



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

INPE-13076-PUD/176

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DISCRETA NO TEMPO DE  
SISTEMAS DINÂMICOS CONTÍNUOS NO TEMPO**

Marcelo Ricardo Alves da Costa Tredinnick

Exame de Qualificação de Doutorado (terceiro tema) do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais, orientado pelo Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza, aprovado em 24 de maio de 2005.



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos Professores Marcelo Lopes de Oliveira e Souza e Gilberto da Cunha Trivelato pelos ensinamentos a respeito de Modelagem e Simulação Discreta no Tempo de Sistemas Dinâmicos Contínuos no Tempo e aos demais membros da banca desse Exame de Qualificação de Doutorado pelas valiosas observações e comentários feitos: Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza e Mário Cezar Ricci.

## **RESUMO**

Neste trabalho pretende-se dar uma visão superficial das principais técnicas de modelagem e controle amostrados, isto é, sistemas dinâmicos contínuos no tempo que são controlados por sistemas digitais onde, introdutoriamente, apenas sua característica discreta foi abordada apesar de serem fornecidas noções de sistemas digitais completos. São tratadas importantes técnicas da transformada Z, “lifting” contínuo e funções de Liapunov discretas.



# **DISCRETE-TIME MODELING AND SIMULATION OF CONTINUOUS-TIME DYNAMICAL SYSTEMS**

## **ABSTRACT**

In this work our intent is to give an overview about the main techniques of sampling control and modeling, that is, continuous-time dynamical systems controlled by digital systems where, introductorily, only its discrete characteristic was approached despite be given notions about complete digital systems. There are treated important techniques like Z-Transform, Continuous Lifting and Discrete-Time Liapunov Functions.







## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.2 - Espectro normalizado de Fourier de um sinal de entrada com largura de banda finita.....	14
FIGURA 1.3 - Sinal amostrado no domínio da frequência.....	15
FIGURA 1.4 - Representação analógica em malha-fechada.....	16
FIGURA 1.5 - Equivalência digital da Figura 4.....	16
FIGURA 1.6 - Sistema digital manipulado.....	17
FIGURA 1.7 - A/D generalizado.....	17
FIGURA 1.8 - D/A generalizado.....	17
FIGURA 1.9 - Simplificação do modelo digital generalizado.....	18
FIGURA 1.10 - Equivalente discreto do sistema analógico.....	18
FIGURA 2. 1- Discretização no tempo de um sinal analógico.....	22
FIGURA 3. 1- Diagrama de blocos de um sistema com controle amostrado (controle digital e planta analógica.....	24
FIGURA 3. 2- Integrador “Backward” no domínio do tempo.....	25
FIGURA 3. 3- Mapeamento do plano s para o plano z pela aproximação “Backward”.....	26
FIGURA 3. 4- Mapeamento “Backward” atuando como integrador em z.....	26
FIGURA 3. 5- Equivalência “Backward” atuando como integrador em $k.T_s$ .....	27
FIGURA 3. 6- Integrador “Tustin” no domínio do tempo.....	28
FIGURA 3. 7- Mapeamento entre os planos s e z pelo integrador “Tustin”.....	28
FIGURA 3. 8- Diagrama em blocos básico do integrador por “Tustin”.....	28
FIGURA 3. 9- “Tustin” como integrador.....	29
FIGURA 3. 10- A nova regra 1, Tustin e backward.....	31
FIGURA 3.11- a nova regra 2.....	33
FIGURA 4.1– técnica do lifting.....	36

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Até antes de 1947 eram usados computadores analógicos que faziam uso de algoritmos lógicos iterativos que necessitavam de grandes e pesados equipamentos dotados de grandes circuitos elétricos com válvulas para executá-los, o que implicava um enorme consumo de energia elétrica. Isso era definitivamente inviável para a aplicação da computação em sistemas aeroespaciais, onde qualquer aumento de massa ou de consumo de energia era extremamente significativo. Por esse motivo foi só após o desenvolvimento do transistor, em dezembro de 1947, e, principalmente, dos microprocessadores, em julho de 1958, que o emprego da computação digital na tecnologia aeroespacial tornou-se tão comum e importante.

Mesmo assim, resolvidos os problemas de minimizar o custo nos lançamentos de satélites artificiais, ou ônibus espaciais, etc., reduzindo a massa desses objetos com a utilização da computação digital, nos deparamos com outra série de problemas técnicos a resolver. Tais problemas são características iminentes à tecnologia digital, conforme veremos mais adiante neste trabalho.

Um sistema digital é caracterizado por: amostragem no tempo, atrasos em entradas/saídas e processamento, e a quantização em amplitude. Da amostragem no tempo surgem os seguintes problemas: mascaramento (“aliasing”) e oscilações escondidas (“hidden oscillations”). Entendamos o problema da seguinte maneira: dizer que um dado sistema é discreto no tempo significa dizer que todas as variáveis utilizadas nesse sistema são atualizadas em instantes periódicos de tempo bem definidos cujo intervalo de tempo é denominado “período de amostragem”  $T$ . Analogamente, a frequência ou taxa de amostragem  $\omega_S$  é dada por  $2\pi/T$ . Uma entidade fictícia porém extremamente importante no mundo digital é a frequência de Nyquist  $\omega_N = \omega_S / 2$ . Seja um sistema com uma largura de faixa finita  $\omega_{m\acute{a}x}$ . Haverá o mascaramento (mutilação ou distorção) na reconstrução (ou recuperação) do sinal a partir de suas amostras se  $\omega_N < \omega_{m\acute{a}x}$  (ou  $\omega_S < 2.\omega_{m\acute{a}x}$ ). Isso ocorrerá pois no domínio da frequência não haverá espaço suficiente para dispor comodamente as repetições da largura de faixa finita provocadas pela amostragem. Para que isso não ocorra é necessário que  $\omega_N > \omega_{m\acute{a}x}$  (ou  $\omega_S > 2.\omega_{m\acute{a}x}$ ) que é o conhecido teorema de Nyquist (1928) como podemos ver na Figura 4.4. As oscilações escondidas também ocorrem se  $\omega_N < \omega_{m\acute{a}x}$  (ou  $\omega_S < 2.\omega_{m\acute{a}x}$ ) pois haverão frequências do espectro do sinal de entrada que não serão vistas pelo amostrador.

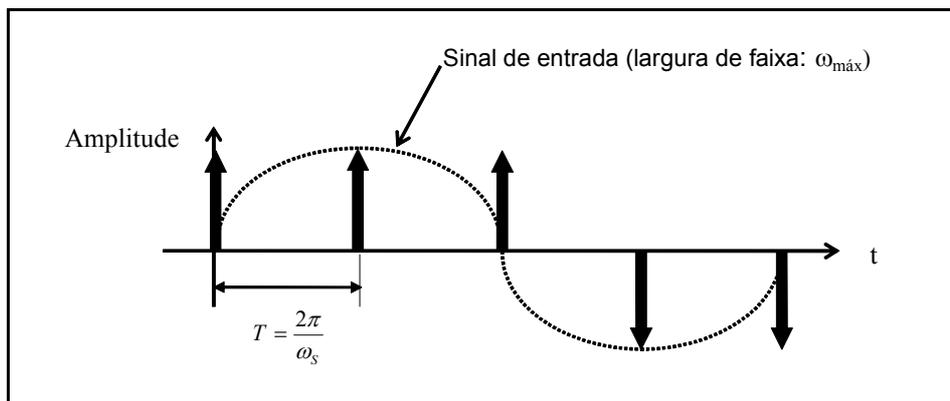


FIGURA 1.1 - Amostragem de um sinal.

Conforme pode-se notar na Figura 1.1, nos nodos tem-se valor nulo de amostragem, nos picos tem-se valor máximo e nos vales, valor mínimo, mostrando os principais elementos relativos à informação de entrada (picos, vales e nodos), por meio dos quais é possível reconstruir o sinal tendo apenas suas amostras.

O mais interessante desses fenômenos do mascaramento e das oscilações ocultas é que eles podem ser umas das causas de instabilidade em sistemas digitais, como mostra este trabalho. Neste trabalho também é sugerido um método de análise que tem apresentado bons resultados para a compreensão do problema e de sua solução.

No domínio da freqüência teríamos, pela transformada de Fourier  $F(\omega)$  do sinal de entrada  $f(t)$  seu espectro de freqüência tal como podemos conferir na Figura 1.2.

