O programa de otimização, conforme já abordado no capítulo 5, irá procurar o peso/massa estrutural ótimo considerando os respectivos elementos. Assim, serão obtidas seções transversais para cada um dos elementos, que uma vez compostos definirão a configuração final da estrutura otimizada.

O resultado obtido no conduz à uma estrutura escalonada em função da seção transversal de cada elemento considerado, ou seja, a seção transversal diminui em direção às extremidades da estrutura. Essa variação, em degraus, conforme ilustrado na figura anterior é devida aos elementos considerados para a simulação.

Cada elemento é otimizado com relação à sua contribuição na massa/peso da estrutura como um todo (a contribuição de cada elemento é minimizada), considerando o vínculo na frequência fundamental de vibração do sistema.

A economia, ou redução, na massa/peso estrutural otimizada é da ordem de 0,038% de massa/peso, que corresponde à um alívio de massa de 138,40 Kg, que não deixa de ser significativo para uma estrutura de aplicação espacial, visto que, cada elemento da estrutura será levado à sua órbita por um veículo lançador.

A estrutura modelada, apresenta uma rigidez bastante elevada (sua frequência fundamental de vibração é da ordem de 2,55040 rad/seg – 0,406 Hz), a imposição de um vínculo maior que essa frequência, força a ação do programa de otimização, visto que a massa/peso estrutural não pode diminuir além dos limites impostos à frequência natural da estrutura. Em fato, fazendo a restrição na frequência fundamental de vibração, estamos impondo uma restrição na rigidez da estrutura, tornado-a mais rígida. Assim, a redução de massa/peso estrutural pode não ser tão expressiva.

Uma ação de controle, que não faz parte deste estudo, pode conduzir à uma estrutura com uma rigidez menor, obtendo uma redução mais expressiva na massa/peso estrutural.

Para aplicações espaciais, assim como para aplicações baseadas em Terra, uma estrutura com perfil escalonado de seções transversais conforme obtido, pode ser perfeitamente concebido desde que, fatores como concentrações de tensões sejam devidamente considerados.

Foram simuladas estruturas discretizadas com diferentes números de elementos, que conduziram aos resultados conforme ilustrados a seguir.

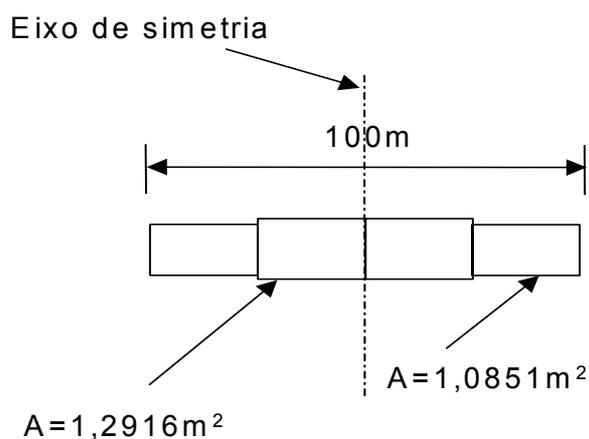


FIGURA 6.1.3 – Resultado da estrutura otimizada com quatro elementos.

Massa total da estrutura otimizada: 359148,00 Kg.

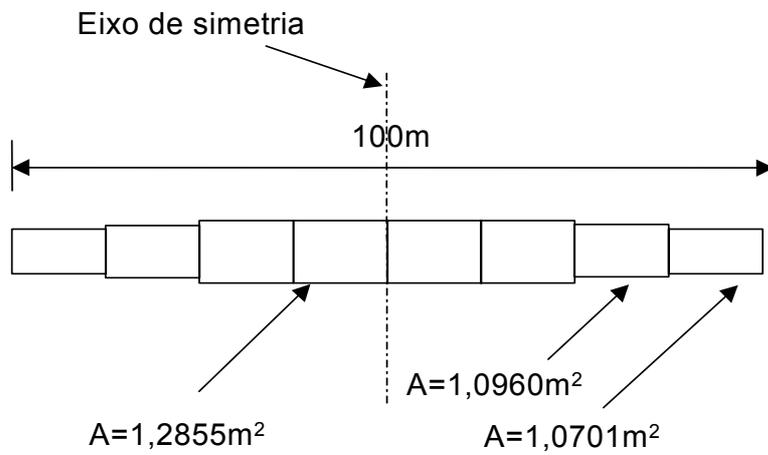


FIGURA 6.1.4 – Resultado da estrutura otimizada com oito elementos.

