



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-8699-TDI/792

**PERTURBAÇÃO DE TERCEIRO CORPO COM
MODELOS DE MÉDIA SIMPLES**

Carlos Renato Huaura Solórzano

Dissertação de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espacial, orientada pelo Dr.
Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, aprovada em 18 de fevereiro de 2002.

INPE
São José dos Campos
2002

521.3 : 629.7.076.6

HUAURA SOLÓRZANO, C. R.

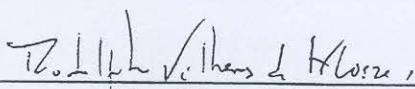
Perturbação de terceiro corpo com modelos de média simples / C. R. Huaura Solórzano – São José dos Campos: INPE, 2002.

153p. – (INPE-8699-TDI/792).

1.Perturbação de órbita. 2.Efeitos de longo período.
3.Média. Modelos. 5.Órbita de dois corpos. 6.Perturbação.
I.Título.

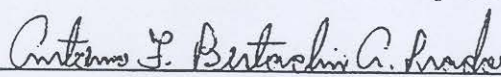
Aprovado pela Banca Examinadora em
cumprimento a requisito exigido para a
obtenção do Título de Mestre em
**Engenharia e Tecnologia
Espaciais/Mecânica Espacial e
Controle.**

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes



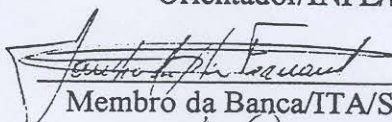
Presidente/INPE/SJCampos-SP

Dr. A. F. Bertachini de Almeida Prado



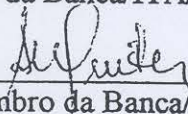
Orientador/INPE/SJCampos-SP

Dr. Sandro da Silva Fernandes



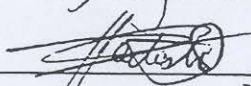
Membro da Banca/ITA/SJCampos-SP

Dr^a Sílvia Maria Giuliatti Winter



Membro da Banca/FEG/Guará-SP

Dr. Tadashi Yokoyama



Membro da Banca
Convidado UNESP, Rio Claro-SP

Candidato: Carlos Renato Huaura Solorzano

São José dos Campos, 18 de fevereiro de 2002.

O sabor de nossa vitória não está em nós, mas sim na alegria das pessoas diante dela. É por isso que a vitória quando anexada com a solidão, torna-se amarga.

(anônimo)

Ten en tu vida un ideal por el que valga la pena vivir, y por el cuál estes dispuesto a morir.

(anônimo)

Dedico este trabalho a meus pais:

Luis Alejandro Huaura Pisconte

Edith Solórzano Figueroa

A meus irmãos:

Agustín Alejandro Huaura Solórzano

Milagros Patricia Huaura Solórzano

A minha cunhada:

Danila Montoya

A todos os meus familiares

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) pelas facilidades.

À CAPES pela bolsa de pesquisa.

Ao Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, meu orientador, pela confiança nos momentos difíceis, pela orientação, pelo constante apoio e espírito científico.

Ao Dr. Sandro da Silva Fernandes, pelas sugestões para o desenvolvimento do estudo das variáveis não singulares e pelas observações para a melhora deste trabalho.

Ao Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza, pela constante motivação a seguir estudando e por mostrar que nunca é suficiente e que sempre existe mais para estudar e aprender.

Aos Drs. Rodolpho Vilhena de Moraes, Tadashi Yokoyama e a Dr^a Silvia Maria Giuliatti Winter pelas sugestões para a melhora deste trabalho.

Aos meus amigos: Alexandra Amaro de Lima, María Valverde Ramírez, Rosa Maria Nascimento do Santos, Miguel Dulanto, Annelisie Aiex Corrêa, Adriana Trigolo, os quais encontrei aqui no Brasil, pela sua amizade e seu apoio constante.