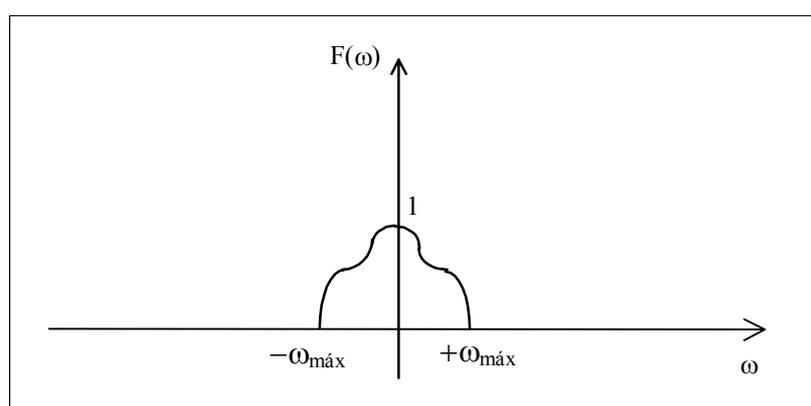


FIGURA 1.2 - Espectro normalizado de Fourier de um sinal de entrada com largura de banda finita.

Quando temos uma amostragem do sinal, sua transformada de Fourier tomará a forma da Figura 1.3 (se o sinal de amostragem puder ser modelado num trem de pulsos). Como se

vê na Figura 1.3,  $\omega_S$  deve ser no mínimo igual a  $2\omega_{m\acute{a}x}$  para não haver mutilação do sinal (ou  $\omega_S \geq 2\omega_{m\acute{a}x}$ ).

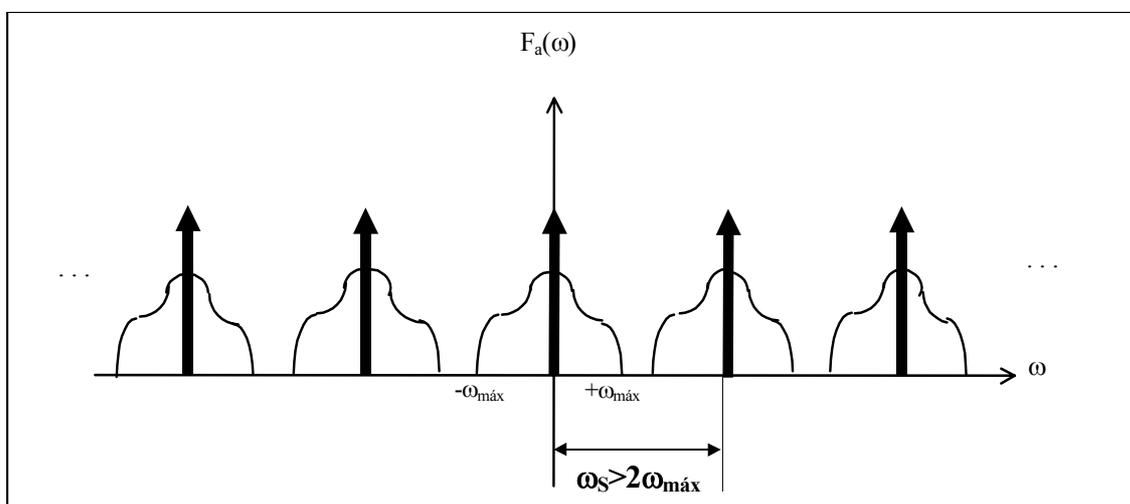


FIGURA 1.3 - Sinal amostrado no domínio da frequência.

Os atrasos em entradas/saídas são gerados nos conversores A/D e D/A, respectivamente, e os atrasos de processamento são causados pelo tempo de processamento que é pertinente a um programa de computador responsável pela política de controle. Em suma, pode-se dizer que os atrasos em entradas/saídas e processamento geram defasagens negativas e a instabilidade pode ocorrer para modos de frequências elevadas. Conforme pode-se verificar no Apêndice A deste trabalho, um filtro Butterworth usado como filtro “anti-aliasing” gera atrasos de resposta que devem se somar aos demais atrasos mencionados. Também há o problema do controle digital com incerteza nos parâmetros da planta como elemento instabilizador, o qual está documentado em Katz (1975). Tais nuances da teoria de controle digital não serão abordadas neste trabalho o qual tem por objetivo investigar os problemas inerentes à discretização no tempo o mais profundamente quanto o tempo disponível para a conclusão desse trabalho permitiu.

A quantização em amplitude de constantes e variáveis em  $2^n$  níveis de quantização de palavras digitais (“digital words”) com  $n$  bits gera o chamado erro de quantização que se interpreta como a mutilação das amplitudes das amostras devido aos ajustes das amplitudes das amostras aos níveis de quantização.

Isto é reduzido pelo crescimento do  $n$ , mas isto eleva o tempo de processamento, demandando microprocessadores, conversores A/D e D/A mais rápidos e caros, etc.

O processo de discretização pode ser muito facilmente analisado por diagrama de blocos como podemos ver a seguir:

Seja o sistema analógico da Figura 1.4.

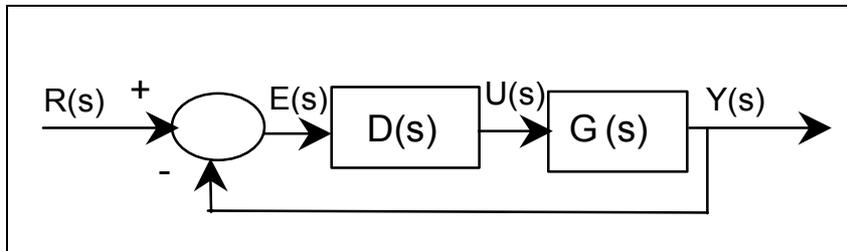


FIGURA 1.4 - Representação analógica em malha-fechada.

A representação equivalente no domínio digital será a da Figura 1.5.

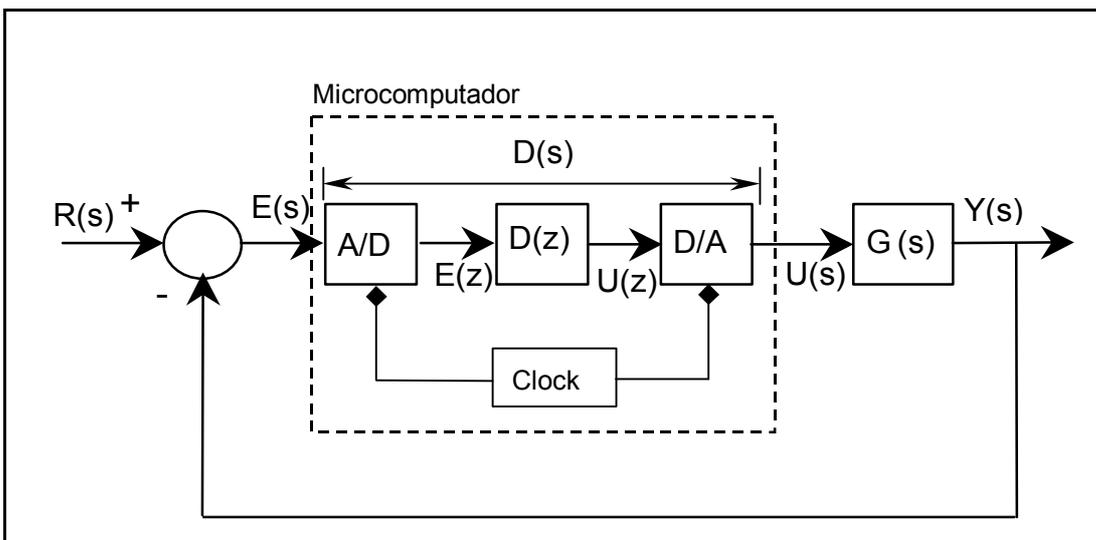


FIGURA 1.5 - Equivalência digital da Figura 4.

As próximas Figuras serão simplificadas, para facilitar.

Uma simples manipulação dos blocos é necessária para se obter o equivalente discreto  $G_{hN}(z)$  da planta analógica  $G(s)$  mostrado na Figura 1.6.