Massa total da estrutura otimizada: 359494,00 Kg.

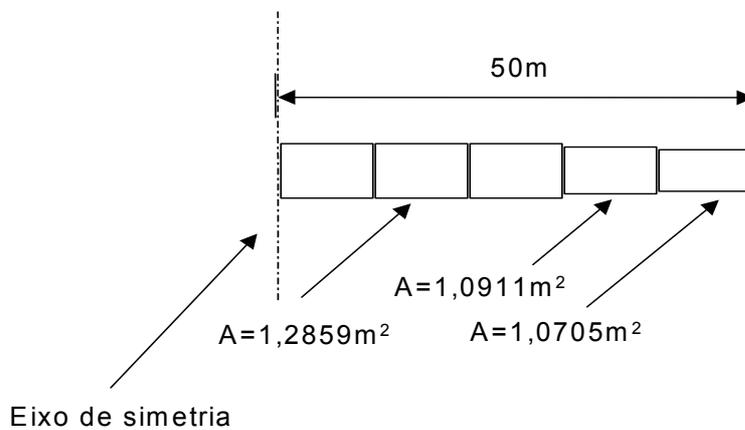


FIGURA 6.1.5 – Resultado da estrutura otimizada com dez elementos.

Massa total da estrutura otimizada: 359563,20 Kg.

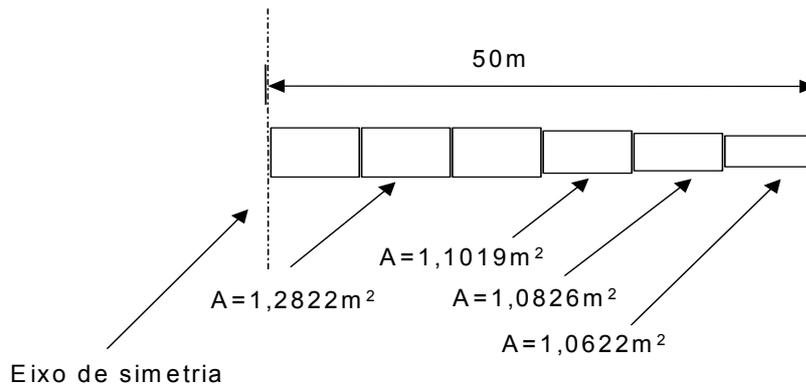


FIGURA 6.1.6 – Resultado da estrutura otimizada com doze elementos.

Massa total da estrutura otimizada: 359609,33 Kg.

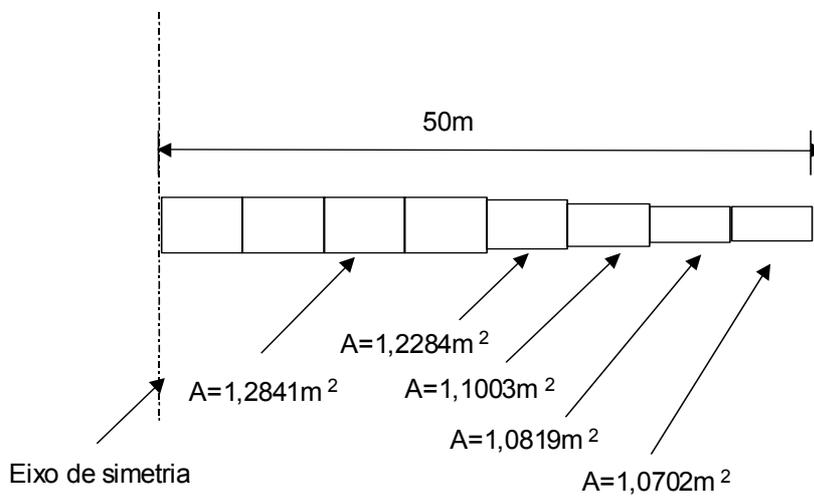


FIGURA 6.1.7 – Resultado da estrutura otimizada com dezesseis elementos.

Massa total da estrutura otimizada: 359667,00 Kg.

