



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-13077-PUD/177

ANÁLISE FUNCIONAL APLICADA A CONTROLE

Marcelo Ricardo Alves da Costa Tredinnick

Exame de Qualificação de Doutorado (quarto tema) do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais, orientado pelo Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza, aprovado em 24 de maio de 2005.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Marcelo Lopes de Oliveira e Souza pelos ensinamentos a respeito de Teoria de Conjuntos e Topologia e aos demais membros da banca desse Exame de Qualificação de Doutorado pelas valiosas observações e comentários feitos: Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza, Dr. Mário Cezar Ricci e Dr. Gilberto da Cunha Trivelato.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo fornecer conceitos básicos a respeito de Teoria de Conjuntos, Topologia e Análise Funcional bem como dar conceitos básicos a respeito da Norma do Grafo e como os conceitos da Análise funcional poderiam ser úteis para se determinar um majorante estabilizador para o período de amostragem em sistemas amostrados de controle.

FUNCTIONAL ANALYSIS APPLIED TO CONTROL

ABSTRACT

The goal of this work is to give basic knowledge in respect the Set Theory, Topology and Functional Analysis as well give basics concepts in respect to Graph Norm and useful concepts of Functional Analysis to determine a stabilizing upper bound for sampling period in sampled-data control systems.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	14
LISTA DE SÍMBOLOS	17
CAPÍTULO 1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA ANÁLISE FUNCIONAL ÚTEIS À TEORIA DE CONTROLE.....	21
CAPÍTULO 2 INTRODUÇÃO À NORMA DO GRAFO.....	30
CAPÍTULO 3 INVESTIGAÇÕES COM A NORMA DO GRAFO A RESPEITO DAS REGIÕES DE ESTABILIDADE/INSTABILIDADE EM FUNÇÃO DO PERÍODO DE AMOSTRAGEM.....	37
CONCLUSÃO 	42
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	46

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 - Classificação das funções $f : A \rightarrow B$	22
FIGURA 1.2 - Pontos interiores de A.	25
FIGURA 1.3 - Ponto de Acumulação x.....	25
FIGURA 1.4 - Raio espectral em função do período de amostragem numa simulação numérica.	28
FIGURA 2.1	32
FIGURA 2.2	32
FIGURA 3.1 – teste de convergência.	38
FIGURA 3.2 - convergência de M.	40
FIGURA 3.3 - convergência of M.....	41

LISTA DE SÍMBOLOS

- \subseteq - O conjunto antes do símbolo está contido ou é igual ao que está depois do símbolo
- \times - Produto cartesiano
- R** - Range
- \mathfrak{F} - Campo
- S** - Funcional linear
- \hat{A} - Conjunto dos pontos de acumulação
- \bar{A} - Fecho
- \emptyset - Letra do alfabeto norueguês correspondente ao conjunto vazio
- Γ - Topologia
- $\|\cdot\|$ - Norma
- $W^{s,p}$ - Espaço de Sobolev das funções diferenciáveis até a ordem s e também contínuas em L^p .
- r** - Raio espectral
- ρ - Conjunto resolvente
- σ - *Spectrum* (Espectro, em português)
- σ_p - *Spectrum* pontual
- σ_r - *Spectrum* resolvente
- σ_c - *Spectrum* contínuo
- $d_{(P1,P2)}$ - Métrica do grafo
- $G_T(z)$ - Discreto verdadeiro
- ΔG_* - *Aliasing* (em português: mascaramento ou falseamento)
- $G_{*,T}$ - Transformada Z da Planta

**CAPÍTULO 1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA ANÁLISE FUNCIONAL ÚTEIS
À TEORIA DE CONTROLE**

Def 1 – Função (ou *Mapeamento*, ou *Transformação*, ou *Operador*)

Uma função f de um conjunto A para um conjunto B é uma relação denotada por $f : A \rightarrow B$, onde:

i) $f \subseteq A \times B$

ii) $\forall x \in A \exists y \in B : (x, y) \in f$

iii) $\forall x \in A$ se $y_1, y_2 \in B$ e $(x, y_1) \in f$ e $(x, y_2) \in f$ então $y_1 = y_2$

O conjunto A é o **Domínio** de f , o conjunto B é chamado **Contradomínio** de f , o elemento $y \in B$ em $f(x) = y$ é chamado de **Imagem** de $x \in A$ e o **Range** ou **Conjunto Imagem** é dado por:

$$R(f) = \{f(a) : a \in A\} \tag{1.1}$$

Def 2 – Grafo

É o conjunto dos pares ordenados (a, b) onde $a \in A$ e $b \in B$ relacionados pela função $f : A \rightarrow B$ e é denotado por,

$$\text{gráfico } f = \{(a, f(a)) : a \in A\} \tag{1.2}$$

Nota: Classificação de funções: na figura 1 estão mostrados os diversos tipos de funções que existem.