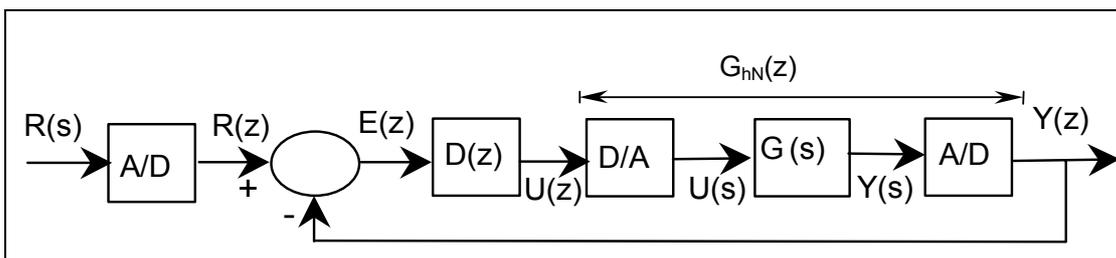


FIGURA 1.6 - Sistema digital manipulado.

Notemos que  $G_{hN}(z)$  é o equivalente discreto por segurador (“Hold”) de ordem enésima da planta analógica.

O conversor A/D pode ser representado pela seguinte configuração generalizada da Figura 1.7.

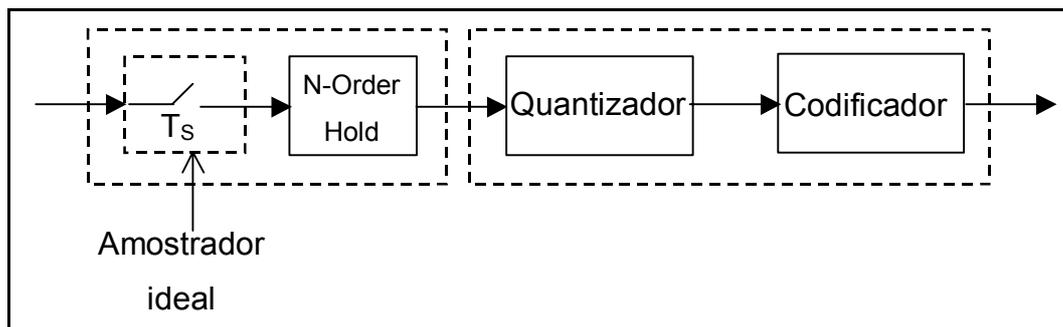


FIGURA 1.7 - A/D generalizado.

O princípio de funcionamento é deveras simples: um sinal analógico (contínuo no tempo e na amplitude) é amostrado de T em T segundos (periodicamente). Podemos dizer que a partir daí o sinal é de tempo discreto. Os valores destas amostras são “segurados” por um segurador (“Hold”); que teoricamente pode ter qualquer ordem durante T segundos. Após isso, o sinal passa por um quantizador que se responsabiliza por ajustar tais sinais de amplitude analógica a certos níveis de amplitude muito bem definidas. Estes sinais ajustados em amplitude ou quantizados serão finalmente convertidos em códigos binários pelo codificador que serão interpretados por um algoritmo digital ou programa de computador o qual gerará saídas digitais.

O conversor D/A possui um funcionamento complementar ao do A/D como podemos verificar na Figura 1.8.

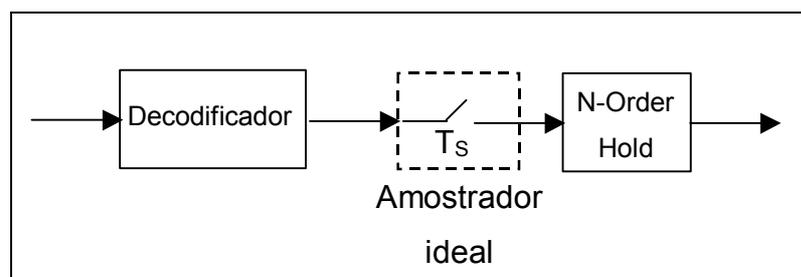


FIGURA 1.8 - D/A generalizado.

O decodificador interpreta códigos binários em amplitudes quantizadas. Tais sinais da saída do D/A serão os sinais de controle.

Uma simplificação com segurador de ordem zero (“Zero-Order Hold”) e sistema discreto está na Figura 1.9.

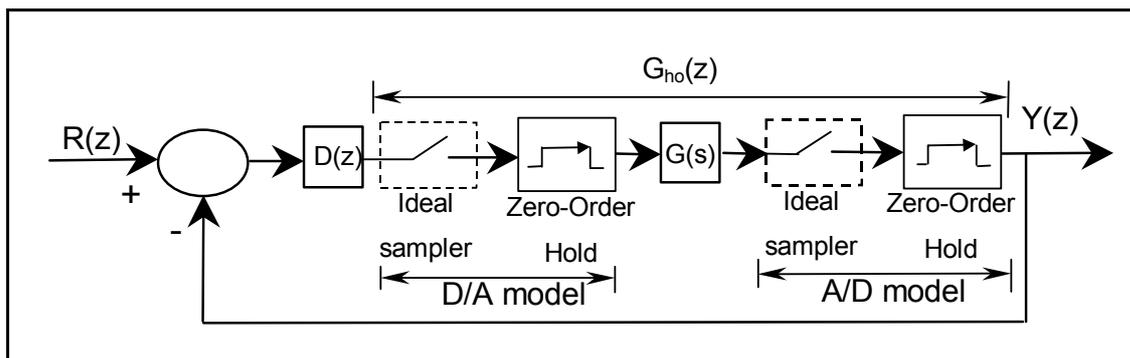


FIGURA 1.9 - Simplificação do modelo digital generalizado.

Aqui fazem-se duas simplificações. Numa delas retira-se a quantização e a codificação/decodificação do sistema. Isso é feito com o objetivo de analisar unicamente os efeitos dos sinais discretos no tempo. Na outra simplificação o segurador de ordem-N (“N-Order Hold”) é transformado num Zero-Order Hold, isto é, um “segurador” de ordem zero. Esta é a equivalência “Hold” de forma mais simples e foi escolhida para descrever o modelo do segurador neste trabalho.

Da Figura 1.9 construímos finalmente a Figura 1.10.

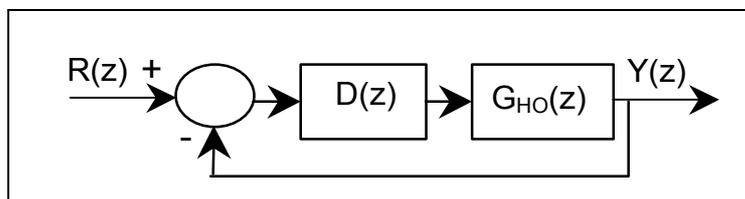


FIGURA 1.10 - Equivalente discreto do sistema analógico.

Na Figura 1.10 temos a política de controle  $D(z)$  que corresponde ao algoritmo de controle do sistema e o equivalente discreto Zero-Order Hold da planta  $G_{HO}(z)$ .

## 1.1 Vantagens e Desvantagens do Uso de Sistemas de Controle Digitais em Comparação com Sistemas de Controle Analógicos

### a. Vantagens:

Sensibilidade apurada : permite usar sinais de baixa energia em sensores. Sinais digitais são mais imunes a ruídos.

Transdutores digitais : entenda transdutor como um dispositivo que transforma um tipo de energia em outra (p. Ex.: tacômetro). A vantagem é que transdutores digitais são relativamente imunes às distorções causadas por ruídos e não-linearidades e são bem mais preciosos que os transdutores analógicos.

Sinais codificados digitalmente : permitem projetos e desenvolvimentos de sofisticados/complexos sistemas de controle devido à habilidade de um sistema de controle digital poder armazenar amostras no tempo durante o processamento de algoritmos complicados e de transmitir informação em tempo discreto com elevada precisão.

Projeto(Design) : ações de controle elaboradas digitalmente por meio de algoritmos computacionais não são fontes adicionais de ruído ao passo que seus equivalentes analógicos (capacitores, indutores, resistores) são fontes geradoras de ruído.

Telemetria : faz uso de multiplexação para usar uma única linha de comunicação para transmitir diversos sinais de controle para diversos atuadores espalhados por uma planta de grandes dimensões.

Semicondutores : dispositivos que permitem grande capacidade de operações a um baixo custo , baixo consumo de energia e com uma pequena massa necessária.

Reprogramação: uma vez elaborado o projeto de controle havendo necessidade posterior de se modificar alguma especificação de controle basta alterar o software de controle (na grande maioria dos casos) sem ter que alterar a posição dos atuadores e sensores. No caso analógico isso não seria possível, havendo a necessidade de se substituir grandes componentes de hardware.