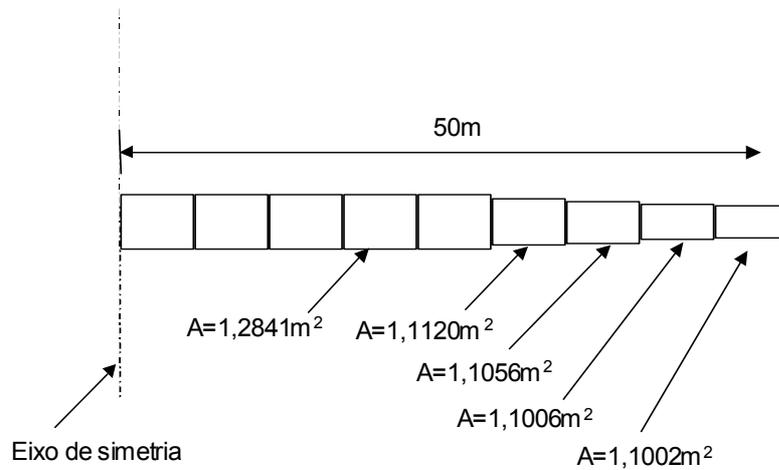


FIGURA 6.1.8 – Resultado da estrutura otimizada com dezoito elementos.

Massa total da estrutura otimizada: 359686,22 Kg.

Observa-se que a estrutura mantém a simetria, e que existe uma diminuição da seção transversal na direção das extremidades da mesma.

Nota-se que o perfil da estrutura mantém uma certa uniformidade, mas não mantém a mesma forma com a variação do número de elementos considerados.

A Figura 6.1.9, ilustra este fato.