Aos meus amigos que deixei no meu país: Luis Caballero, Manuel Reynaga, Miguel Medina, Violeta Correa, Karim Alarcón pelo constante apoio e pela amizade que se mantém apesar do tempo e da distância.

Aos colegas e amigos de ontem e de hoje, pela amizade.

RESUMO

Na literatura, existem diversos trabalhos que estudam os efeitos da perturbação de um terceiro corpo sobre um satélite. Alguns deles utilizam a hamiltoniana do sistema e outros utilizam a função perturbadora expressa em forma analítica. A presente dissertação de mestrado tem o objetivo de desenvolver um estudo semi-analítico da perturbação causada em um satélite por um terceiro corpo com o modelo de médias simples. Com isso os termos de curto período do veículo espacial podem ser eliminados. Além disso, estudamos o comportamento de um satélite perturbado pela ação conjunta da Lua e do Sol, assumidos em órbitas coplanares. Também realizamos uma breve análise das variáveis não-singulares, bem como a sua aplicação em órbitas equatoriais e circulares. Diversos gráficos mostram o comportamento dos elementos keplerianos das órbitas analisadas. Este trabalho possui uma aplicação importante no cálculo dos efeitos da perturbação da Lua e do Sol em satélites terrestres a grandes altitudes.

THIRD BODY PERTURBATION USING A SINGLE AVERAGED MODEL

ABSTRACT

Several papers can be found in the literature that study the effect of the third body perturbation in a spacecraft. Some of them work with the Hamiltonian of the system and some others with the disturbing function expressed in an analytic form. The present master dissertation has the goal of developing a semi-analytical study of the perturbation caused in a spacecraft by a third body, using a single averaged model to eliminate the terms due to the short time periodic motion of the spacecraft. To the joint perturbation of the Sun and the Moon is considered, assuming that their orbits are coplanar. After that a set of non-singular variables is used, and its application in equatorial and circular orbits is shown. Several plots will show the time histories of the keplerian elements of the orbits involved. One of the most important applications of the present research is to calculate the effect of Lunar and Solar perturbations on high-altitude Earth satellites.

SUMÁRIO

| | Pág. |
|--|------|
| LISTA DE FIGURAS | |
| LISTA DE TABELAS | |
| LISTA DE SÍMBOLOS | |
| CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO | 25 |
| 1.1 – Organização do trabalho..... | 26 |
| CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 29 |
| 2.1 - Definição do problema..... | 29 |
| 2.2 - Revisão bibliográfica..... | 31 |
| CAPÍTULO 3 - MODELO MATEMÁTICO PARA A PERTURBAÇÃO DO TERCEIRO CORPO | 37 |
| CAPÍTULO 4 - RESULTADOS PARA A PERTURBAÇÃO DO TERCEIRO CORPO | 43 |
| 4.1 – Simulação da perturbação da Lua..... | 44 |
| 4.2 - Simulação da perturbação do Sol..... | 62 |
| 4.3 – Comparação entre os métodos de média simples e duplas..... | 69 |
| 4.4 – Órbitas retrógradas e órbitas polares..... | 76 |
| CAPÍTULO 5 - PERTURBAÇÃO DA LUA E DO SOL SOBRE UM SATÉLITE ARTIFICIAL TERRESTRE | 83 |
| 5.1 - Precessão Giroscópica devida ao Sol..... | 84 |
| 5.1.1 - Efeitos conjuntos do Sol e da Lua..... | 85 |
| 5.1.2 – Equivalência entre as funções perturbadoras da Lua e do Sol..... | 86 |
| 5.2 - Simulação da Perturbação Luni-Solar..... | 88 |