### b. Desvantagens :

Aliasing(mascaramento ou falseamento): este fenômeno trata-se de uma distorção dos sinais analógicos lidos pelos sensores, convertidos digitalmente e entregues ao

controlador digital que os interpretará de uma forma não conveniente, podendo vir até a instabilizar o sistema de controle digital em malha fechada. Ocorrerá sempre que o teorema de Nyquist for violado. Lembrando : (Teorema de Harry Nyquist): “Para que não hajam aliasings é preciso que a frequência de Nyquist  $\omega_n$  seja maior ou igual à máxima componente espectral de frequência da planta  $\omega_{máx}$ ”. Lembre-se sempre que a frequência de Nyquist é a metade da frequência de amostragem. Assim sendo, podemos escrever de forma equivalente o Teorema de Nyquist: “para que não hajam aliasings é preciso que a frequência de amostragem  $\omega_s$  seja no mínimo igual ao dobro da máxima componente espectral de frequência da planta  $\omega_{máx}$ ”.

Hidden Oscillations(Oscilações ocultas): este fenômeno ocorre quando a máxima componente espectral de frequência da planta  $\omega_{máx}$  é maior que a frequência de amostragem  $\omega_s$ . Haverá uma certa porção de frequências da planta que os sensores não informarão ao controlador o que pode gerar instabilidade em alguns casos visto que o controlador pode realimentar positivamente alguma componente espectral da planta que não é visto pelos sensores (modo de vibração) e instabilizar o sistema de controle digital.

Quantização: devido ao processo de quantização (amostragem em amplitude)os conversores A/D fazem aproximações dos sinais analógicos provenientes dos sensores à certos níveis (níveis de quantização) muito bem estabelecidos. As diferenças entre os sinais aproximados e os reais dá o ruído de quantização que interfere na resposta do controlador. Além disso aumentar o número de níveis de quantização arbitrariamente não seria uma solução economicamente viável, pois encareceria absurdamente os conversores A/D e D/A ou então os tornaria não-comercializáveis (de uso exclusivo das forças armadas).

OBS: A informação analógica perdida devido aos fenômenos da Aliasing , Hidden Oscillationse quantização jamais será recuperada. Não confundir com o que é feito no campo de processamento digital de sinais em que a entrada já é um sinal amostrado no tempo nesse caso não há os fenômenos das Aliasings nem Hidden Oscillations.

Delays : atrasos gerados em entradas , processamento e saídas.

Projetos : análise matemática de sistemas de controle digitais é algumas vezes mais tediosa, em comparação como os casos analógicos.

Estabilidade : converter um sistema analógico num sistema a tempo discreto sem mudar os parâmetros de controle degrada a margem de estabilidade.

Palavras de comprimento finito : computadores digitais precisam fazer truncamentos numéricos e dependendo da precisão pode se tornar mais ou menos evidente um ruído em

regime permanente resultado de um “ciclo-limite” do sistema de ontrele digital em malha-fechada.

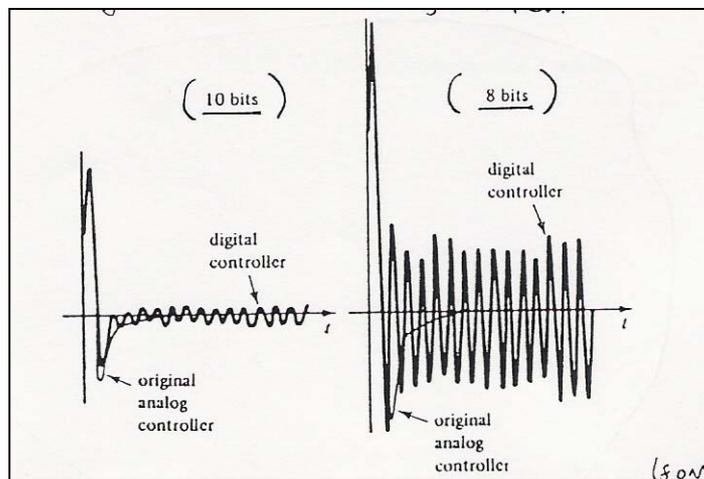


FIGURA 1.11 - interferência causada por palavras de diferentes comprimentos.

FONTE: Katz, 1981.

## CAPÍTULO 2    RELAÇÃO ENTRE A TRANSFORMADA DE LAPLACE E A TRANSFORMADA Z

Seja o sinal  $f(t)$  (analógico) e o seu correspondente sinal  $f_T(t)$  (discreto no tempo) tal como mostrado na Figura 2.1.

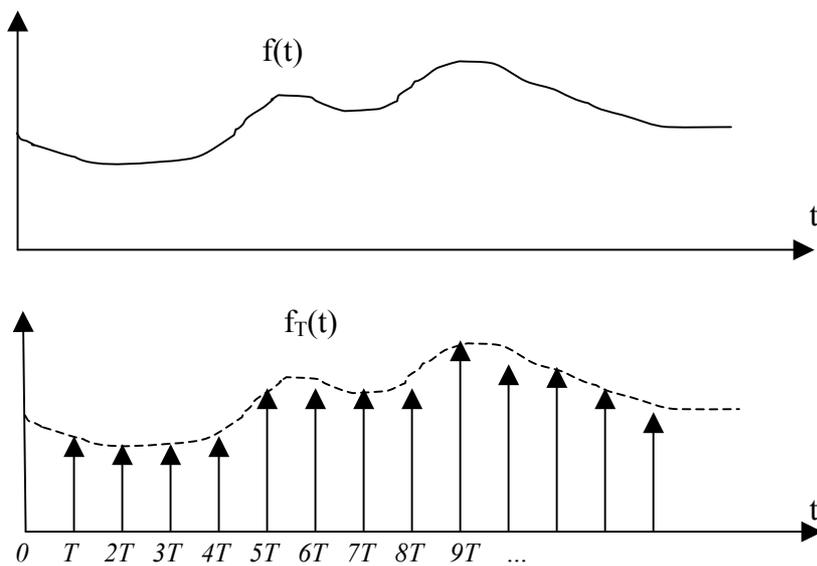


FIGURA 2. 1- Discretização no tempo de um sinal analógico.

A função  $f_T(t)$  consiste na soma de todas as amostras impulsivas tal como mostrado abaixo:

$$f_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) \quad (2.1)$$

Vamos aplicar a transformada de Laplace em (2.1), mas antes recordemos que a transformada de Laplace do delta de Dirac é dado por,

$$L\{\delta(t - kT)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t - kT) dt = e^{-kTs} \quad (2.2)$$

Assim,

$$L\{f_T(t)\} = L\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) \right\} \quad (2.3)$$

$$L\{f_T(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT).L\{\delta(t-k.T)\} \quad (2.4)$$

$$L\{f_T(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT).e^{-ksT} \quad (2.5)$$

Fazendo um simples ajuste de notação, chamando  $z = e^{-sT}$  e  $f_k = f(k.T)$  teremos a transformada Z:

$$Z\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k .z^{-k} \quad (2.6)$$

Essa equação  $z = e^{-sT}$  estabelece um “perfeito” mapeamento biunívoco entre o espaço das funções contínuas e o espaço das funções discretas. É o mapeamento exponencial mostrado na figura 2.2 na prática nunca é realizado por limitações das técnicas digitais e que por causa disso é realizado por meio de aproximações, como veremos na próxima seção.

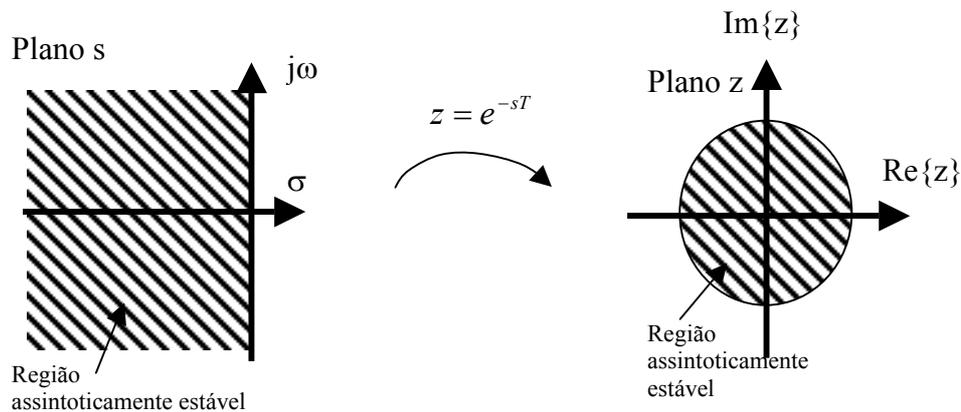


FIGURA 2. 2- o Mapeamento Exponencial.