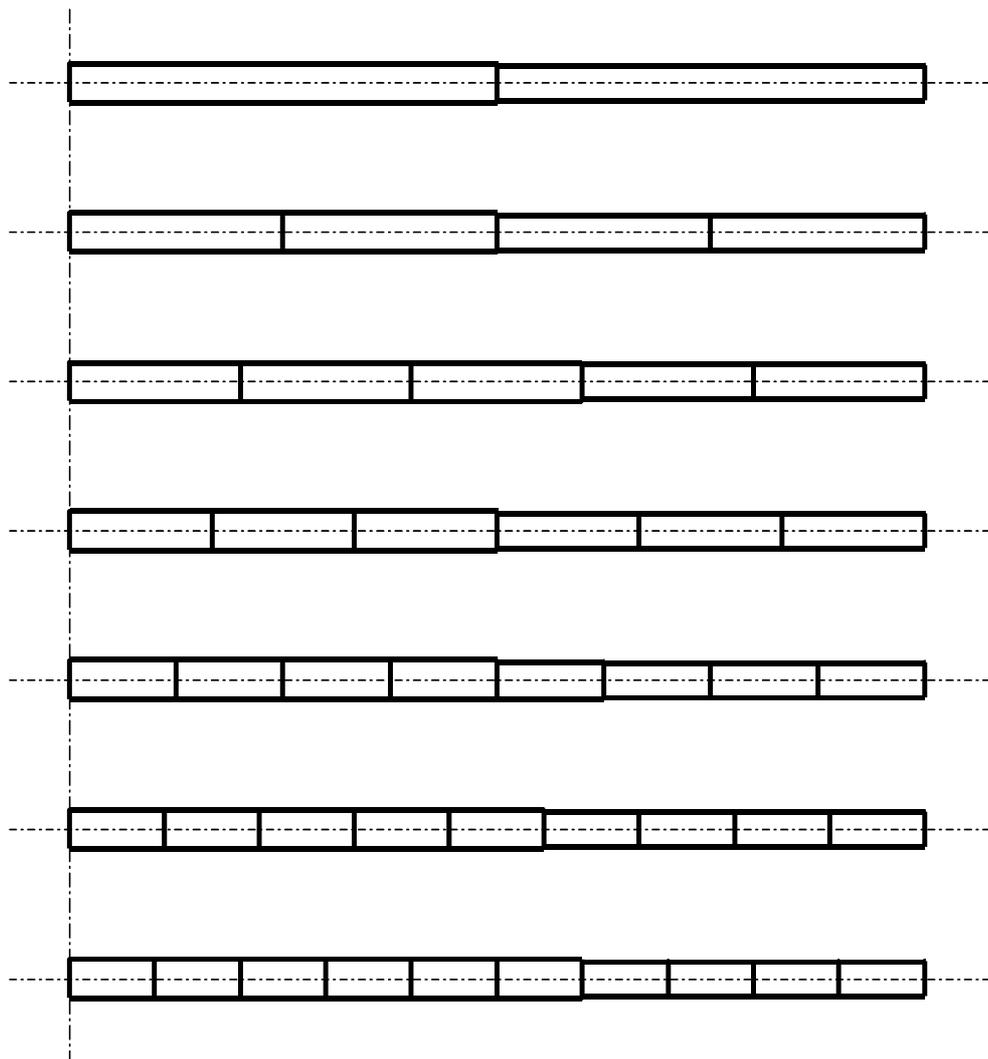


FIGURA 6.1.9 – Variação das seções com relação ao comprimento da estrutura.

A variação na forma final, bem como a variação na redução da massa/peso estrutural obtida é atribuída ao processo de discretização. A discretização com vinte elementos reproduz melhor a estrutura, ou seja, está mais próxima da estrutura considerada como um contínuo.

As discretizações com menor número de elementos são menos refinados no que se refere à representação da estrutura. Esta é uma característica do método de elementos finitos, a discretização afeta o processo de otimização.

A geração da malha de elementos finitos, ou neste caso, a determinação do número de elementos ainda é uma área em que muitos estudos estão sendo realizados e constitui um desafio aos projetista que se utilizam desta metodologia. Este estudo exige um comprometimento entre tempo de processamento e da acuracidade dos resultados obtidos. Kodiyalam et al., 1991, apresenta um estudo para a geração de uma malha de elementos finitos com um aplicativo dedicado de CAE (Computer Aided Engineering).

Nota-se, no entanto, que a estrutura tende a um perfil com maior rigidez devido ao vínculo escolhido, conforme já abordado.

Com relação ao comportamento da variação da massa (peso) da estrutura com relação ao número de elementos considerados a simulação, podemos traçar o gráfico da Figura 6.1.10.

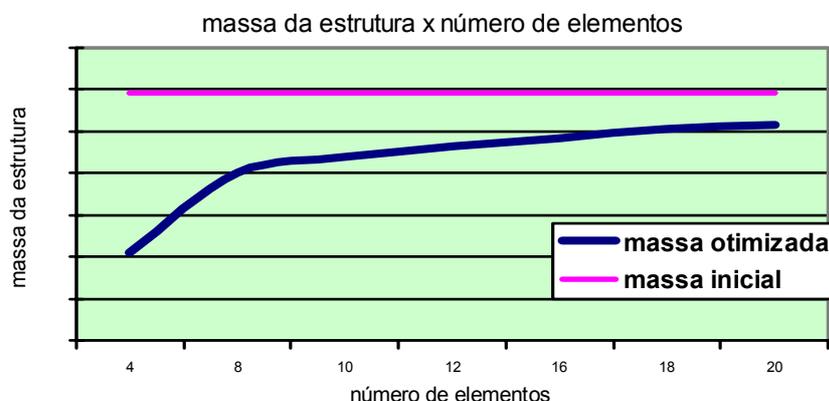


FIGURA 6.1.10 – Gráfico da variação de massa da estrutura.

Nota-se pelo comportamento da estrutura otimizada que sua massa otimizada sempre ocupa um valor menor que a massa inicial da estrutura proposta. Isso não é suficiente para podermos afirmar que a massa/peso estrutural tende a um valor abaixo do inicial. Podemos observar que os valores otimizados são menores que o inicial.

A partir de dezoito elementos a variação da massa torna-se mais branda em relação à variação do número de elementos considerados no modelamento. Isso se deve ao fato de que o refinamento do modelo, o maior número de elementos considerados para o cálculo, faz com que a estrutura apresentada seja a mais próxima de uma estrutura contínua.

A literatura mostra que a partir de um determinado número de elementos, e a partir daí dentro de um intervalo de valores, a variação dos resultados passa a não ser significativa, mas o tempo de processamento aumenta. Além desse intervalo, os resultados são comprometidos e não devem ser considerados, pois, deixam de refletir o comportamento da estrutura analisada. A literatura também, ainda não atribui uma metodologia universal para obtenção de quais são os valores iniciais e o intervalo no qual os valores otimizados representam a estrutura mais próxima da real.