| | |
|--|------------|
| 5.2.1 - Perturbação Luni-Solar para um satélite com semi-eixo maior de $a = 0.110$ unidades canônicas de comprimento..... | 88 |
| 5.2.2 - Perturbação Luni-Solar para um satélite com semi-eixo maior de $a = 0.07$ unidades canônicas de comprimento..... | 97 |
| CAPÍTULO 6 - ANÁLISE DAS SINGULARIDADES..... | 103 |
| 6.1 - Forma alternativa para as pequenas excentricidades e/ou inclinações..... | 103 |
| 6.2 - Equações de movimento de um satélite..... | 104 |
| 6.3 - Simulações..... | 117 |
| 6.3.1 - Órbitas equatoriais..... | 117 |
| 6.3.1.1 - Simulação da perturbação da Lua para $a = 0.07$ | 117 |
| 6.3.1.2 - Simulação da perturbação da Lua para $a = 0.110$ | 118 |
| 6.3.2 - Órbitas circulares..... | 119 |
| 6.3.2.1 - Simulação da perturbação da Lua para $a = 0.07$ | 119 |
| 6.3.2.2 - Simulação da perturbação da Lua para $a = 0.110$ | 120 |
| 6.3.3 - Órbitas quase equatoriais e quase circulares..... | 122 |
| CAPÍTULO 7 – CONCLUSÕES..... | 125 |
| 7.1 – Conclusões gerais..... | 125 |
| 7.2 – Proposta para pesquisas futuras..... | 130 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 131 |
| APÊNDICE A - EXPANSÃO DA FUNÇÃO PERTURBADORA..... | 135 |
| APÊNDICE B - RELAÇÕES ENTRE a E b..... | 140 |
| APÊNDICE C – CÁLCULO DAS MÉDIAS..... | 143 |