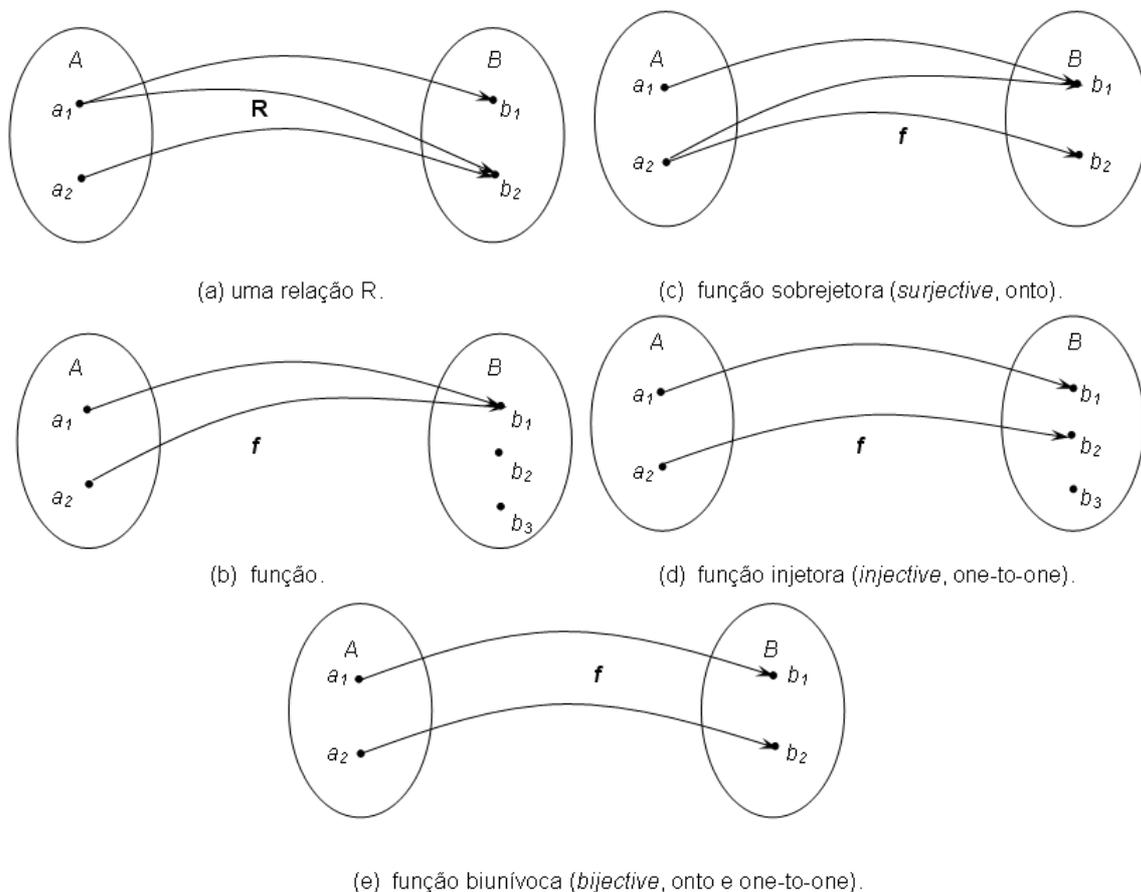


FIGURA 1.1 - Classificação das funções $f : A \rightarrow B$.

Teorema 1 (Oden, 1979): Uma função $f : A \rightarrow B$ é inversível se e somente se ela for biunívoca.

Def 3 – Morfismos

Morfismo é um mapeamento entre dois objetos numa categoria abstrata que no caso de conjuntos pode ser:

Homeomorfismo: um morfismo geral entre dois conjuntos A e B .

Isomorfismo: é um morfismo biunívoco (onto e one-to-one) entre dois conjuntos A e B .

Automorfismo: é um Isomorfismo de um conjunto nele mesmo.

Endomorfismo: é um morfismo sobrejetor de um conjunto nele mesmo.

Monomorfismo: é um morfismo $f : A \rightarrow B$ onde para quaisquer morfismos $u, v : C \rightarrow A$, $fu = fv$ implicar em $u = v$.

Epimorfismo: é um morfismo $f : A \rightarrow B$ onde para quaisquer morfismos $u, v : C \rightarrow A$, $uf = vf$ implicar em $u = v$.

Def 4 – Grupóide

Grupóide é qualquer conjunto no qual uma operação fechada foi definida. Obs: por operação fechada entende-se qualquer operação binária (entre dois elementos de um conjunto) em que o resultado de tal operação também pertence a esse conjunto. Ex: o produto (operação binária de multiplicação: “.”) entre dois números reais possui o resultado claramente pertencendo ao conjunto dos números reais.

Def 5 – Semigrupo

É um Grupóide associativo, i.e., Grupóide que preserva a “lei associativa”: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$, sendo “ \circ ” uma operação binária qualquer. Um exemplo de semigrupo é a “matriz de transição” $\phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)}$.

Def 6 – Monóide

É um Semigrupo que possua o elemento identidade.

Def 7 – Grupo

É um Monóide que possua inversa.

Def 8 – Grupo Abelian

É um grupo que seja comutativo. Este termo foi cunhado por Niels Henrik Abel em 1823 e em lembrança a ele possui o nome “abeliano”

Def 9 – Anel

É um sistema abstrato $R = \{S, +, *\}$ que possui as operações binárias “+” e “*” e:

- i) O sub-sistema $\{S, +\}$ é um grupo abeliano, i.e., com elemento-identidade “0”.
- ii) O sub-sistema $\{S, *\}$ é um semigrupo.
- iii) Para todos $r_1, r_2, r_3 \in S$ a operação * é distributiva em relação a +:

$$r_1 * (r_2 + r_3) = r_1 * r_2 + r_1 * r_3$$

e

$$(r_2 + r_3) * r_1 = r_2 * r_1 + r_3 * r_1$$

Def 10 – Campo

É um sistema abstrato $\mathfrak{S} = \{S, +, *\}$ que consiste de um conjunto contendo pelo menos dois elementos nos quais duas operações binárias $+$ e $*$ foram definidas considerando que:

- i) o sub-sistema $\{S, +\}$ é um grupo abeliano, i.e., com elemento-identidade “0”.
- ii) o sub-sistema $\{S, *\}$ é um grupo abeliano, i.e., com elemento-identidade “e”.
- iii) a operação $*$ é distributiva em relação a $+$.