## CAPÍTULO 3 EXTRAPOLADORES NUMÉRICOS: APROXIMAÇÕES ANALÓGICO-DISCRETAS

### 3.1 Introdução.

Analisaremos a seguir as aproximações “backward”, Tustin, “step invariance”, a “nova-regra 1” (Souza-Tredinnick, 1999), “nova-regra 2” (Souza-Tredinnick, 2001), método da função de Liapunov discreta, espaço de funções e EDOs descontínuas (Filippov).

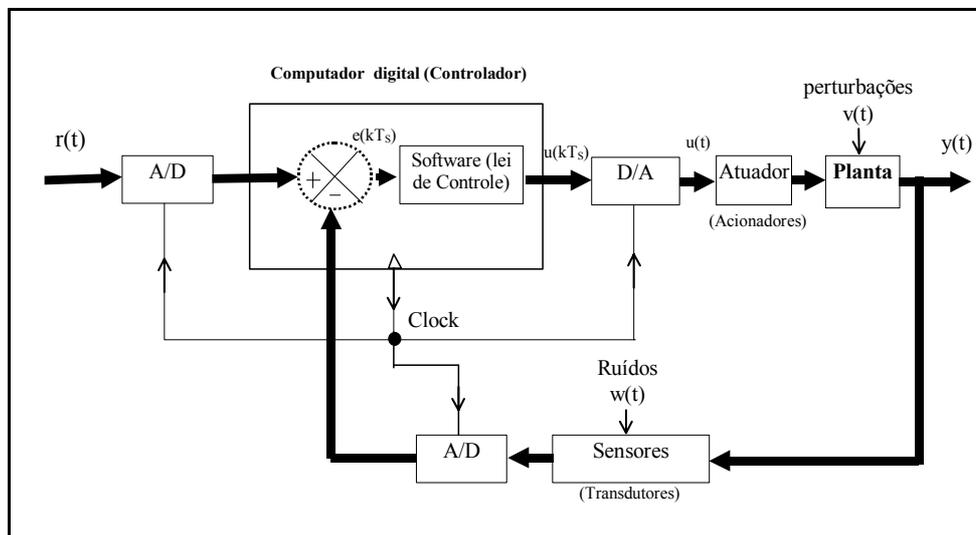


FIGURA 3. 1- Diagrama de blocos de um sistema com controle amostrado (controle digital e planta analógica).

Serão desconsideradas as aproximações “Forward” e SKG (Shneider-Kaneshige-Groutage). Isso porque a primeira se mostra irrealizável na prática (Katz, 1981) por se apresentar não causal e a segunda gera um arranjo numericamente instável para uma ação de controle derivativo (Tredinnick, 1999).

### 3.2 Aproximação “Backward”.

Tendo como base a Figura 3.1, dado um sinal de entrada  $e_k$  (que no consecutivo instante passado, foi  $e_{k-1}$ ) determine a saída (sua integral)  $u_k$ . Este método é também conhecido como método de Euler. Matematicamente isso é expresso pela seguinte equação a diferenças finitas (equivalente discreto de uma equação diferencial) conforme mostra a Figura 3.2.

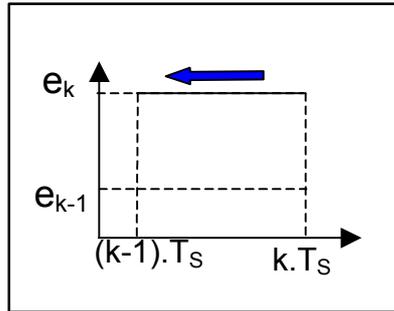


FIGURA 3. 2- Integrador “Backward” no domínio do tempo.

$$e_k = \frac{\nabla u_k}{T_s} \quad (3.1)$$

$$\nabla u_k = u_k - u_{k-1} \quad (3.2)$$

Agora faremos uso do que aprendemos a respeito da transformada-Z de  $x_{k-1}$  por (2.6) calculando a transformada-Z da equação acima:

$$T_s \cdot E(z) = U(z) - z^{-1} \cdot U(z) \quad (3.3)$$

$$\frac{E(z)}{U(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{T_s} = \frac{z - 1}{T_s \cdot z} \quad (3.4)$$

Portanto, a equivalência entre o plano-s e o plano-z da Figura 3.3 é dada por:

$$\frac{E(s)}{U(s)} = s \sim \frac{E(z)}{U(z)} = \frac{z - 1}{T_s \cdot z} \quad (3.5)$$

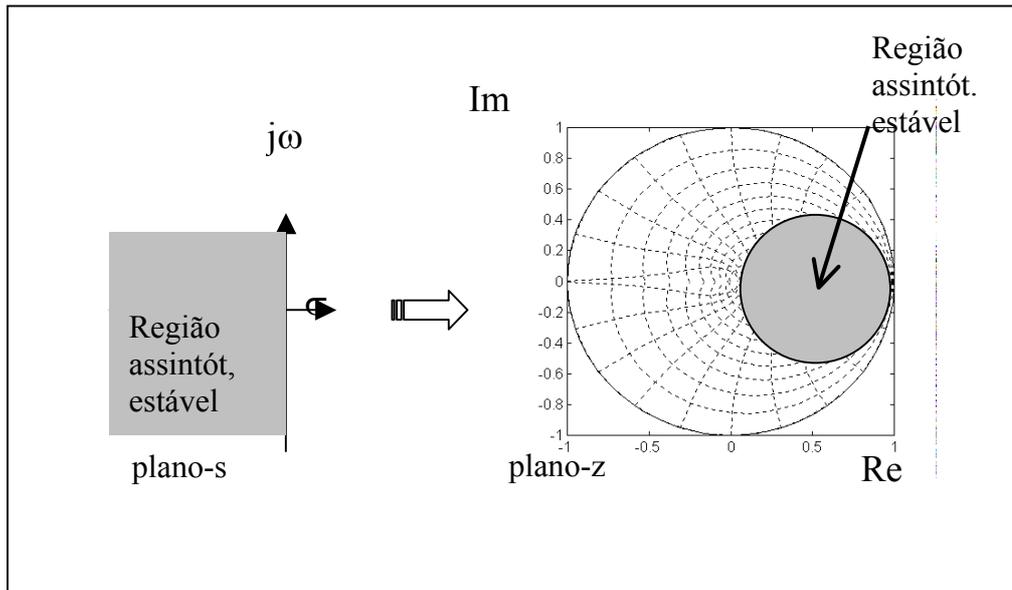


FIGURA 3. 3- Mapeamento do plano s para o plano z pela aproximação “Backward”.

Exemplo 1: mapeamento “Backward” atuando como integrador, conforme mostrado na Figura 3.4.

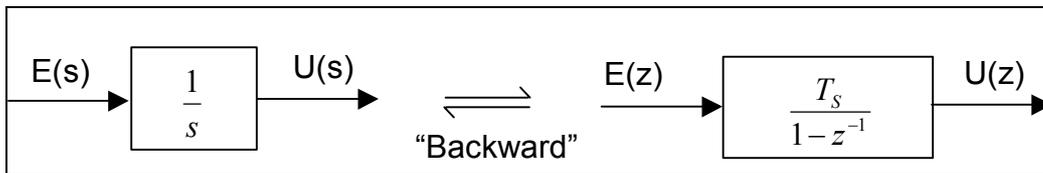


FIGURA 3. 4- Mapeamento “Backward” atuando como integrador em z.

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T_s}{1 - z^{-1}} \quad (3.6)$$

$$U(z) - z^{-1} \cdot U(z) = T_s \cdot E(z) \quad (3.7)$$

Aplicando a transformação inversa teremos:

$$u_k - u_{k-1} = T_s \cdot e_k \quad (3.8)$$

$$u_k = u_{k-1} + T_s \cdot e_k \quad (3.9)$$

A representação gráfica da equação (3.9) está na Figura 3.5.