APÊNDICE D – ELEMENTOS ORBITAIS EM VARIÁVEIS

NÃO-SINGULARES.....148

LISTA DE FIGURAS

| | <u>Pág</u> |
|--|------------|
| 3.1 Ilustração da perturbação do terceiro corpo..... | 37 |
| 4.1 Evolução temporal da inclinação para $a(0) = 0.341$ e $i(0) < i_c$ | 47 |
| 4.2 Evolução temporal da inclinação para $a(0) = 0.341$ e $i(0) > i_c$ | 47 |
| 4.3 Evolução temporal da inclinação para $a(0) = 0.110$ e $i(0) < i_c$ | 48 |
| 4.4 Evolução temporal da inclinação para $a(0) = 0.110$ e $i(0) > i_c$ | 48 |
| 4.5 Evolução temporal da inclinação para $a(0) = 0.110$ e inclinações próximas da i_c | 50 |
| 4.6 Evolução temporal da inclinação para $a(0) = 0.110$ e $i(0) = 38$ graus..... | 50 |
| 4.7 Evolução temporal da excentricidade para $a(0) = 0.341$ e $i(0) < i_c$ | 51 |
| 4.8 Evolução temporal da excentricidade para $a(0) = 0.341$ e $i(0) = 1$ grau..... | 51 |
| 4.9 Evolução temporal da excentricidade para $a(0) = 0.110$ e $i(0) < i_c$ | 52 |
| 4.10 Evolução temporal da excentricidade para $a(0) = 0.341$ e $i(0) > i_c$ | 52 |
| 4.11 Evolução temporal da excentricidade para $a(0) = 0.110$ e $i(0) > i_c$ | 52 |
| 4.12 Evolução temporal da excentricidade para $a(0) = 0.110$ e inclinações próximas da i_c | 54 |
| 4.13 Evolução temporal do argumento do perigeu para $a(0) = 0.341$ e $i(0) < i_c$ | 56 |
| 4.14 Evolução temporal do argumento do perigeu para $a(0) = 0.341$ e $i(0) > i_c$ | 56 |
| 4.15 Evolução temporal do argumento do perigeu para $a(0) = 0.110$ e $i(0) < i_c$ | 57 |
| 4.16 Evolução temporal do argumento do perigeu para $a(0) = 0.110$ e $i(0) > i_c$ | 58 |
| 4.17 Evolução temporal da longitude do nodo para $a(0) = 0.341$ e $i(0) < i_c$ | 59 |
| 4.18 Evolução temporal da longitude do nodo para $a(0) = 0.341$ e $i(0) > i_c$ | 59 |
| 4.19 Evolução temporal da longitude do nodo para $a(0) = 0.110$ e $i(0) < i_c$ | 61 |
| 4.20 Evolução temporal da longitude do nodo para $a(0) = 0.110$ e $i(0) > i_c$ | 61 |
| 4.21 Evolução da inclinação para $i(0) = 35$ graus..... | 62 |
| 4.22 Evolução da inclinação para $i(0) = 41$ graus..... | 62 |
| 4.23 Evolução da excentricidade para $i(0) = 35$ graus..... | 62 |
| 4.24 Evolução da inclinação para $i(0) = 41$ graus..... | 62 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.25 | Evolução da inclinação e do argumento do perigeu ($i(0) = 35$ graus e 100 unidades canônicas de tempo)..... | 63 |
| 4.26 | Evolução da inclinação e do argumento do perigeu ($i(0) = 35$ graus e 10^5 unidades canônicas de tempo)..... | 63 |
| 4.27 | Evolução da inclinação e do argumento do perigeu ($i(0) = 41$ graus e 100 unidades canônicas de tempo)..... | 63 |
| 4.28 | Evolução da inclinação e do argumento do perigeu ($i(0) = 41$ graus e 10^5 unidades canônicas de tempo)..... | 63 |
| 4.29 | Evolução da inclinação e da excentricidade ($i(0) = 35$ graus e 4000 unidades canônicas de tempo)..... | 64 |
| 4.30 | Evolução da inclinação e da excentricidade ($i(0) = 35$ graus e 50000 unidades canônicas de tempo)..... | 64 |
| 4.31 | Evolução da inclinação e da excentricidade ($i(0) = 41$ graus e 4000 unidades canônicas de tempo)..... | 65 |
| 4.32 | Evolução da inclinação e da excentricidade ($i(0) = 41$ graus e 50000 unidades canônicas de tempo)..... | 65 |
| 4.33 | Evolução da inclinação e da excentricidade ($i(0) = 45$ graus e 200000 unidades canônicas de tempo)..... | 66 |
| 4.34 | Evolução da inclinação e do argumento do perigeu ($i(0) = 55$ graus e 200000 unidades canônicas de tempo)..... | 66 |
| 4.35 | Evolução no plano inclinação vs. excentricidade para ângulos maiores que a inclinação crítica..... | 67 |
| 4.36 | Gráfico comparativo da inclinação para $i(0) = 30$ graus (6000 unidades canônicas de tempo)..... | 69 |
| 4.37 | Gráfico comparativo da inclinação para $i(0) = 30$ graus (50 unidades canônicas de tempo)..... | 69 |
| 4.38 | Gráfico comparativo da inclinação para $i(0) = 80$ graus (6000 unidades canônicas de tempo)..... | 70 |
| 4.39 | Gráfico comparativo da inclinação para $i(0) = 80$ graus (50 unidades canônicas de tempo)..... | 70 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.40 | Gráfico comparativo da excentricidade para $i(0) = 30$ graus (6000 unidades canônicas de tempo)..... | 71 |
| 4.41 | Gráfico comparativo da excentricidade para $i(0) = 30$ graus (50 unidades canônicas de tempo)..... | 71 |
| 4.42 | Gráfico comparativo das excentricidades para $i(0) = 80$ graus (6000 unidades canônicas de tempo)..... | 72 |
| 4.43 | Gráfico comparativo da excentricidade para $i(0) = 80$ graus (50 unidades canônicas de tempo)..... | 72 |
| 4.44 | Gráfico comparativo da longitude do nodo para $i(0) = 30$ graus (6000 unidades canônicas de tempo)..... | 73 |
| 4.45 | Gráfico comparativo da longitude do nodo para $i(0) = 30$ graus (20 unidades canônicas de tempo)..... | 73 |
| 4.46 | Gráfico comparativo da longitude do nodo para $i(0) = 80$ graus (6000 unidades canônicas de tempo)..... | 73 |
| 4.47 | Gráfico comparativo da longitude do nodo para $i(0) = 80$ graus (50 unidades canônicas de tempo)..... | 73 |
| 4.48 | Gráfico comparativo do argumento do perigeu para $i(0) = 30$ graus (6000 unidades canônicas de tempo)..... | 73 |
| 4.49 | Gráfico comparativo do argumento do perigeu para $i(0) = 30$ graus (100 unidades canônicas de tempo)..... | 74 |
| 4.50 | Gráfico comparativo do argumento do perigeu para $i(0) = 80$ graus (6000 unidades canônicas de tempo)..... | 75 |
| 4.51 | Gráfico comparativo do argumento do perigeu para $i(0) = 80$ graus (100 unidades canônicas de tempo)..... | 75 |
| 4.52 | Evolução temporal da inclinação para órbitas retrógradas..... | 76 |
| 4.53 | Evolução temporal da excentricidade para órbitas retrógradas ($i(0) = 160$ graus e $i(0) = 178$ graus)..... | 77 |
| 4.54 | Evolução temporal da excentricidade para órbitas retrógradas..... | 78 |
| 4.55 | Evolução temporal do argumento do perigeu para órbitas retrógradas..... | 78 |
| 4.56 | Evolução temporal da longitude do nodo para órbitas retrógradas..... | 79 |
| 4.57 | Evolução da inclinação vs. excentricidade para órbitas retrógradas..... | 79 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.58 | Evolução da inclinação para órbitas polares..... | 80 |
| 4.59 | Evolução da excentricidade para órbitas polares..... | 81 |
| 4.60 | Evolução do argumento do perigeu para órbitas polares..... | 82 |
| 4.61 | Evolução da longitude do nodo para órbitas polares..... | 82 |
| 5.1 | Evolução temporal da inclinação com $i(0) < i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$)..... | 88 |
| 5.2 | Evolução temporal da excentricidade com $i(0) < i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$)..... | 89 |
| 5.3 | Evolução temporal da inclinação com $i(0) > i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$)..... | 90 |
| 5.4 | Evolução temporal da excentricidade com $i(0) > i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$)..... | 91 |
| 5.5 | Evolução no plano inclinação vs. excentricidade com $i(0) > i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$)..... | 91 |
| 5.6 | Evolução temporal do argumento do perigeu com $i(0) = 1$ grau para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$)..... | 92 |
| 5.7 | Evolução temporal do argumento do perigeu com $i(0) = 30$ graus para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$)..... | 92 |
| 5.8 | Evolução temporal da longitude do nodo com $i(0) = 1$ grau para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$)..... | 92 |
| 5.9 | Evolução temporal da longitude do nodo com $i(0) = 30$ graus para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$)..... | 92 |
| 5.10 | Evolução temporal da inclinação com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$)..... | 93 |
| 5.11 | Evolução temporal da excentricidade com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$)..... | 94 |
| 5.12 | Evolução no plano inclinação vs. excentricidade com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$)..... | 94 |
| 5.13 | Evolução temporal do argumento do perigeu com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$)..... | 95 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.14 | Evolução temporal da longitude do nodo com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$)..... | 95 |
| 5.15 | Evolução temporal da inclinação com $i(0) < i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$)..... | 97 |
| 5.16 | Evolução temporal da excentricidade com $i(0) < i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$)..... | 98 |
| 5.17 | Evolução temporal da inclinação com $i(0) > i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$)..... | 99 |
| 5.18 | Evolução temporal da excentricidade com $i(0) > i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$)..... | 99 |
| 5.19 | Evolução no plano inclinação vs. excentricidade com $i(0) > i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$)..... | 100 |
| 5.20 | Evolução temporal do argumento do perigeu com $i(0) = 45$ graus para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$)..... | 100 |
| 5.21 | Evolução temporal do argumento do perigeu com $i(0) = 70$ graus para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$)..... | 100 |
| 5.22 | Evolução temporal da longitude do nodo com $i(0) = 45$ graus para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$)..... | 101 |
| 5.23 | Evolução temporal da longitude do nodo com $i(0) = 70$ graus para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$)..... | 101 |
| 5.24 | Evolução temporal da inclinação com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$)..... | 101 |
| 5.25 | Evolução temporal da excentricidade com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$)..... | 102 |
| 5.26 | Evolução no plano inclinação vs. excentricidade com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$)..... | 102 |
| 6.1 | Posição do corpo perturbador na esfera celeste e sua relação com os elementos orbitais..... | 114 |
| 6.2 | Triângulo esférico (relaciona as coordenadas equatoriais e os elementos orbitais)..... | 115 |

