Posicionamento Relativo em Tempo Real de Formação de Vôo Orbital através do Filtro de Kalman

Hélio Koiti Kuga e Silvanio B. de Oliveira
Divisão de Mecânica Espacial e Controle, INPE
12227-010, São Jose dos Campos, SP
silvanio@dem.inpe.br, hkk@dem.inpe.br

Roberto V. F. Lopes
Divisão de Sistemas Espaciais, INPE
12227-010, São Jose dos Campos, SP
roberto@dss.inpe.br

Resumo: *O objetivo deste trabalho consiste em analisar a precisão do posicionamento relativo de uma formação de vôo orbital composta por três satélites em órbitas circulares, através do filtro de Kalman em tempo real. Para esta análise, usaremos a formulação da dinâmica do movimento relativo para órbitas circulares desenvolvida por Clohessy-Wiltshire. Para processar as medidas relativas, usaremos o Filtro de Kalman o qual consiste em duas fases: propagação e atualização do estado e da covariância do erro. A vantagem do uso dessa ferramenta é a obtenção da estimativa do posicionamento relativo em tempo real, para prevenir colisões, realizar rendez-vouz, ou manter distâncias relativas entre os participantes da formação em vôo.*

Palavras-chave: Formação de Vôo, Filtro de Kalman e Estimação de Estados

1. Introdução

Este trabalho trata da aplicação do estimador de estados, conhecido como o Filtro de Kalman, para sistemas dinâmicos orbitais. No caso, o sistema dinâmico consiste de uma formação de vôo composta por três satélites artificiais em órbitas distintas que possuem a bordo equipamentos para medidas de posicionamento e velocidade relativas. Atualmente existem sensores de medida capazes de produzir informações relativas com grande precisão, por exemplo, o uso do sistema GPS (Global Positioning System) no modo diferencial que pode fornecer precisões de distâncias relativas da ordem de metros ou menos [1]. Outros equipamentos convencionais tratam de medidas de radar de curto alcance (short range), e velocidades relativas usando o efeito Doppler. Além disso, na literatura, podemos encontrar uma série de trabalhos que descrevem dinâmica do movimento relativo orbital, entre eles Carter et alli [2].

Para este tipo de problema, o modelo dinâmico mais apropriado não é o de modelos de trajetórias orbitais aplicado individualmente. Além de complexos e computacionalmente intensivos estes modelos exigiriam a posterior transformação de coordenadas para o movimento relativo orbital, com gasto adicional de processamento computacional. Com esta motivação, este trabalho investiga a viabilidade de se utilizar o modelo de dinâmica de formação em vôo orbital [3], que aliado ao filtro de Kalman [4], pode produzir um navegador de posicionamento relativo em tempo real.

2. Dinâmica do Movimento Relativo

Entre as diversas formulações encontradas na literatura para descrever e solucionar o movimento relativo, utilizaremos as equações desenvolvidas por Clohessy-Wiltshire (CW) para dinâmica do movimento relativo em órbita circular [3].

As equações de CW são:

$$\ddot{x} - 3n^2 x - 2n\dot{y} = f_x \qquad (1)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = f_y \qquad (2)$$

$$\ddot{z} + n^2 z = f_z \qquad (3)$$

onde, $n = (\mu / R^3)^{1/2}$ é a taxa orbital com raio R e f_x, f_y, f_z são os impulsos (acelerações) sobre cada satélite. Nessas equações, *x, y, z,* são as distâncias relativas dos satélites da formação em relação a um satélite considerado mestre. A coordenada x é a projeção da distância relativa na direção radial do satélite mestre, z é a projeção na direção perpendicular ao plano da órbita, no sentido da velocidade angular orbital, e y completa o triedro dextrógiro, na direção da velocidade do satélite mestre, conforme Figura 1.