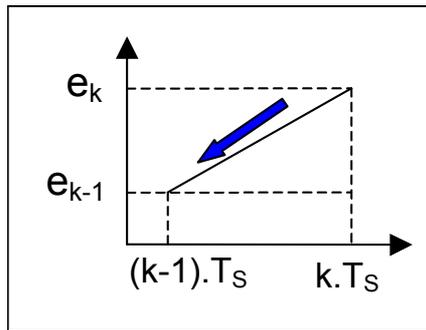


FIGURA 3. 6- Integrador “Tustin” no domínio do tempo.

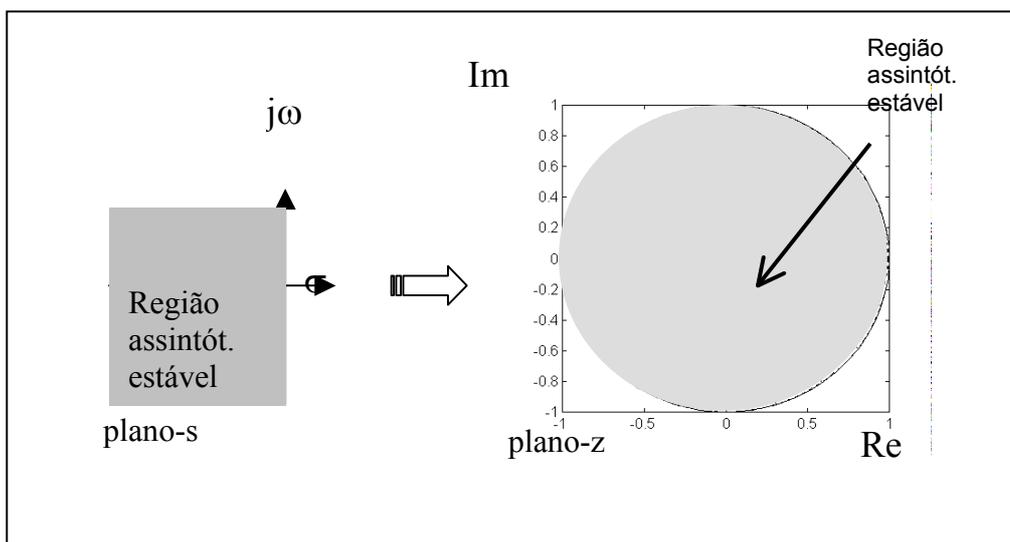


FIGURA 3. 7- Mapeamento entre os planos s e z pelo integrador “Tustin”.

Exemplo 2: equivalência “Tustin” atuando como integrador (Figura 3.8).

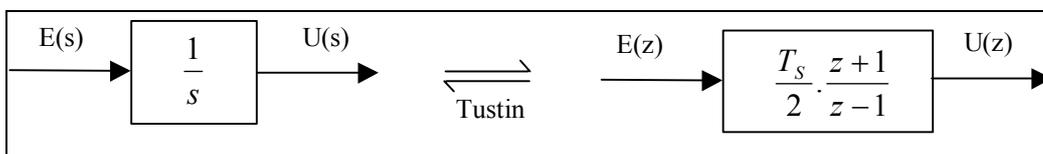


FIGURA 3. 8- Diagrama em blocos básico do integrador por “Tustin”.

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} = \frac{T_s}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (3.14)$$

$$U(z) - z^{-1} \cdot U(z) = \frac{T_s}{2} \cdot (E(z) + z^{-1} \cdot E(z)) \quad (3.15)$$

Aplicando uma transformação inversa vem:

$$u_k - u_{k-1} = \frac{T_s}{2} \cdot (e_k + e_{k-1}) \quad (3.16)$$

$$u_k = u_{k-1} + \frac{T_s}{2} \cdot (e_k + e_{k-1}) \quad (3.17)$$

Notemos que  $T_s \cdot \frac{(e_k + e_{k-1})}{2}$  é a área de um trapézio de altura  $T_s$  e bases  $e_k$  e  $e_{k-1}$  (Figura 3.9).

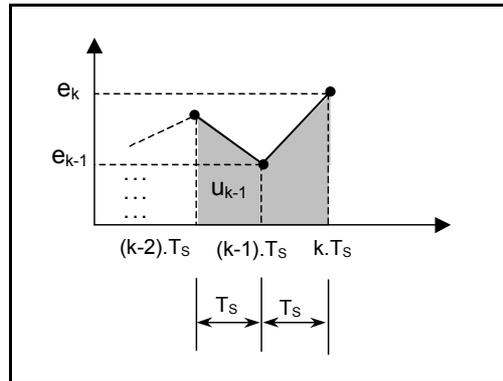


FIGURA 3. 9- “Tustin” como integrador.

### 3.4 Aproximação “Zero-Order Hold” (“Step Invariance Method”).

A aproximação pelo segurador de ordem zero ou “zero-order hold” (ZOH) é também conhecida como aproximação pelo método “Step Invariance”. Matematicamente a discretização de uma função de transferência analógica  $G(s)$  por tal método é dada por,

$$G_{ZOH}(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \Big|_{t=kT} \right\} \quad (3.18)$$

Onde  $Z$  corresponde à transformada- $Z$ ,  $L^{-1}$  corresponde à transformada inversa de Laplace (a qual está focada em  $t=k.T$ ; sendo  $T$  o período de amostragem), e  $z$  é a variável complexa  $z = e^{-sT}$ .

### 3.5 Aproximação nova-regra 1 (Tredinnick-Souza, 1999 e 2002).

As limitações dos métodos clássicos no que se refere à preservação da estabilidade na presença de ganhos de controle elevados e de altos valores em períodos de amostragem levaram ao desenvolvimento de um método de mapeamento alternativo que chamamos de “nova-regra 1” o qual é descrito pela seguinte equação à diferenças-finitas:

$$e_k = \frac{2}{T} \cdot \nabla u_k - \xi \cdot e_{k-1} \quad (3.19)$$

Aplicando a transformada Z em (3.19) teremos,

$$s \sim \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+\xi} \quad ; 0 < \xi < 1 \quad (3.20)$$

a qual desloca um pólo de  $z = -1$  da regra de Tustin para  $z' = -\xi$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ . Isto evita ou retarda a instabilidade em sistemas amostrados em malha-fechada e o  $\xi$  é um novo parâmetro de projeto (além dos ganhos de controle e do período de amostragem). A nova regra 1 pode ser reduzida à regra de Tustin ou ao “backward”: ao Tustin se  $\xi = 1$ ; e ao backward se  $\xi = 0$ . Podemos escrever de forma invertida,

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+\xi} \Rightarrow z = \frac{2+s.T.\xi}{2-s.T} \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (3.21)$$

A nova-regra 1 mapeia o semiplano esquerdo do plano s para o interior de um círculo dado por (3.21). Para provar isso note que,

$$\text{if } \xi = 1 \rightarrow \text{centro} = 0 ; \text{raio} = 1; \text{(Tustin)}; \quad (3.22)$$

$$\text{if } \xi = 0 \rightarrow \text{centro} = \frac{1}{2} ; \text{raio} = \frac{1}{2}; \text{(backward)}; \quad (3.23)$$

A expressão mais simples para o centro é,

$$\text{center} = \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) \quad (3.24)$$

Daí,

$$z = \frac{\frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) [2 - j \cdot \omega \cdot T] - \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) [2 - j \cdot \omega \cdot T] + 2 + j \cdot \omega \cdot T \cdot \xi}{2 - j \cdot \omega \cdot T} \quad (3.25)$$

$$z = \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) \cdot \left[ \frac{2 - j \cdot \omega \cdot T}{2 - j \cdot \omega \cdot T} \right] + \frac{-\frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) [2 - j \cdot \omega \cdot T] + 2 + j \cdot \omega \cdot T \cdot \xi}{2 - j \cdot \omega \cdot T} \quad (3.26)$$

$$z - \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) = \frac{1 + \xi + j \cdot \omega \cdot T \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi)}{2 - j \cdot \omega \cdot T} \quad (3.27)$$

$$z - \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi) \cdot \exp \left( j \tan^{-1} \left( \frac{4 \cdot \omega \cdot T}{4 - (\omega \cdot T)^2} \right) \right) \quad (3.28)$$

O que prova a declaração. Assim, a equação para a nova regra 1 é dada por:

$$\left| z - \frac{1}{2}(1 - \xi) \right| = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.29)$$

Podemos ver na Figura 3.10 que a regra de Tustin e a regra backward são casos especiais da nova regra 1.