Fato é que, o modelamento com vinte elementos conforme equacionado, fornece um resultado de massa/peso estrutural menor que o obtido para a estrutura inicial (sem otimização). Nota-se que a variação entre dezoito elementos e vinte elementos é bastante pequena, o que está conforme com a literatura. O estudo relativo a qual o número de elementos a ser considerado, poderia ser objeto de continuação deste trabalho e/ou de um estudo mais detalhado sobre o método de elementos finitos.

Por ser um algoritmo de computador, o tempo de processamento é bastante importante, visto também ser maior quanto maior for o número de elementos considerados na discretização. As características de convergência do método, também, influenciam aumentando o tempo de processamento.

Neste trabalho, foi possível obter o tempo de processamento para algumas simulações, conforme representado na Figura 6.1.11.

Nota-se que o tempo de processamento aumenta com o aumento do número de elementos considerados na análise, porém esse aumento não é linear.

Uma certa variação, obtida para a simulação com dez elementos, é devida ao fato de que o tempo de processamento inclui o tempo gasto na geração de arquivos de saída, arquivos com informações sobre a análise. Neste ponto, foram solicitadas informações que não foram solicitadas nas outras simulações.

Observa-se em outras simulações, conforme em Fonseca, 1998, que o tempo de processamento tem variação exponencial com relação ao número de elementos considerados, sob as mesmas condições de arquivos de saída e critérios de convergência.

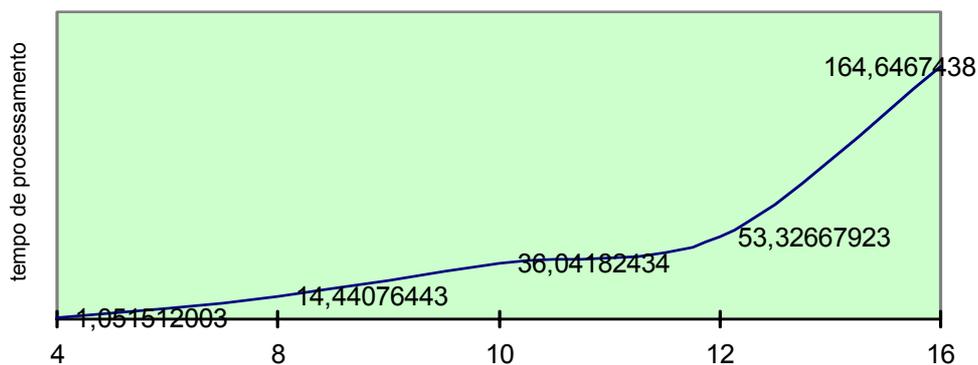


FIGURA 6.1.11 – Tempo de processamento.

6.2 – Perspectivas Futuras

A otimização da estrutura se mostrou eficiente, foi possível obter uma estrutura de peso otimizado, para uma montagem espacial esse fator torna-se de fundamental importância, visto que toda a estrutura seria levada até sua órbita, em partes, por um veículo lançador.

A metodologia adotada para o modelamento matemático da estrutura permite que os mesmos conceitos apresentados neste trabalho sejam utilizados para outros tipos de estruturas, tais como: pórticos, braços robóticos, manipuladores, estruturas com apêndices, etc., que podem ou não serem baseados em Terra. O método de otimização seqüencial, da mesma forma, pode ser utilizado.

Como perspectivas futuras, podemos citar:

- 1) a inclusão de características de controle para parâmetros de atitude da estrutura, obtendo assim uma formulação para a otimização integrada de estrutura e controle;
- 2) a possibilidade de consideração de tridimensionalidade no modelo, ou seja, poderíamos considerar ainda os movimentos de rolamento (“roll”) e de guinada (“yaw”). O modelo estaria mais próximo de um modelo real, mesmo mantendo a consideração de órbita plana e circular;
- 3) considerar a órbita não circular e os efeitos da não esfericidade da Terra, com finalidade de obter a estrutura de peso/massa mínima, considerando somente o movimento de arfagem (“pitch”);
- 4) considerar 3, com os dois movimentos conforme em 2;