| | | |
|------|---|-----|
| 6.3 | Evolução temporal da excentricidade para órbitas equatoriais com $a = 0.07$ | 118 |
| 6.4 | Evolução temporal da excentricidade para órbitas equatoriais com $a = 0.110$ | 118 |
| 6.5 | Evolução da inclinação para $a = 0.07$ e $i(0) \leq i_c$ | 119 |
| 6.6 | Evolução da inclinação para $a = 0.07$ e $i(0) > i_c$ | 120 |
| 6.7 | Evolução da inclinação para $a = 0.110$ e $i(0) \leq i_c$ | 119 |
| 6.8 | Evolução da inclinação para $a = 0.110$ e $i(0) > i_c$ | 119 |
| 6.9 | Evolução da inclinação com a variação da excentricidade para órbitas quase equatoriais para $a = 0.07$ | 122 |
| 6.10 | Evolução da excentricidade para uma órbita quase equatorial com $a = 0.07$ | 123 |
| 6.11 | Evolução da inclinação com a variação da excentricidade para $a = 0.110$ | 124 |
| 6.12 | Evolução da excentricidade para uma órbita quase equatorial com $a = 0.110$ | 124 |
| 7.1 | Evolução temporal da inclinação para $i(0) = 75$ graus..... | 128 |
| A.1 | Vetores posição \vec{r} , \vec{r}' das massa m_1 e m' com respeito a massa central m_0 e dos vetores posição \vec{R}_0 , \vec{R}_1 e \vec{R}' com respeito a uma origem arbitrária fixa O | 139 |
| A.2 | Vetores posição \vec{r} , \vec{r}' das duas massas m e m' com respeito a massa central m_0 | 139 |
| B.1 | Vetores base do sistema perifocal..... | 142 |