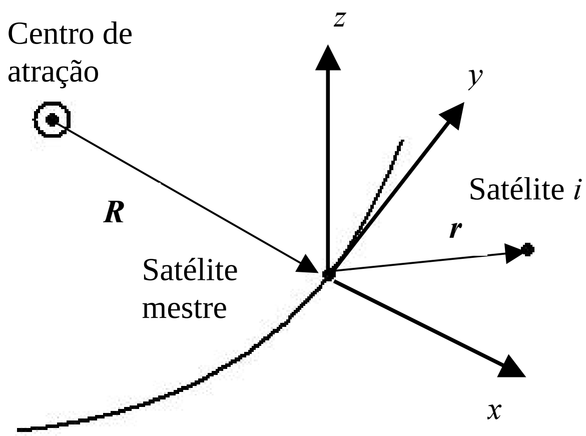

Fig. 1 – Sistema de coordenadas do movimento relativo

As equações 1, 2 e 3 são obtidas a partir das equações implementadas por Tschauner-Hempel para o caso em que a órbita é arbitrariamente elíptica [2].

Essas equações são válidas para $R>>r_i$, ou seja, a distância relativa entre o satélite i e o satélite mestre deve ser muito menor que o raio (a partir do centro da Terra) do satélite mestre. Os impulsos f_x, f_y, f_z, são úteis quando se deseja controlar uma maior aproximação ou afastamento entre satélites da formação. No caso da ausência de impulsos as equações tem solução analítica.

A forma analítica das soluções das equações obtidas por CW destaca a importância e a facilidade para se obter soluções a partir do qual um estado inicial pode ser propagado para um estado final sem a necessidade de realizar integração numérica. Assim a solução completa do movimento no plano é, dada por:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3\cos(nt) & 0 & \dfrac{\sin(nt)}{n} & \dfrac{2(1-\cos(nt))}{n} \\ 6(\sin(nt)-nt) & 1 & \dfrac{2(-1+\cos(nt))}{n} & \dfrac{4\sin(nt)}{n}-3t \\ 3n\sin(nt) & 0 & \cos(nt) & 2\sin(nt) \\ 6n(-1+\cos(nt)) & 0 & -2\sin(nt) & -3+4\cos(nt) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

e a solução fora do plano é,

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(nt) & \dfrac{\sin(nt)}{n} \\ -n\sin(nt) & \cos(nt) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

onde $r_o = (x_o, y_o, z_o)$ e $v_o = (\dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o)$ são as distâncias e as velocidades relativas iniciais no sistema de referência da Figura 1. Nota-se o desacoplamento do movimento fora do plano em relação ao movimento no plano.

3. Filtro de Kalman

Teoricamente, o filtro de Kalman é a solução para o chamado problema linear-quadrático-Gaussiano, do problema de estimação de “estado” instantâneo de um sistema linear dinâmico perturbado por um ruído branco gaussiano.

O filtro de Kalman é um estimador com característica de tempo real que pode incorporar o ruído dinâmico no modelo da dinâmica do estado (outros estimadores de pseudo-época podem também incorporar tal ruído no processamento). Por esse motivo, diz-se que o filtro de Kalman é a solução ótima de mínima variância [5].

Em princípio o filtro de Kalman é utilizado para dinâmicas lineares, entretanto com a extensão da técnica, pode-se usá-lo também em dinâmicas não-lineares, como o filtro estendido de Kalman [4, 5] . O filtro de Kalman consiste de duas etapas:

-Propagação ou predição ("time-update")
-Atualização ou correção ("measurement-update")

Na fase de propagação, propaga-se o estado $\boldsymbol{x}$ e a covariância $\boldsymbol{P}$ dos erros no estado, do instante t_{k-1} a t_k. Esta fase é implementada através do modelo dinâmico dado para propagar o estado e a covariância entre instantes discretos. O modelo linear discreto é dado por:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi}_{k+1,k}\ \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k\ \boldsymbol{\omega}_k\ , \tag{6}$$

onde $\boldsymbol{x}$ é o estado a ser estimado, φ é a matriz de transição de estado, Γ é a matriz que relaciona o ruído dinâmico ao estado, e ω é o vetor de ruído dinâmico modelado por um ruído branco definido por

$$\boldsymbol{\omega}_k = N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}_k).$$