- 5) desenvolver um modelo de estrutura baseada em Terra, com mínimo peso para atuar em projetos mecatrônicos, onde são, via de regra, necessários grande precisão de posicionamento e grandes velocidades de movimentação;
- 6) desenvolver um modelo, espacial, com a tridimensionalidade citada em 2, considerando apêndices, tais como: braços robóticos; painéis solares e antenas;
- 7) modelar a estrutura em aplicativo de CAE, desenvolvendo rotinas de otimização de peso/massa estrutural;
- 8) obter um modelo físico e, com a alocação de sensores, fazer aquisição de dados que podem ajudar na convergência do processo de otimização;
- 9) incluir no modelo a presença do arrasto, radiação solar, flexão por efeitos térmicos e torques magnéticos;
- 10) a inclusão de outros tipos de vínculos.

Como contribuição deste trabalho, podemos citar:

- 1) desenvolvimento de um modelo matemático considerando o acoplamento do movimento de “pitch” e a flexibilidade da estrutura;
- 2) desenvolvimento de um modelo matemático que permite a incorporação de características de controle, podendo vir a se obter uma otimização integrada de estrutura e controle;

- 3) esse modelo pode ser aplicado para modelos baseados em Terra, feitas as devidas considerações;
- 4) o modelo é aberto e podem ser incluídos outros graus de liberdade no sistema;
- 5) respeitadas as modificações, a metodologia pode ser aplicada para modelos baseados em Terra.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADELMAN, H. M.; HAFTKA, R. T. Sensitivity analysis of discrete structural systems. **AIAA Journal**, v.24, n.5, p. 823-832, May. 1986.

ALVES FILHO, A. Introdução ao método dos elementos finitos. In:_____.
Elementos finitos: a base da tecnologia CAE. São Paulo: Érica, 2000. cap. 1, p. 1 –24.

ALVES FILHO, A. Elemento de viga superposição de comportamentos independentes. In:_____. **Elementos finitos**: a base da tecnologia CAE. São Paulo: Érica, 2000. cap. 4, p. 97-125.

ASSAN, A. E. Notas históricas. In:_____. **Métodos dos elementos finitos**: primeiros passos. Campinas: Editora da UNICAMP, 1999. cap.1, p. 17-32.

ASSAN, A. E. Métodos do elementos finitos. In:_____. **Métodos dos elementos finitos**: primeiros passos. Campinas: Editora da UNICAMP, 1999. cap.4, p. 57-87.

BEER, F. P.; JOHNSTON JUNIOR, E. R. Vibrações mecânicas. In:_____.
Mecânica vetorial para engenheiros: cinemática e dinâmica. 5 ed. São Paulo: Makron Books, 1994. cap. 19, p. 800-880.

BEER, F. P.; JOHNSTON JUNIOR, E. R. Momentos de inércia. In:_____.
Mecânica vetorial para engenheiros: cinemática e dinâmica. 5 ed. São Paulo: Makron Books, 1994. Apêndice B, p. 894-933.

BURNETT, D.S. What is the finite element method ?. In: _____. **Finite element analysis: from concepts to applications**. New York: Addison-Wesley, 1988. cap. 1, p. 3-32.

BURNETT, D.S. Outline of problems treated in this book. In: _____. **Finite element analysis: from concepts to applications**. New York: Addison-Wesley, 1988. cap. 2, p. 40-45.

CANFIELD, R. A.; GRANDHI, R.V.; VENKAYYA, V. B. Optimum design of structures with multiple constraints. **AIAA Journal**, v. 26, n. 1, p. 78-84, Jan. 1988.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. The performance of feedback control systems. In: _____. **Modern control systems**. Menlo Park: Addison-Wisley Longman, 1998. cap. 5, p. 230-292.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. The design of state variable feedback systems. In: _____. **Modern control systems**. Menlo Park: Addison-Wisley Longman, 1998. cap. 11, p. 641-687.

ELWANY, M. H. S.; BARR, A. D. S. Optimal design of beams under flexural vibration. **Journal of sound and vibration**, v. 88, n. 2, p. 175-195, Aug. 1983.

FEIYUE, L.; BAINUM, P. M.; XU, J. Centralized, decentralized, and independent control of a flexible manipulator on a flexible base. **Acta Astronautica**, v. 29, n. 3, p. 159-168. 1993.