Def 11 – Espaço Vetorial

Seja \mathfrak{S} um campo. Um espaço vetorial V sobre \mathfrak{S} é um conjunto com duas operações fechadas $+: V \times V \rightarrow V$ e $*: \mathfrak{S} \times V \rightarrow V$, tal que são válidas as considerações:

- i) a operação $+$ é fechada: $\underline{u} + \underline{v} \in V \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in V$
- ii) lei associativa (operação $+$): $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) \quad \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$
- iii) elemento identidade (operação $+$): $\exists \underline{0} \in V : \underline{u} + \underline{0} = \underline{u} \quad \forall \underline{u} \in V$
- iv) elemento inverso (operação $+$): $\forall \underline{u} \in V \exists \underline{v} \in V : \underline{u} + \underline{v} = \underline{0}$
- v) lei comutativa (operação $+$): $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u} \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in V$
- vi) a operação $*$ é fechada: $\alpha \underline{u} \in V \quad \forall \underline{u} \in V$ e $\forall \alpha \in \mathfrak{S}$
- vii) lei associativa (operação $*$): $(\alpha \cdot \beta) \underline{u} = \alpha \cdot (\beta \underline{u}) \quad \forall \underline{u} \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{S}$
- viii) elemento identidade (operação $*$): $\exists e \in \mathfrak{S} : e \underline{u} = \underline{u} \quad \forall \underline{u} \in V$
- ix) lei distributiva (operação $*$):
$$\left. \begin{aligned} (\alpha + \beta) \underline{u} &= \alpha \underline{u} + \beta \underline{u} \\ \underline{u} (\alpha + \beta) &= \underline{u} \alpha + \underline{u} \beta \end{aligned} \right| \quad \forall \underline{u} \in V \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{S}$$

Def 12 – Funcional Linear

Um funcional linear $S = L(\underline{v})$ é uma função (ou mapeamento) de um espaço linear vetorial real V (onde o vetor \underline{v} está contido) num campo numérico \mathfrak{S} que na maioria dos casos práticos é o conjunto dos números reais R , e $S \in R$.

Def 13 – Espaço Dual Algébrico

Algébrico Dual V^* é o espaço de todos os Funcionais Lineares sobre V .

Def 14 – Vizinhança

Seja $a \in A$. A vizinhança de a é o conjunto de todos os elementos $x \in A : |x - a| < \delta$, sendo δ um número real positivo.

Def 15 – Pontos interiores e Interior de um Conjunto

$a \in A$ é um ponto interior se existe uma vizinhança $|x - a| < \delta \quad \forall x \in A$. O Interior de A é o conjunto de todos os seus pontos interiores. Na figura 2 podemos notar que os elementos a , x_1 e x_2 são pontos interiores de A , porém x_3 não é.

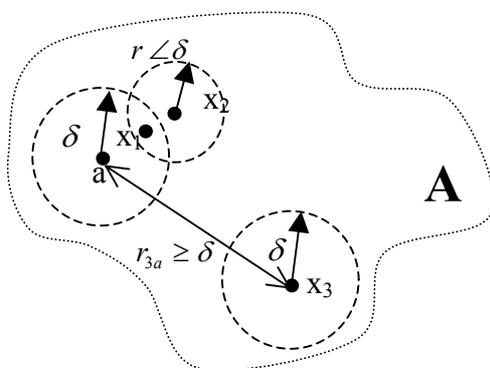


FIGURA 1.2 - Pontos interiores de A.

Def 16 – Pontos Limite ou Pontos de Acumulação

Um elemento x não necessariamente em A é *ponto de acumulação* de A se e somente se a vizinhança de x contiver ao menos um elemento de A distinto de x . Ver Figura 2. O conjunto dos pontos de acumulação de A é denotado por \hat{A} .

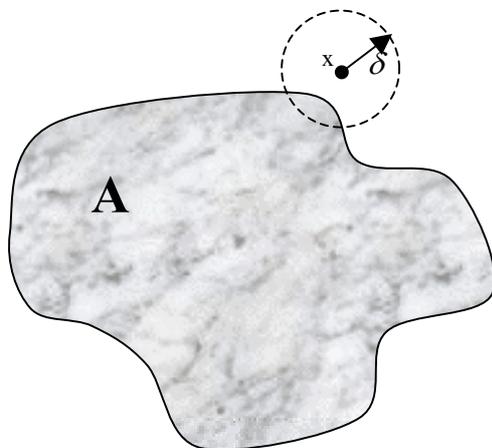


FIGURA 1.3 - Ponto de Acumulação x .

Def 17 – Conjunto Aberto

Um conjunto A é aberto se todo $x \in A$ é um ponto interior de A .

Def 18 – Fecho (Closure)

O fecho de um conjunto é a união de \hat{A} com o próprio A . O fecho é $\bar{A} = A \cup \hat{A}$.

Def 19 – Conjunto Fechado

Um conjunto é fechado se seu complemento é aberto.

Def 20 – Cobertura de um Conjunto

Uma classe \wp (conjunto no qual seus elementos também são conjuntos) é dita cobrir o conjunto A se $A \subset \bigcup \{B : B \in \wp\}$. \wp é a Cobertura do conjunto A . Se os conjuntos em \wp são abertos então \wp é uma cobertura aberta.

Def 21 – Subcobertura de um Conjunto

Se a classe \wp já está cobrindo o conjunto A e se a subclasse $\aleph \subset \wp$ também cobre A então \aleph é uma subcobertura de A .

Def 22 – Compacto

Um conjunto A é dito ser compacto se toda cobertura aberta de A contiver uma subcobertura finita.

Teorema 2 (Heine-Borel): um conjunto $A \subset R$ é compacto se e somente se ele for fechado e limitado.

Def 23 – Topologia

Seja A um conjunto não vazio. Uma classe \wp dos subconjuntos de A é dita ser uma Topologia em A se e somente se:

- i) A e \emptyset pertencem a \wp ,
- ii) A união de qualquer número de membros de \wp pertence a \wp ,
- iii) A interseção de quaisquer membros de \wp pertence a \wp .

Def 24 – Espaço Topológico

Seja A um conjunto não vazio e Γ uma topologia em A . Então o par (A, Γ) é um espaço topológico.

Def 25 – Denso

Um conjunto $B \subset A$ é dito ser Denso em A se $\overline{B} \supset A$. Se $\overline{B} = A$ então B é dito ser Denso por toda parte.