As equações formais para a etapa de propagação são as seguintes:

$$\bar{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{\varphi}_{k,k-1}\ \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \tag{7}$$

$$\bar{\boldsymbol{P}}_k = \boldsymbol{\varphi}_{k,k-1}\ \hat{\boldsymbol{P}}_{k-1}\ \boldsymbol{\varphi}^t_{k,k-1} + \boldsymbol{\Gamma}_k\ \boldsymbol{Q}_k\ \boldsymbol{\Gamma}^t_k \tag{8}$$

onde $\bar{x}_k$ e $\overline{P}_k$ representam o estado e a covariância propagada para o instante k.

A fase de atualização é utilizada para corrigir o estado e a covariância do instante k devido à(s) medida(s) y_k, através do modelo de observações dado por:

$$y_k = H_k \, x_k + v_k \tag{9}$$

onde H é a matriz que relaciona o estado às medidas, e ν é o vetor de ruído de medidas modelado por um ruído branco definido por $v_k = N(0, R_k)$.

Em essência, a(s) medidas(s) do instante k fornece(m) informação(ões) para corrigir o estado e a covariância. Esta fase simplesmente incorpora essa informação às estimativas. O equacionamento é exatamente a forma de Kalman, ressalvadas as diferenças de notação devido aos índices temporais:

$$K_k = \overline{P}_k H_k^t \left(H_k \overline{P}_k H_k^t + R_k \right) \tag{10}$$

$$\hat{P}_k = \left(I - K_k H_k \right) \overline{P}_k \tag{11}$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k \left(y_k - H_k \bar{x}_k \right) \tag{12}$$

onde K_k é o ganho de Kalman, e $\hat{x}_k$ e $\hat{P}_k$ são o estado e a covariância atualizadas para o instante k respectivamente. A fase de atualização corrige o estado e a covariância para o instante t_k devido à medida y_k. O método tem natureza recursiva e não necessita armazenar as medidas previamente em grandes matrizes.

4. Sensitividade das equações de CW

Uma das hipóteses fundamentais para o uso das equações 1-3 de CW para o movimento relativo orbital é que $R >> r_i$, ou seja, o raio vetor entre o centro da Terra e o satélite mestre deve ser muito maior que a distância entre o satélite mestre e os outros satélites da formação. Para verificar como isto poderia afetar a precisão do modelo, integrou-se analiticamente 3 distâncias relativas, 2700, 270 e 27m correspondendo a 0.01°, 0.001°, e 0.0001° de separação angular entre o mestre e outro satélite.

A Figura 2 mostra como o erro RMS no cálculo da distância relativa se comporta, para um satélite mestre a 15500km de raio e as várias distâncias (27, 270, e 2700m). Foram testados vários passos de T/100 a T, onde T é o período orbital correspondendo a aproximadamente 19200s. O maior erro está em aproximadamente T/2, com cerca de 216, 2160, e 21600m, respectivamente para as várias separações testadas.

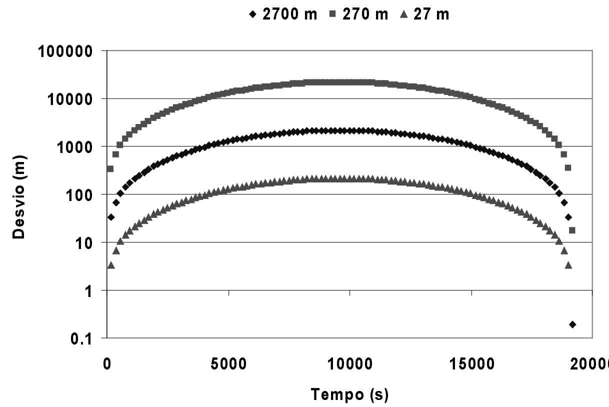

Fig. 2 – Sensitividade das equações de CW à distância relativa

Para passos de T/100 na integração analítica, os erros foram consideravelmente menores, de 3.4, 34, e 340m por passo. Recomenda-se, portanto, que as equações de CW sejam utilizadas com cautela, com passos reduzidos e separação relativa reduzida, para que a hipótese de $R >> r_i$ e conseqüente aproximações não afete a precisão dos resultados. Este erro de modelo dinâmico deverá ser compensado no esquema de filtragem como se verá a seguir.