FONSECA, I. M. **Integrated structural/control optimization of large space structure with articulation subject to the gravity-gradient torque**. São José dos Campos. 142 f. Tese (Doutorado em Engenharia e Mecânica Aeronáutica) – Centro Técnico Aeroespacial, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1998.

FOX, R. L.; KAPOOR, M. P. Rates of change of eigenvalues and engenvectors. **AIAA Journal**, v. 6, n. 12, p. 2296-2303, Dec. 1968.

GAJEWSKI, A.; ZYCZKOWSKI, M. **Optimal structural design under stability constraints**. London: Kluwer Academic Publishers, 1989. 469 p.

GRANDHI, R. V. Structural optimization with frequency constraint: a review. **AIAA Journal**, v. 31, n. 12, p. 2296-2303, Dec. 1993.

GRANDHI, R. V.; VENKAYYA, V. B. Structural optimization with frequency constraint. **AIAA Journal**, v.26, n.7, p. 858-866, July 1988.

HANAGUD, S.; CHATTOPADHYAY, A.; SMITH, C. V. Optimal design of a vibrating beam with coupled bending and torsion. **AIAA Journal**, v. 25, n. 9, p. 1231-1240, Sept. 1987.

HAFTKA, R. T.; STERNES, J. H. Applications of a extended interior penalty function for structural optimization. **AIAA Journal**, v. 14, n. 6, p. 718-724, Jun. 1976.

HOU, G. J. W.; KENNY, S. P. Eigenvalue and eigenvector approximate analysis for repeated eigenvalue problems. **AIAA Journal**, v. 30, n. 9, p. 2317-2324, Sept. 1992.

HOU, G. J. W.; MEI, C.; XUE, Y. X. On the design sensitivity analysis of beams under free and forced nonlinear vibrations. **AIAA Journal**, v. 28, n. 6, p. 1067-1068, Jun. 1990.

HUEBNER, K. H. **The finite element method for engineers**. New York: John Wiley & Sons, 1975. 500p.

KAMAT, M. P.; VENKAYYA, V. B.; KHOT, N. S. Optimization with frequency constraints: limitations. **Journal of sound and vibration**, v. 91, n. 1, p. 147-154, Feb. 1983.

KAMAT, M. P. **Structural optimization**: status and promise. Washington: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1993. 876 p.

KAPLAN, M. H. Introduction. In:_____. **Modern spacecraft dynamics & control**. New York: John Wiley & Sons, 1976. cap. 1, p. 1-18.

KAPLAN, M. H. Attitude control devices. In:_____. **Modern spacecraft dynamics & control**. New York: John Wiley & Sons, 1976. cap. 5, p. 199-205.

KAPLAN, M. H. Fundamentals and methods of astrodynamics. In:_____. **Modern spacecraft dynamics & control**. New York: John Wiley & Sons, 1976. cap. 7, p. 273-292.

KHOT, N. S.; BERKE, L.; VENKAYYA, V. B. Comparison of optimality criteria algorithms for minimum weight design of structures. **AIAA Journal**, v. 17, n. 2, p. 182-190, Feb. 1979.

KHOT, N. S.; GRANDHI, R. V; VENKAYYA, V. B. Structural and control optimization of space structures. In: AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 28., Monterey-CA, 1987. **Proceedings**. Monterey: AIAA, 1987. part B. Apr, 6-8, p.850-860.

KODIYALAM, S.; VANDERPLAATS, G. N.; MIURA, H. Structural shape optimization with MSC/NATRAN. **Computers & Structures**, v. 40, n. 4, p. 821-829, Apr. 1991

LUONGO, A.; PAOLONE, A.; EGIDIO, A. Sensitivities and linear stability analysis around a double-zero eigenvalue. **AIAA Journal**, v. 38, n. 4, p. 702-710, Apr. 2000.

MAESTRELLI, N. C.; MIGUEL, P. A. C. Programa seis sigma e a sua aplicação na manufatura. **Revista Máquinas e Metais**, n. 423, p. 308-317, abril 2001.

McCUSKEY, S. W. Theory of perturbations. In:_____. **Introduction to celestial mechanics**. Menlo Park: Addison-Wesley, 1963. cap. 6, p. 163-167.