Def 26 – Seqüência de Cauchy

Uma seqüência $\{a_n\}$ é dita ser uma seqüência de Cauchy se $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (a_m - a_n) = 0$, isto é, tal seqüência é convergente.

Def 27 – Conjunto Completo

Um conjunto A é completo se e somente se toda seqüência de Cauchy de pontos em A convergir para um ponto em A .

Def 28 – Espaço de Banach

É todo espaço linear normado completo. Espaço linear normado é todo espaço que admite o cálculo de normas $\|\cdot\|$.

Def 29 – Espaço de Hilbert

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial com produto escalar $(\underline{u}, \underline{v})$ e norma.

Def 30 – Espaço de Sobolev

É o espaço das equações diferenciais. Para $d \geq 1$, Ω um subconjunto de R^d $p \in [1, \infty)$ e $s \in N$, o espaço de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ é definido por,

$$W^{s,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq s, \partial_x^\alpha f \in L^p(\Omega)\} \quad (1.3)$$

Def 31 – Raio Espectral

O raio espectral de uma matriz A com autovalores λ_i é definido por:

$$r(A) = \max_i |\lambda_i| \quad (1.4)$$

Numa simulação numérica (Craig, 1981) o raio espectral assume um importante papel na medida da performance numérica de um sistema de simulação. Se $r < 1$ o haverá estabilidade e se $r > 1$ teremos a instabilidade numérica. (ver Figura 4).

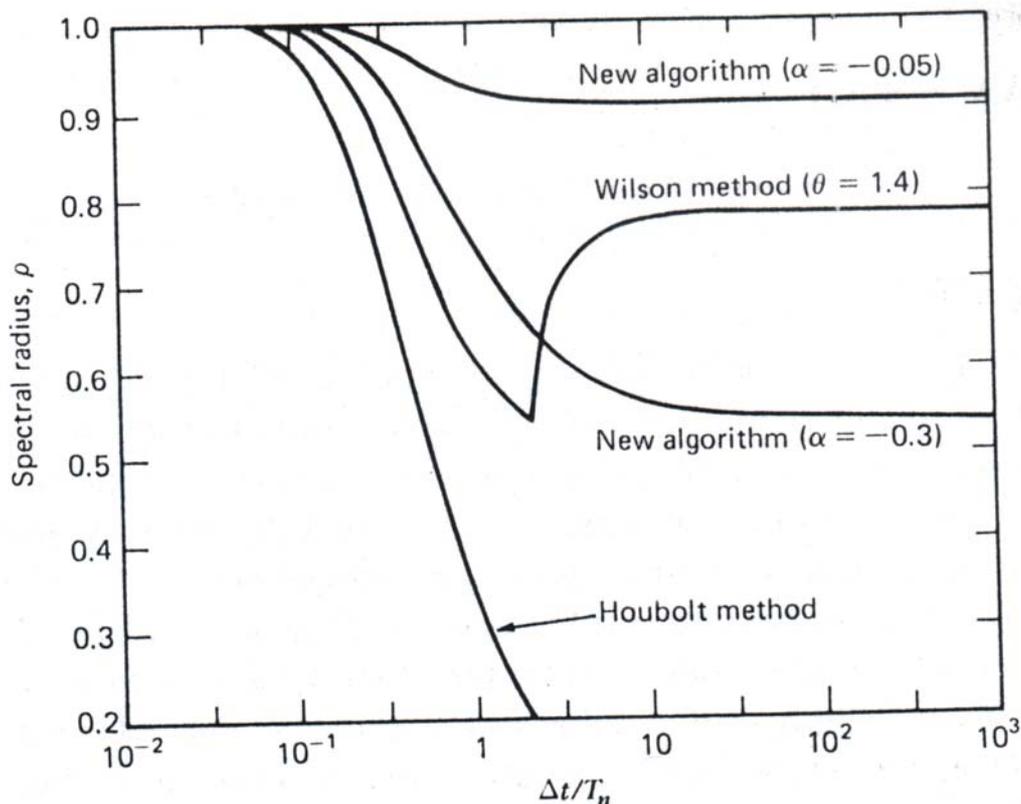


FIGURA 1.4 - Raio espectral em função do período de amostragem numa simulação numérica. Para a notação adotada neste trabalho troca-se o ρ da figura por r .
 FONTE: Craig (1981, p.460)

Def 32 – Análise Espectral

Seja a equação do problema do autovalor associado ao operador A ,

$$(\lambda.I - A)\underline{v} = \underline{0} \tag{1.5}$$

Há diversas situações que o operador $(\lambda.I - A)$ pode se encontrar e para cada tipo há uma denominação via análise espectral.

Conjunto Resolvente $\rho(A)$: o conjunto de todos os λ em que o operador $(\lambda.I - A)$ tem uma inversa limitada. Todos os λ que não pertencerem ao $\rho(A)$ pertencem ao spectrum,

i.e., o complemento de $\rho(A)$ é o spectrum, isto é, $\sigma = C \setminus \rho$, onde C é o conjunto dos números complexos.

Spectrum σ : o spectrum é constituído por três subconjuntos;

a) **Spectrum pontual σ_p** : é o conjunto dos autovalores. É o subconjunto de todos os λ em que $(\lambda.I - A)$ é sobrejetora e sua inversa não existe.

b) **Spectrum Residual σ_R** : É o subconjunto de todos os λ em que $(\lambda.I - A)$ é injetora e seu Range não é denso em U (espaço linear normado).

c) **Spectrum Contínuo σ_C** : É o subconjunto de todos os λ em que $(\lambda.I - A)$ é biunívoca e tem o Range denso em U .

O chamado *Spectra* é $\rho \cup \sigma$.

CAPÍTULO 2

INTRODUÇÃO À NORMA DO GRAFO

Mostraremos neste capítulo como usar a norma do grafo ensaiando passos para a aplicação no problema em questão: detecção analítica da influência do período de amostragem na estabilidade de sistemas de controle amostrados. Algumas novas definições e considerações preliminares são importantes.