LISTA DE TABELAS

| | <u>Pág.</u> |
|---|-------------|
| 4.1 Semi-eixo maior e períodos expressos em unidades canônicas..... | 43 |
| 5.1 Ordens de grandezas da função perturbadora da Lua e do Sol..... | 87 |
| 6.1 Valores de p e q para $\ell = 2$ e $z = 0$ | 107 |
| 6.2 Valores para $J(c)_{\ell zp}$ | 108 |
| 6.3 Valores para $L_{\ell pq}(\gamma)$ | 113 |

LISTA DE SÍMBOLOS

Latinos

- a** - semi-eixo maior da órbita do satélite
- a'** - semi-eixo maior da órbita do corpo perturbador
- C'**_{ℓm} - coeficiente harmônico
- e** - excentricidade da órbita do satélite
- E** - anomalia excêntrica do satélite
- f** - anomalia verdadeira do satélite
- f'** - anomalia verdadeira do corpo perturbador
- F**_{ℓmp} (**i**) - função inclinação de Kaula
- G** - constante gravitacional
- H**_{ℓmp} - coeficiente de Hansen
- i** - inclinação da órbita do satélite com respeito ao equador
- i** (**0**) - inclinação inicial da órbita do satélite
- i**_c - inclinação crítica
- i'** - inclinação da órbita do corpo perturbador com respeito ao equador
- m'** - massa do corpo perturbador
- m**₀ - massa do corpo central
- m**_s - massa do satélite
- M** - anomalia média do satélite
- M'** - anomalia média do corpo perturbador
- MOP** - anomalia média inicial do corpo perturbador
- n** - movimento médio do satélite
- n'** - movimento médio do corpo perturbador
- P** - variável não-singular
- \hat{P}** - vetor unitário apontando ao perigeu da órbita do satélite
- P**_ℓ - polinômio de Legendre