MEIROVITH, L. Elements of analytical dynamics. In:_____. **Elements of vibration analysis**. Tokyo: McGraw-Hill, 1986. cap. 6, p. 245-264.

MEIROVITH, L. Continuous systems approximate methods. In:_____. **Elements of vibration analysis**. Tokyo: McGraw-Hill, 1986. cap. 7, p. 266-298.

MEIROVITH, L. The finite element method. In:_____. **Elements of vibration analysis**. Tokyo: McGraw-Hill, 1986. cap. 8, p. 300-344.

MEIROVITH, L. The eigenvalue problem. In:_____. **Methods of analytical dynamics**. New York: McGraw-Hill, 1970. cap. 4, p. 122-162.

MEIROVITH, L. The finite element method. In:_____. **Methods of analytical dynamics**. New York: McGraw-Hill, 1970. cap. 11, p. 408-450.

MEIROVITH, L. Qualitative aspects of the algebraic eigenvalue problem. In:_____. **Principles and techniques of vibrations**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997. cap. 5, p. 232-264.

MEIROVITH, L. The finite element method. In:_____. **Principles and techniques of vibrations**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997. cap. 9, p. 585 -651.

MORRIS, A. J. **Foundations of structural optimization: a unified approach**. New York: John Wiley & Sons, 1982. 623p.

NAIR,P. B.; KEANE, A. J.; LANGLEY, R. S. On the approximation of frequency constraints in structural optimization. In: ISSMO/NASA/AIAA Internet Conference, 1., Southampton - UK, 1998. **Proceedings**. s.l: ISSMO/NASA/AIAA, 1998. June, 14-27, p.1-15.

OGATA, K. Análise de resposta em frequência. In:_____. **Engenharia de controle moderno**. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1993. cap. 6, p. 347-414.

OGATA, K. Análise de sistemas de controle no espaço de estados. In:_____. **Engenharia de controle moderno**. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1993. cap. 9, p. 551-602.

ROZVANY, G. I. N. **Structural design via optimality criteria**. London: Kluwer Academic Publishers, 1989. 463 p.

SOBIESKI, J. S.; RILEY, K. M. Sensitivity of optimum solutions of problem parameters. **AIAA Journal**, v. 20, n. 9, p. 1291-1299, Sept. 1982.

THONSOM, W. T. Sistemas contínuos. In:_____. **Teoria da vibração**. Rio de Janeiro: Interciência Ltda., 1973. cap. 8, p. 265-289.

TIMOSHENKO, S. Momentos de inércia de figuras planas. In:_____.
Resistência dos materiais. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos,
1980. v. 1. Apêndice A, p. 425-434.

TURNER, M. J.; CLOUCH, R. W.; MARTIN, H. C. TOPP, L. J. Stiffness and
deflection analysis of complex structures. **Journal of Aeronautical Sciences**,
v. 23, p. 805-823, Sept. 1956.

USORO, P. B.; NADIRA, R.; MAHIL, S. S. A finite element/Lagrange approach
to modeling lightweight flexible manipulators. **Journal of dynamics systems
and control**, v. 108, p. 198-205, Sept. 1986.

VANDERPLAATS, G. N. Basic concepts. In:_____. **Numerical
optimization techniques for engineering design**: with applications. New
York: McGraw-Hill, 1984. cap. 1, p. 1-21.

VANDERPLAATS, G. N. Constrained functions of N variables sequential
unconstrained minimization techniques. In:_____. **Numerical optimization
techniques for engineering design**: with applications. New York: McGraw-Hill,
1984. cap. 5, p. 121-151.

YOSHIDA, N.; VANDERPLAATS, G. N. Structural optimization using beam
elements. **AIAA Journal**, v. 26, n.4, p. 454-462, Apr. 1988.

ZEID, I. Introduction. In:_____. **CAD/CAM theory and practice**. New York:
McGraw-Hill, 1991. cap. 1, p. 3-23.

ZEID, I. Finite element method in engineering science. In:_____. **CAD/CAM
theory and practice**. New York: McGraw-Hill, 1991. cap. 18, p. 877-952.

ZIENKIEWICZ, O. C. **The finite element method in engineering science.**
New York: McGraw-Hill, 1971. 521 p.