Def 33 – Conjunto H_p

O conjunto H_p é constituído de todas as funções analíticas f no disco unitário aberto D tal que,

$$\|f\|_p \doteq \sup_{r \in (0,1)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r.e^{j\theta})|^p d\theta \right]^{1/2} < \infty \quad (2.1)$$

Def 34 – Conjunto H_{inf}

O conjunto H_∞ é feito de todas as funções analíticas em D tal que,

$$\|f\|_\infty \doteq \sup_{r \in (0,1)} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(r.e^{j\theta})| < \infty \quad (2.2)$$

Def 35 – Supremo Essencial

É possível definir $\|f\|_\infty$ quando $f(z)$ em D é descrita como um limite não-tangencial para $r \rightarrow 1, z \rightarrow e^{j\theta}$, que é descrito pelo supremo essencial (“essential supremum”),

$$\|f\|_\infty \doteq \text{ess. sup}_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(e^{j\theta})| \quad (2.3)$$

Exemplo: Seja $P(s) = \frac{1}{s-1}$ uma planta instável. Um valor u limitado na entrada que provoca uma saída limitada y pode ser dado por $u = (s-1)$,

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s-1}$$

$$y(s)\Big|_{u=(s-1)} = 1$$

Portanto, $(u, y) \in S^2$, $(u, y)\Big|_{y=1} \in \text{grafo}(P)$.

Assuma agora que H_∞^+ seja o conjunto de todas as funções estáveis, racionais e próprias analíticas no semiplano direito (que não tenham pólos nesta região). Assuma também que H_∞^- é o conjunto de todas as funções instáveis (não analíticas no semiplano direito). Seja $f \in H_\infty^+$. A norma-infinito de f pode ser descrita no caso discreto como,

$$\|f\|_\infty \doteq \sup_{r \in (0,1)} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(r \cdot e^{j\theta})| < \infty \quad (2.4)$$

ou no caso contínuo,

$$\|f\|_\infty \doteq \sup_{\omega} |f(j\omega)| < \infty \quad (2.5)$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{\omega} \sqrt{f(s)f(-s)} = \sup_{\omega} \sqrt{f(j\omega)f(-j\omega)} \quad (2.6)$$

Exemplo: seja $f \in H_\infty^+$, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, calcule $\|f\|_\infty$ quando $f(s) = \frac{1}{s+1}$.

$$\|f(s)\|_\infty = \|f(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega} \sqrt{f(j\omega)f(-j\omega)}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \sup_{\omega} \sqrt{\left(\frac{1}{j\omega+1}\right)\left(\frac{1}{-j\omega+1}\right)} = \\ &= \sup_{\omega} \sqrt{\frac{1}{\omega^2+1}} = \sup_{\omega} \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}} = 1 \end{aligned}$$

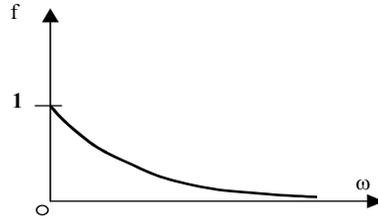


FIGURA 2.1

Exemplo: seja $f \in H_{\infty}^{-}$, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, calcule $\|f\|_{\infty}$ quando $f(s) = \frac{1}{s-1}$.

Similarmente,

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{\omega} \sqrt{\left(\frac{1}{j\omega-1}\right)\left(\frac{1}{-j\omega-1}\right)} = \sup_{\omega} \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}} = 1$$

Exemplo: seja agora $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, calcule $\|f\|_{\infty}$ quando $f(s) = \frac{1}{s}$.

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{\omega} \left| \frac{1}{j\omega} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{j\omega}\right)\left(\frac{1}{-j\omega}\right)} = \sup_{\omega} \frac{1}{\omega} = \infty$$

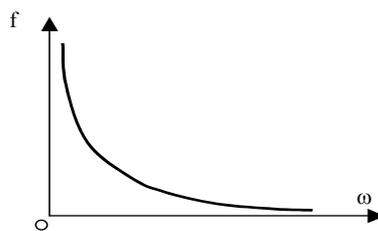


FIGURA 2.2

É claro que o resultado obtido não descreve a norma $\|\cdot\|$ que deve ser uma função contínua positiva-definida^[7,8]. Portanto, ela não pertence a nenhum espaço métrico.

Frente a tal dificuldade uma nova medida chamada métrica do grafo sera proposta. Assuma que

$$f(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, \quad n, d \in H_{\infty}^+ \quad (2.7)$$

Seja, $z \in H_{\infty}^+, z^{-1} \in H_{\infty}^+$,

$$f(s) = \frac{n(s).z(s)}{d(s).z(s)}, \quad n.z, d.z \in H_{\infty}^+ \quad (2.8)$$

A norma do grafo de $f=P$ quando P é a planta usada é dada por:

$$\delta(P,0) = \inf_{z \in S} \|d.z, n.z\|_{\infty} \quad (2.9)$$

Onde S é o conjunto das funções escalares estáveis, racionais e próprias. Se o grafo de P for um conjunto definido por:

$$\text{graph } P = \{(d.z, n.z), P = n.d^{-1}, \forall z \in S\} \quad (2.10)$$

Finalmente, a norma do grafo será,

$$\|(d.z, n.z)\|_{\infty}^{\bullet} = \inf \{ \|d.z\|_{\infty}, \|n.z\|_{\infty} \} = \|P\|_{\text{Grafo}} \quad (2.11)$$

Para obter resultados quantitativos devemos metrizar a topologia do grafo, i.e., devemos definir uma métrica sobre $M(R(s))$ tal que a convergência (e consequentemente a continuidade) seja equivalente à convergência na topologia do grafo. Está é a métrica do grafo. Antes necessitaremos de alguns novos conceitos.

Def 36 – RCF normalizada

Uma r.c.f. (“right coprime factorization”) de $P \in M(R(s))$ é dita ser normalizada se $N^*(s)N(s) + D^*(s)D(s) = I \quad \forall s$ onde $N^*(s) = N'(-s)$.