5. Simulações e Testes

Para esta investigação utilizou-se uma formação em vôo composta por 3 satélites, onde o satélite mestre está em órbita circular equatorial de 15500km de raio, e os outros 2 satélites estão com separação angular correspondente a 0.01° e 0.02°, ou distância relativa de 2700m e 5400m do satélite mestre, também em órbita circular no mesmo plano. Os erros das medidas relativas de posição e velocidade consideradas foram de 10m e 1m/s, compatíveis com sistemas de GPS diferencial existentes [1]. A taxa de amostragem das medidas nesta simulação correspondeu a T/100, ou seja, 192 s, que acarretaria um erro na solução analítica de CW de 340 m para este passo para o satélite mais próximo. O filtro de Kalman projetado deve cobrir este erro do modelo e estimar o posicionamento relativo em tempo real.

Foi implementado um filtro de Kalman bastante simplificado para verificar o nível de complexidade necessária para um posicionamento relativo de uma formação em vôo orbital. A matriz de transição correspondente às equações de CW foi calculada através de série truncada na primeira ordem:

$$\varphi_{k,k-1} \approx I + F_k \, \Delta t$$

onde φ é a matriz de transição, F é a matriz do lado direito da equação 4, e Δt é o intervalo (t_k-t_{k-1}). O filtro foi inicializado com incertezas de posição e velocidade correspondentes a 1000m e 100m/s. O ruído dinâmico foi ajustado para $(0.1\text{m})^2$ e $(0.1\text{m/s})^2$ nas coordenadas de posição e velocidade.

As Figuras 3 e 4 mostram os erros estimados após processamento pelo filtro de Kalman, para um intervalo de 19200s, ou um período orbital do satélite mestre. Os pontos discretos correspondem aos erros RMS ("Root Mean Square") e a curva lisa corresponde à incerteza (desvio-padrão) calculada pelo filtro de Kalman. O satélite mestre é o número 1, o satélite 2 é o mais próximo e o satélite 3 é o mais distante inicialmente. Nota-se que as incertezas de posição e de velocidade (aproximadamente 15m e 1.5m/s) refletem razoavelmente a distribuição dos erros.

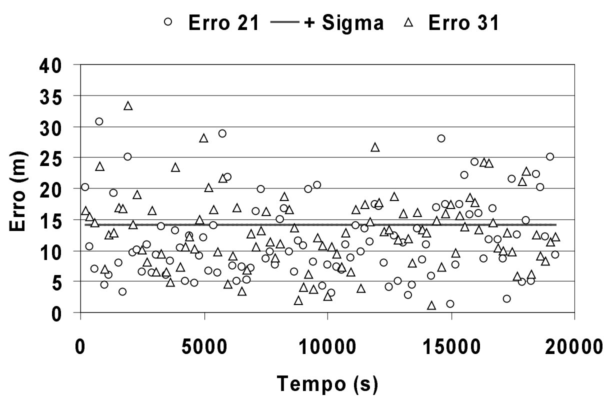

Fig. 3 – Erros na posição relativa estimada

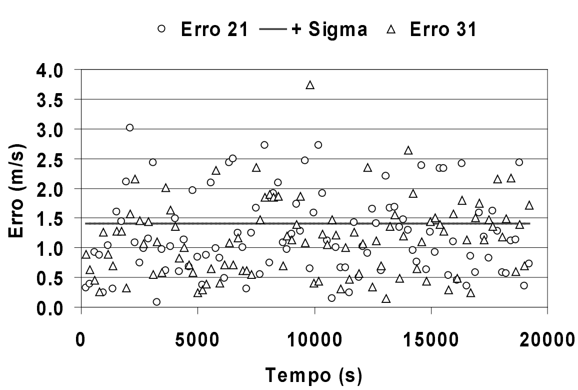

Fig. 4 – Erros na velocidade relativa estimada

A Figura 5 mostra, para os componentes de posição, os resíduos preditos, e os resíduos após processamento pelo filtro de Kalman (seqüência de inovação). Esta figura mostra como o filtro conseguiu reduzir o erro de predição inicial após processamento das medidas relativas de posição e velocidade.