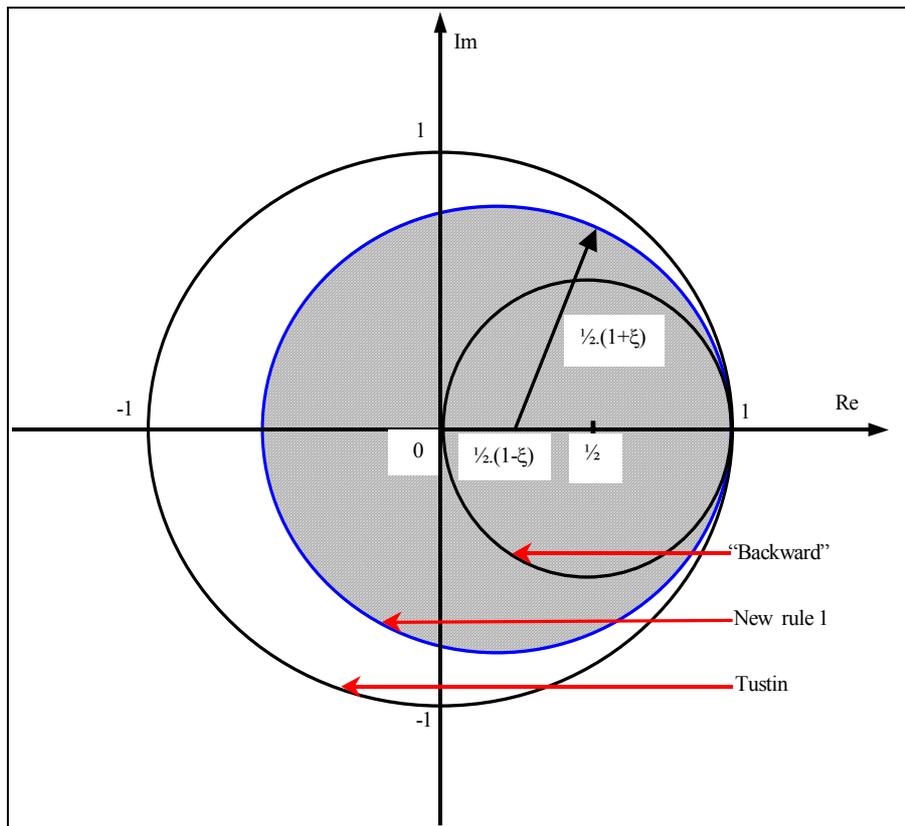


FIGURA 3. 10- A nova regra 1, Tustin e backward.

### 3.6 Aproximação nova-regra 2 (Tredinnick-Souza, 2002).

A equação a diferenças finitas da nova regra 2 é dada por:

$$e_k = \frac{2}{T} \cdot (u_k - \xi_1 u_{k-1}) - \xi_2 \cdot e_{k-1} \quad (3.30)$$

Que apresenta dois parâmetros de projeto além do período de amostragem.

Aplicando a transformada Z temos,

$$s \sim \frac{2}{T} \cdot \frac{z - \xi_1}{z + \xi_2} \quad ; 0 < \{\xi_1, \xi_2\} < 1 \quad (3.31)$$

Analogamente ao que foi calculado para a nova regra 1,

$$z = \frac{\frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)[2 - j\omega T] - \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)[2 - j\omega T] + 2\xi_1 + j\omega T \cdot \xi_2}{2 - j\omega T} \quad (3.32)$$

$$z = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2) \cdot \frac{[2 - j\omega T]}{[2 - j\omega T]} + \frac{-\frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)[2 - j\omega T] + 2\xi_1 + j\omega T \cdot \xi_2}{2 - j\omega T} \quad (3.33)$$

$$z - \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2) = \frac{\xi_2 - \xi_1 - \frac{\xi_1}{2} \cdot j\omega T + \frac{\xi_2}{2} \cdot j\omega T + 2\xi_1 + \xi_2 j\omega T \cdot \xi}{2 - j\omega T} \quad (3.34)$$

$$z - \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2) = \frac{\xi_1 + \xi_2 + j\omega T \cdot \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)}{2 - j\omega T} \quad (3.35)$$

$$z - \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2) = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) \cdot \frac{2 + j\omega T}{2 - j\omega T} \cdot \frac{2 + j\omega T}{2 + j\omega T} \quad (3.36)$$

$$z - \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2) = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) \cdot \frac{(2 + j\omega T)^2}{4 + (\omega T)^2} \quad (3.37)$$

$$z - \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2) = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) \cdot \exp\left(j \tan^{-1}\left(\frac{4\omega T}{4 - (\omega T)^2}\right)\right) \quad (3.38)$$

$$\left|z - \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)\right| = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) \quad (3.39)$$

A qual descreve uma família de círculos dentro do círculo unitário com centro sobre o eixo real.

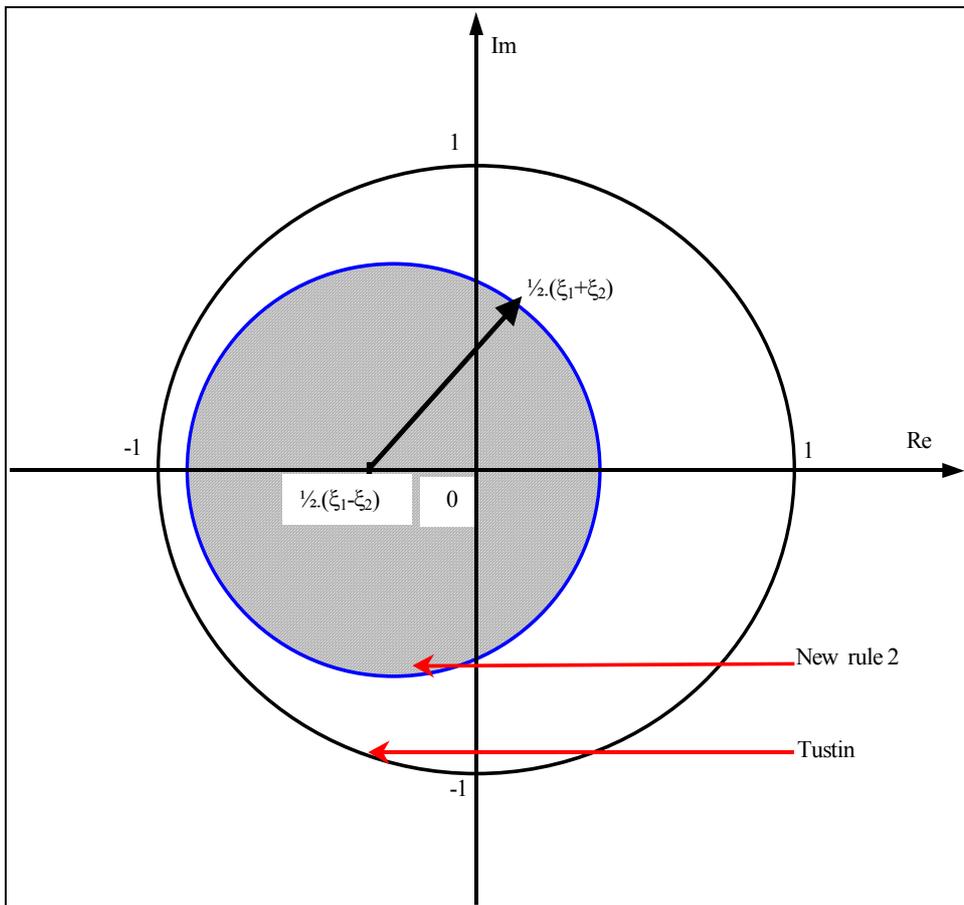


FIGURA 3.11- a nova regra 2.

Podemos notar pela Figura 3.11 que os mapeamentos Tustin, backward e nova-regra 1 são casos particulares da nova regra 2.

## CAPÍTULO 4 OS MÉTODOS MAIS IMPORTANTES PARA MODELAR SISTEMAS DE CONTROLE AMOSTRADOS

### 4.1 Limitações para o uso da Transformada Z.

Apesar da Transformada-Z ser uma poderosa ferramenta de análise matemática e muito usual (devido a sua simplicidade) é importante termos em mente que em alguns casos ela pode fornecer alguns resultados imprecisos baseados nas simplificações a seguir apresentadas:

1) O uso do conceito de amostrador ideal na análise de um sistema em tempo-discreto está baseado no modelo de que as amostras geradas pelo “sampler” é rigorosamente um trem de impulsos  $x^*(k)$ . Entretanto, na realidade o que ocorre é que há uma duração não-nula destas amostras, logo não se trata de um trem de impulsos e sim de um trem de pulsos de largura finita e pequena. Tal problema ocorre devido à uma inércia natural do chaveamento do “sampler” (amostrador).