Def 37 – Métrica do Grafo

Suponha $P_1, P_2 \in M(R(s))$ com as mesmas dimensões e (N_i, D_i) uma r.c.f. normalizada de P_i para $i=1,2$. Entretanto:

$$A_i = \begin{bmatrix} D_i \\ N_i \end{bmatrix}, i=1,2. \quad (2.12)$$

E definamos,

$$\delta(P_1, P_2) = \inf_{U \in M(S), \|U\| \leq 1} \|A_1 - A_2 U\| \quad (2.13)$$

Onde U é o fator spectral da matriz identidade $I=U' \cdot U$.

$$d(P_1, P_2) = \max\{\delta(P_1, P_2), \delta(P_2, P_1)\}. \quad (2.14)$$

Então $d(P_1, P_2)$ é a métrica do grafo em $M(R(s))$.

Lema: d é uma métrica em $M(R(s))$ assumindo valores no intervalo $[0,1]$.

Theorem: Este é o principal resultado sobre convergência da métrica do grafo. Uma sequência $\{P_i\}$ em $M(R(s))$ converge para $P \in M(R(s))$ na topologia do grafo se e somente se $d(P_i, P) \rightarrow 0$.

Até aqui a metrica do grafo não foi calculada exatamente devido ao problema de calcular o infimum num estudo em aberto (veja [7] para detalhes). Entretanto, é possível calcular limites inferior e superior para contornar tal problema.

Lema: suponha (N_1, D_1) uma r.c.f. normalizada de P_1 ed (N_2, D_2) uma r.c.f. (não necessariamente normalizada) de P_2 e $A_1 = \begin{bmatrix} D_1' & N_1' \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} D_2' & N_2' \end{bmatrix}$. Suponha agora que,

$$\|A_1 - M_2\| \doteq \gamma < 1 \quad (2.15)$$

Então,

$$d(P_1, P) \leq \frac{2\gamma}{1-\gamma}. \quad (2.16)$$

para calcular um limite inferior da métrica do grafo entre duas plantas (uma referência $P_0|_{T=0}$ e outra P_1 para um $T>0$, por exemplo) devemos notar que,

$$\delta(P_0, P_1) = \inf_{R \in M(S)} \|A_0 - A_1 R\| \quad (2.17)$$

onde $A_i = \begin{bmatrix} D_i \\ N_i \end{bmatrix}$,

e calcular,

$$d(P_0, P_1) = \max\{\delta(P_0, P_1), \delta(P_1, P_0)\}. \quad (2.18)$$

Exemplo: se $f : C \rightarrow C$, calcule $\|f\|_{\text{Grafo}}$ para $f(s) = \frac{1}{s}$. Assuma por exemplo que $z = \frac{s+2}{s+3}$.

$$f(s) = \frac{1 \cdot \frac{1}{s+1}}{\frac{1}{s+1}} = \frac{s+1}{s} = \frac{n}{d}, \quad n, d \in H_{\infty}^+$$

$$f(s) = \frac{N.z}{D.z} = \frac{\frac{1}{s+1} \cdot \frac{s+2}{s+3}}{\frac{s}{s+1} \cdot \frac{s+2}{s+3}}, \quad nz, dz \in H_{\infty}^+$$

$$\|(d.z, n.z)\|_{\infty} \doteq \inf \left\{ \|d.z\|_{\infty}, \|n.z\|_{\infty} \right\}$$

Exemplo: se $f : C \rightarrow C$, calcule $\|f\|_{\text{Grafo}}$ para $f(s) = \frac{1}{s(s+1)}$.

$$A_1 = 0;$$

$$A_2 = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{\frac{1}{(s+1)^2}}{\frac{s}{(s+1)}}$$

$$\delta\left(0, \frac{1}{s(s+1)}\right) = \inf_{\|U\| \leq 1} \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} \\ \frac{s}{(s+1)} \end{pmatrix} \cdot U \right\|_{\infty}$$

$$\delta\left(0, \frac{1}{s(s+1)}\right) = \max \left\{ \left\| \frac{1}{(s+1)^2} \right\|_{\infty}, \left\| \frac{s}{(s+1)} \right\|_{\infty} \right\}$$

Fazendo $s = -j\omega$: $\frac{-j\omega}{-j\omega+1} = \frac{\omega^2 - j\omega}{1 + \omega^2}$, com módulo: $\frac{\sqrt{\omega^4 + \omega^2}}{1 + \omega^2}$,

$$\delta\left(0, \frac{1}{s(s+1)}\right) = \max \left\{ \left\| \frac{1}{(s+1)^2} \right\|_{\infty}, \left\| \frac{s}{(s+1)} \right\|_{\infty} \right\} = 1$$

Finalmente, a distância da função $f(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ à origem é igual a 1.

CAPÍTULO 3

INVESTIGAÇÕES COM A NORMA DO GRAFO A RESPEITO DAS REGIÕES DE ESTABILIDADE/INSTABILIDADE EM FUNÇÃO DO PERÍODO DE AMOSTRAGEM

O discreto verdadeiro pode ser dado por

$$G_T(z) = G_{*,T}(z) + \frac{1}{T} \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k = -\infty}}^{\infty} \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{G(s)}{s} \Big|_{s=j\left(\omega_a - k \frac{2\pi}{T}\right)} \quad (3.1)$$

onde o primeiro termo do segundo membro é a transformada-Z da planta e o segundo membro é o “aliasing” (falseamento ou mascaramento) reescrito abaixo,

$$\Delta G_*(z) = H_T(z) = \frac{2}{T} \sum_{k \neq 1}^{\infty} \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{G(s)}{s} \Big|_{s=j\left(\omega_a - k \frac{2\pi}{T}\right)} \quad (3.2)$$