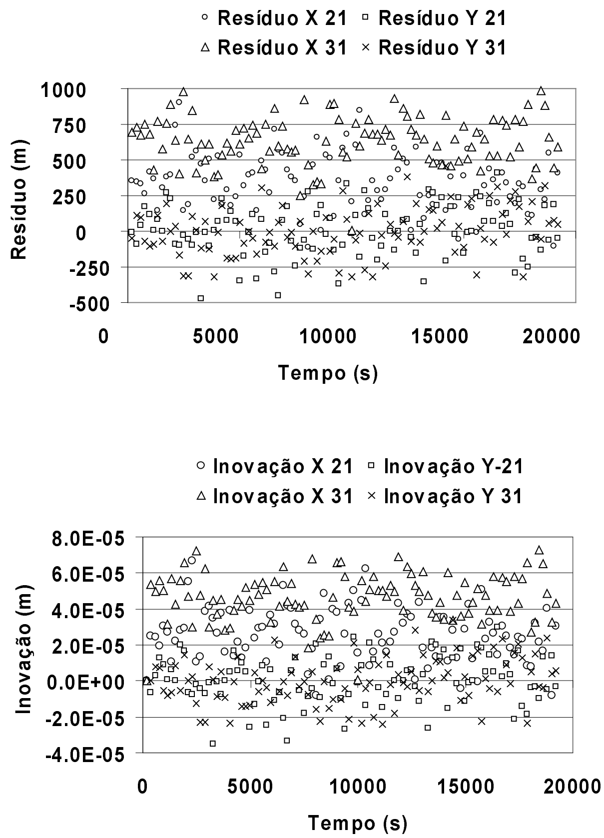

Fig. 5 – Resíduos do filtro de Kalman

6. Comentários Finais

Este trabalho mostra uma investigação sobre posicionamento relativo em tempo real através das equações de Clohessy-Wiltshire (CW), em conjunto com o filtro de Kalman. Abordou-se a sensitividade dessas equações, bem como um projeto simplificado do filtro. Nota-se que esta modelagem permite precisões suficientes para a maioria das aplicações de manutenção da formação em vôo ("station keeping"), aproximação para docagem ("docking"), e rendez-vouz. Obteve-se erros da ordem de 15m e 1.5m/s na posição e velocidade relativas. A necessidade de maiores precisões podem levar a consideração de modelos mais sofisticados incluindo o movimento elíptico, ou perturbações orbitais, bem como medidas relativas mais precisas.

Agradecimentos

Os autores expressam seus agradecimentos para Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) e Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) pelo suporte desta pesquisa.

Referências

[2] Parkinson, B. W and Spilker Jr. J. J, "Global Position System: theory and applications" V. I. Washington: AIAA (1996),

[2] Carter, T. and Hunic, M., Fuel-Optimal Rendezvous Near a Point in General Keplerian Orbit, *Jornal of Guidance, Control and Dynamics,* vol. 10, n. 6 (1987).

[3] W.H. Clohessy and R.S. Wiltshire, Terminal Guidance System for Stellite Rendezvous, *Jornal of the Aerospace Sciences,* p.p 653-658, September (1960) .

[4] M.S. Grawal and A.P. Andrews, Kalman Filtering: theory and practice, (Thomas Kailath, ed.) pp.1, 112-116, Emglewood Cliffs, New Jersey, 1993.

[5] P. S. Maybeck, Stochastic Model Estimation, (Richard Bellman, University of Southern California, ed.) pp.203-279, v.1, New York, New York, 1979.