A transformada inversa de  $X(z)$  pode não produzir uma função  $x(k)$  única, para alguns casos (Houpis, 1985). O método da transformada Z modificada remove esta limitação porém é um método de difícil manipulação (Houpis, 1985).

### 4.2 Método da Função de Liapunov Discreta (Tredinnick-Souza, 2004).

Como citado na literatura (Tredinnick, 2004) uma classe de sistemas com parâmetros distribuídos que inclui estruturas flexíveis pode ser descrita por,

$$\dot{v} = Av + Bu \tag{4.1}$$

com  $v(0)=v_0$  e  $u$  é o “direct velocity feedback control” (DVFB), que realimenta apenas a informação a respeito das velocidades, teremos,

$$\dot{v} = A_c v \tag{4.2}$$

onde,  $A_c = A - BQB'$  onde  $Q$  é positiva-definida.

A (4.1) discretizada por Tustin dá,

$$v_{k+1} = [2I - TA_c]^{-1} [2I + TA_c] v_k \tag{4.3}$$

A análise de estabilidade por uma função de Liapunov discreta  $V(v_k) = \frac{1}{2} v_k' P v_k$  permite chegar ao seguinte teorema,

**Teorema 1:** o sistema discreto  $v_{k+1}$  (4.3) permanecerá estável se,

$$\lambda_{\min}(Q) > \lambda_{\max}((e^{A_c T})' P e^{A_c T}) \quad (4.4)$$

*Prova:* a equação  $\dot{v} = A_c v$  mapeada por Tustin dá,

$$\frac{2}{T}(v_{k+1} - v_k) = A_c (v_{k+1} + v_k) \quad (4.5)$$

$$v_{k+1} = [2I - T A_c]^{-1} [2I + T A_c] v_k$$

Lembrando que o aproximante de Padé para a função exponencial é dado por,

$$e^{A_c T} = \left[ e^{-\frac{T}{2} A_c} \right]^{-1} \left[ e^{\frac{T}{2} A_c} \right] = \left[ I - A_c \frac{T}{2} + \dots \right]^{-1} \left[ I + A_c \frac{T}{2} + \dots \right] \quad (4.6)$$

$$e^{A_c T} \approx \left[ I - A_c \frac{T}{2} \right]^{-1} \left[ I + A_c \frac{T}{2} \right] \quad (4.7)$$

Assim sendo podemos reconstruir a exponencial como mostrado abaixo,

$$v_{k+1} = e^{A_c T} v_k \quad (4.8)$$

Seja  $P > 0$  e a função de Liapunov discreta,

$$V(v_k) = \frac{1}{2} v_k' P v_k \quad (4.9)$$

$$V(v_{k+1}) = \frac{1}{2} v_{k+1}' P v_{k+1} = \frac{1}{2} v_k' (e^{A_c T})' P e^{A_c T} v_k \quad (4.10)$$

$$\Delta V_k = -\frac{T}{2} v_k' \left[ P - (e^{A_c T})' P e^{A_c T} \right] v_k < 0 \quad (4.11)$$

É necessário que o termo entre colchetes seja positivo definido, e assim,

$$\lambda_{\min}(Q) > \lambda_{\max}((e^{A_c T})' P e^{A_c T}). \quad \square \quad (4.12)$$

### 4.3 Método do Espaço de Funções - Técnica do “Lifting” Contínuo.

Yamamoto em 1990 desenvolveu essa técnica que tenta contornar as limitações da transformada Z, evitando ter que usar transformada Z modificada, para preservar a informação do sistema analógico entre os instantes de amostragem do controlador digital. A técnica até hoje não apresentou resultados práticos satisfatórios.

Seja T um período de amostragem fixo. A idéia é olhar a trajetória do vetor de estados  $\underline{x}(t)$  controlado por uma lei de controle discreta no tempo como uma seqüência de funções

$\{x_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty}$  definida por,

$$x_k(\theta) := x([k-1]T + \theta) \quad (4.13)$$

e daí dar uma regra precisa para a transição discreta do estado  $x_k$ .

A figura 25 mostra uma representação gráfica da técnica do lifting.

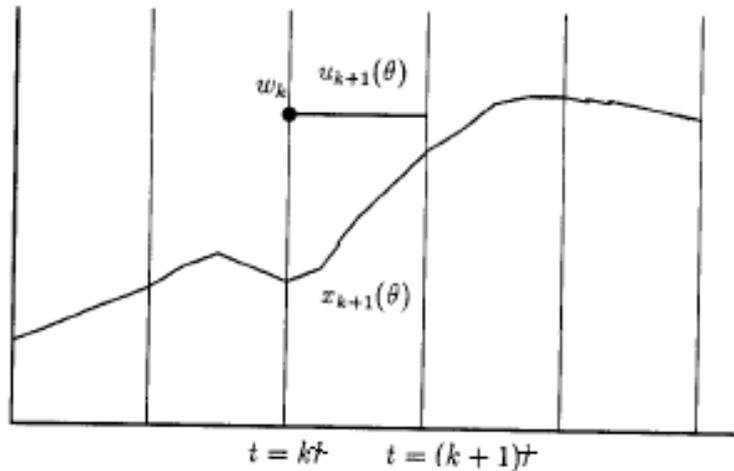


FIGURA 4.1– técnica do lifting.

A idéia é ter um modelo em tempo-discreto com a informação entre amostras. Assim, seja o modelo analógico,

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\underline{x}(t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Onde a solução para o sistema híbrido é,

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1}(\theta) &= e^{AT} \cdot \underline{x}_k(T) + \int_0^\theta e^{A(\theta-\tau)} Bu_{k+1}(\tau) d\tau \\ y_k(\theta) &= C\underline{x}_k(\theta) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Com,

$$\theta \in (0, T] \quad (4.16)$$

#### 4.4 Equações Diferenciais com Lado Direito Descontínuo

Filippov iniciou nos anos 60 um estudo qualitativo a respeito de equações diferenciais com termo forçante descontínuo. Posteriormente, os trabalhos de Filippov foram estendidos por Sesekin dentre outros. Dentre diversas considerações talvez a mais importante seja um

teorema a respeito da existência de soluções periódicas quando temos descontinuidades periódicas do lado direito da equação diferencial.

Uma equação diferencial ordinária não linear típica para sistemas com atrito descontínuo pode ser expressa por,

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x) = e(t) \quad (4.17)$$

Em Filippov (1964) atesta a existência de uma solução periódica para esse caso em que se a função  $e(t)$  é mensurável, com período  $T$  e limitada  $m \leq e(t) \leq M$  então, dentre algumas outras considerações, então (3.43) possui “pelo menos uma solução com período  $T$ ”. Todas essas teorias desenvolvidas por Filippov e seus sucessores são considerações qualitativas apenas e de extrema dificuldade matemática. Nenhum resultado prático foi alcançado até hoje.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Filippov, A.F. **Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side**. American math. Society, v.42, 1964.

Franklin, G.F.; Powell, J.D. **Digital Control of Dynamic Systems**. Addison-Wesley, 1981.

Houpis, C.H.; Lamont, G.B. **Digital Control Systems: theory, hardware, software**. McGraw-Hill, 1985.

Katz, P. **Digital Control Using Microprocessors**. Prentice-Hall, 1981.

Muth, E.J. **Transform Methods with Applications to Engineering and Operations Research**. Prentice-Hall, 1977.

Phillips, C.L.; Nagle, H.T. **Digital Control System Analysis and Design**. Prentice-Hall, 1995.

Tredinnick, M.R.A.C. **Controle Discreto da Atitude de um Satélite Artificial com Apêndices Flexíveis**. INPE – Dissertação de Mestrado. São José dos Campos, 1999.

Tredinnick, M.R.A.C.; Souza, M.L.O.; Souza, L.C.G. **An analytical approach for discrete controllers design using a new S-Z mapping with two tuning parameters**. SAE, 2002.

Yamamoto, Y. **New Approach to Sampled Data Control Systems: a function space method**. IEEE, 29<sup>th</sup> CDC Aut. Control, TA15-1. 1990.

Yamamoto, Y. **Frequency Response of Sampled-Data Systems**. IEEE Trans. Aut. Contr., v.41, n.2, 1996.