Para o estudo da estabilidade é conveniente supor que este “aliasing” possa convergir para um determinado valor $M < \infty$

$$M = \sup_{\omega} \left\{ \left\| \Delta G_*(z) \right\|_{\infty} \right\} \quad (3.3)$$

Podemos tentar calcular uma expressão geral para M como segue,

$$M = \dots + \sup_{\omega \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \underbrace{\frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{G(s)}{s} \Big|_{s=j\left(\omega_a - \frac{2\pi}{T}\right)}}_{A_1} + \dots$$

$$M = \dots + \sup_{\omega \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} A_1 \left(s = j \left(\omega_a - \frac{2\pi}{T} \right) \right) + \sup_{\omega \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} A_2 \left(s = j \left(\omega_a - \frac{4\pi}{T} \right) \right) + \sup_{\omega \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} A_3 \left(s = j \left(\omega_a - \frac{6\pi}{T} \right) \right) + \dots$$

Da equação acima A_k é um termo geral dado por,

$$A_k \left(s = j \left(\omega_a - \frac{2k\pi}{T} \right) \right) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{G(s)}{s} \Big|_{s=j\left(\omega_a - \frac{2k\pi}{T}\right)} \quad (3.4)$$

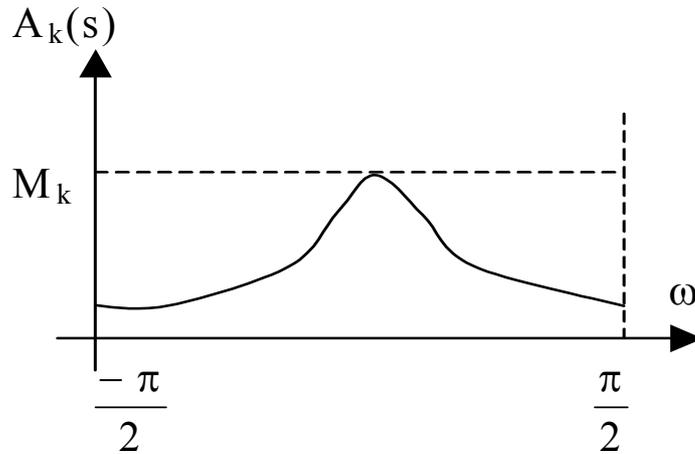


FIGURA 3.1 – teste de convergência.

Após alguns calculos podemos chegar à,

$$M = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} M_k$$

$$M = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \|A_k(s)\|_{\infty} \Big|_{s=j\left(\omega_a - \frac{k2\pi}{T}\right)} \quad (3.5)$$

M é convergente? M sera limitado se a série que o define for convergente. Verificaremos um caso de convergência. Por outro lado é importante lembrar que, por hipótese, apesar de termos um M limitado grandes perturbações podem vir a instabilizar o sistema de controle amostrado.

Usaremos a função de transferência na forma racional $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$.

Aplicando essa forma racional em M,

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\omega \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \frac{1 - e^{-j\omega T} \cdot e^{-j2k\pi}}{\left(\omega + \frac{2k\pi}{T}\right)^2} \cdot \frac{n\left(j\omega + j\frac{2k\pi}{T}\right)}{d\left(j\omega + j\frac{2k\pi}{T}\right)} \quad (3.6)$$

Lembrando que $|e^{-j2k\pi}| = 1$, finalmente,

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\omega \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \frac{1 - e^{-j\omega T} \cdot e^{-j2k\pi}}{\left(\omega^2 + 4\omega k \frac{\pi}{T} + \frac{4k^2 \pi^2}{T^2}\right)} \cdot \frac{n\left(j\omega + j\frac{2k\pi}{T}\right)}{d\left(j\omega + j\frac{2k\pi}{T}\right)} \quad (3.7)$$

Que é a expressão geral para o limitante superior M.

Exemplo: se n/d descreve um corpo-rígido com momento de inércia J $n/d = \frac{1}{Js^2}$, então,

$$M = \frac{1}{J} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\omega \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \frac{1 - e^{-j\omega T} \cdot e^{-j2k\pi}}{\omega^4 + 8\left(\omega k \frac{\pi}{T} + \frac{k^2 \pi^2}{T^2}\right) + 16\left(\omega^2 \frac{k^2 \pi^2}{T^2} + 2\omega \frac{k^3 \pi^3}{T^3} + \frac{k^4 \pi^4}{T^4}\right)} \quad (3.8)$$

Para um valor de k muito maior que a unidade o k-ésimo termo de M assumirá o formato,

$$M_k = \frac{T^4}{J} \cdot \frac{1 - e^{-j\omega T} \cdot e^{-j2k\pi}}{16k^4 \pi^4} \quad (3.9)$$

isso mostra que o k-ésimo termo pode ser desprezível para T pequeno porém a soma pode divergir para algum T muito grande. Se M diverge é claro que o sinal de controle do sistema amostrado divergirá também.

Exemplo: Considere agora $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\omega \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \left| \frac{1 - e^{-j\omega T} \cdot e^{-j2k\pi}}{\omega^4 + 8\omega^3 \frac{k\pi}{T} + 24\omega^2 \frac{k^2 \pi^2}{T^2} + 32\omega \frac{k^3 \pi^3}{T^3} + 16 \frac{k^4 \pi^4}{T^4} + j \left\{ \omega^3 + 6\omega^2 \frac{k\pi}{T} + 12\omega \frac{k^2 \pi^2}{T^2} + 8 \frac{k^3 \pi^3}{T^3} \right\}} \right| \quad \text{Its}$$

seu k-ésimo termo,

$$M_k = \frac{T^4}{8k^3 \pi^3 \sqrt{4k^2 \pi^2 + T^2}}$$

Para diversos valores de T montamos a Figura 3.2 mostrando a convergência de M para os valores de T testados.