- P_{lm} - função associada aos polinômios de Legendre
- Q - variável não-singular
- \hat{Q} - vetor unitário no plano da órbita
- \hat{r} - vetor unitário apontando do corpo central ao satélite
- \hat{r}' - vetor unitário apontando do corpo central ao corpo perturbador
- R - função perturbadora
- S - ângulo entre os raios vetores do corpo perturbador e do satélite
- S'_{lm} - coeficiente harmônico

Gregos

- d - declinação do satélite
- d' - declinação do corpo perturbador
- h - variável não-singular
- l - longitude média
- x - variável não-singular
- w - argumento do perigeu da órbita do satélite
- w' - argumento do perigeu da órbita do corpo perturbador
- v - longitude do pericentro
- W - longitude do nodo ascendente

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os pequenos desvios que sofrem as órbitas dos corpos celestes em relação a um movimento kepleriano são devidos às perturbações orbitais. Estas forças de perturbação incluem os harmônicos do campo gravitacional terrestre (desvios em relação a uma esfera perfeita), as atrações gravitacionais da Lua e do Sol, o arrasto atmosférico, a pressão de radiação solar, radiação da Terra e do albedo, erros na aquisição e reaquisição de dados, possíveis acoplamentos entre a dinâmica de atitude e o controle, interação com as cargas elétricas do meio ambiente, tais como os raios cósmicos e o campo magnético terrestre, etc. Para os satélites naturais com grandes massas, como os satélites de Júpiter e Saturno, a atração mútua entre os satélites é outra fonte de perturbação. Quando inserimos as forças de perturbação no modelo de forças, as soluções das equações de movimento não podem ser expressas em equações com forma fechada.

Diversos estudos foram realizados com respeito ao movimento de um satélite artificial perturbado por um terceiro corpo, existindo diversas formas de representar a função perturbadora. Desta forma, a maioria dos trabalhos existentes fazem um estudo analítico ou semi-analítico das perturbações.

O presente trabalho tem como objetivo estudar a perturbação de um satélite artificial de forma semi-analítica. Para atingir esse objetivo, realizamos o cálculo das médias simples sobre a função perturbadora eliminando os termos de curto período do movimento do corpo perturbado, mostrando o comportamento dos elementos orbitais devido a essa influência. Estas análises são complementadas com um estudo sobre o comportamento das variáveis não-singulares, aplicando sobre elas o modelo de média simples.

No presente trabalho nosso objetivo é estudar a perturbação devida ao terceiro corpo utilizando modelos de médias simples. Além de estudar essa perturbação, faremos uma

análise da perturbação conjunta devida à Lua e ao Sol. A seguir, analisaremos a variação dos elementos orbitais no caso em que as equações de movimento apresentam singularidades (excentricidade e/ou inclinação próximos de zero).

1.1 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em sete capítulos, sendo o primeiro o correspondente a introdução, os objetivos e a organização.

O Capítulo 2 faz uma apresentação do problema, fazendo uma menção breve dos principais trabalhos feitos utilizando o modelo das médias duplas e uma revisão bibliográfica dos principais trabalhos desenvolvidos no estudo da perturbação do terceiro corpo e perturbação conjuntas da Lua e do Sol.

O Capítulo 3 mostra as equações utilizadas no desenvolvimento da função perturbadora devido ao terceiro corpo e seu uso nas equações planetárias de Lagrange.