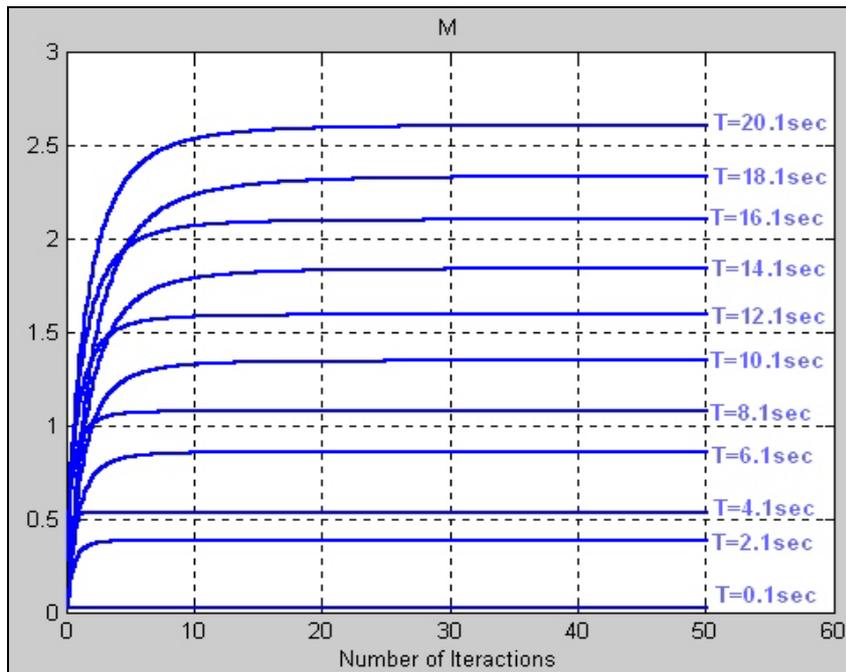


FIGURA 3.2 - convergência de M.

Exemplo: agora suponha que $G(s) = \frac{1}{(s+1).(s+2)}$

Nesse caso,

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\omega \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \left| \frac{1 - e^{-j\omega T} \cdot e^{-j2k\pi}}{\omega^4 + 4\omega^3 \frac{k\pi}{T} + \omega^2 \left[24 \frac{k^2 \pi^2}{T^2} - 2 \right] + \omega \left[32 \frac{k^3 \pi^3}{T^3} - 8 \frac{k\pi}{T} \right] + 16 \frac{k^4 \pi^4}{T^4} - j \left\{ 3\omega^3 + 18\omega^2 \frac{k\pi}{T} + 36\omega \frac{k^2 \pi^2}{T^2} + 24 \frac{k^3 \pi^3}{T^3} \right\}} \right|$$

seu k-ésimo termo é,

$$M_k = \frac{T^4}{16k^4 \pi^4 - j24T^2 k^3 \pi^3}$$

Como mostrado na Figura 3.3 M mostra-se convergente.

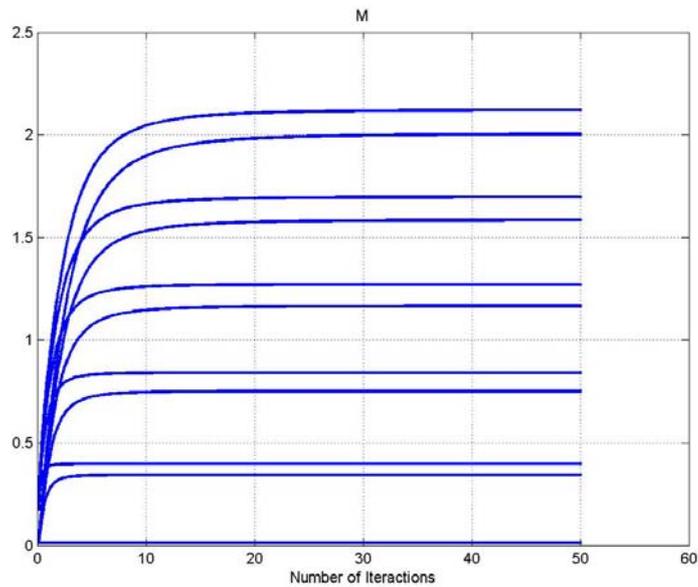


FIGURA 3.3 - convergência de M.

Partindo desses resultados e do conhecimento sobre a norma do grafo podemos esboçar a seguinte hipótese, apresentado aqui sem prova,

Hipótese: para um sistema de controle amostrado com período de amostragem T podemos supor que a estabilidade em malha-fechada poderá ser garantida se

$$\|G_T\|_{\text{Grafo}} = \inf \{ \|d\|_{\infty}, \|n\|_{\infty} \} < M(T) \quad (3.10)$$

CONCLUSÃO

Tudo indica que técnica da norma do grafo é um instrumento poderoso para estudar a estabilidade de sistemas amostrados, porém, até o momento apenas conseguimos demonstrar soluções aproximadas que permitem afirmar a existência e medir um limitante superior para a região de estabilidade. Até o momento não foi possível verificar por meio da norma do grafo a existência de outras regiões de estabilidade e instabilidade, o que foi comprovado por diversos experimentos numéricos. Chamamos a atenção para a importância da análise espectral, alicerce da mecânica quântica, para estudar o fenômeno e bem provavelmente será essa ferramenta que usaremos para tratar do problema se a norma do grafo mostrar-se infrutífera.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Oden, J.T. **Applied Functional Analysis** – a first course for students of mechanics and engineering science. Prentice-Hall, 1979.

Bensoussan, A. et al. **Representation and Control of Infinite Dimensional Systems**. Birkhauser, 1992.

Craig, R.R. **Structural Dynamics** – an introduction to computer methods. John Wiley, 1981.

Balakrishnan, A.V. **Applied Functional Analysis**. Springer, 1976.

Naylor, A.W.; Sell, G.R. **Linear Operator Theory in Engineering and Science**. Springer, 1982.

Ambrosio, U. **Métodos da Topologia**. LTC, 1977.

Gilmore, R. Lie Groups, **Lie Algebras and some of Their Applications**. John Wiley, 1974.