Depois disso estudaremos no Capítulo 4, a perturbação devido ao terceiro corpo analisando o comportamento dos diversos elementos orbitais (apresentaremos dois casos para a perturbação da Lua e um caso para a perturbação do Sol). Além disso, validaremos nosso modelo de médias simples. Para isso utilizaremos o modelo de médias duplas, fazendo uma análise de forma qualitativa e quantitativa utilizando o método gráfico. A parte final do presente capítulo é dedicada ao estudo das órbitas polares e as órbitas retrógradas, analisando o comportamento dos diversos elementos orbitais.

No Capítulo 5, faremos alguns testes com respeito a perturbação devida ao conjunto Lua e Sol, onde mostraremos o desenvolvimento das funções perturbadoras devidas ao Sol e à Lua. Analisaremos em seguida o comportamento dos diversos elementos orbitais.

Até o Capítulo 5 trabalhamos com valores da inclinação e da excentricidade, que estejam distantes dos valores singulares. No Capítulo 6, fazemos um estudo das singularidades estudando principalmente as órbitas circulares, órbitas equatoriais e as órbitas quase circulares e equatoriais. Todas estas simulações são feitas do ponto de vista do modelo das médias simples.

O Capítulo 7 é dedicado às conclusões e sugestões para futuros trabalhos complementares.

Na seção de apêndices temos os resultados mostrados abaixo.

No Apêndice A fazemos uma curta demonstração de que a partir do estudo do problema de dois corpos com perturbação é possível chegar a função perturbadora utilizada ao longo do presente trabalho.

No Apêndice B obtemos certas relações angulares que serão utilizadas ao longo do presente trabalho. Isso permite encontrar uma relação entre os raios vetores expressos em função dos elementos orbitais.

O Apêndice C é dedicado ao cálculo das médias da função perturbadora expandida em polinômios de Legendre.

No Apêndice D fazemos a transformação de variáveis orbitais para representar o problema em variáveis não-singulares.

O método das médias, além da aplicação feita no presente trabalho, pode-se estender a outros estudos. Um aspecto forte é que para a sua aplicação não é necessária nenhuma consideração de conservação da força, sendo um método aproximado para estudar sistemas dinâmicos perturbados por forças que podem ou não ser conservativas. O ponto principal é que a função deve satisfazer o método das médias. Desta forma, a

técnica aplica-se a sistemas dinâmicos com uma ou mais variáveis fixas, mas também é aplicável ao estudo do movimento de atitude de um satélite.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A presença da Lua e do Sol resulta numa significativa perturbação dos satélites geossíncronos. O principal efeito é o movimento do plano orbital.

As análises da perturbação Lua-Sol sobre satélites artificiais tem suas raízes nos trabalhos clássicos sobre teoria Lunar. As perturbações na excentricidade e na inclinação com respeito ao plano da órbita do corpo perturbador, podem ser maiores no caso de satélites artificiais, precisando-se de novas pesquisas. Um pioneiro nestes estudos foi Kozai (1959), que mostrou a possibilidade de reduções drásticas no tempo de vida de um veículo espacial devido à atração da Lua e do Sol sobre satélites artificiais com órbitas altamente excêntricas.

O estudo aqui desenvolvido é uma continuação dos trabalhos de Broucke (1992) e de Prado (2002a), que fizeram o estudo desse problema considerando modelos de dupla média, ou seja, médias em relação aos termos de curto período do corpo perturbado e com relação a anomalia média M' do corpo perturbador, com expansões da função perturbadora em polinômios de Legendre para a segunda e quarta ordens. Depois disso também temos o trabalho feito por Costa (1998), que realizou as expansões da função perturbadora até a oitava ordem nos polinômios de Legendre. Estas pesquisas são utilizadas para calcular o efeito de perturbações lunares e solares sobre satélites terrestres de grande altitude.

No presente trabalho, esse problema será estudado utilizando modelos com médias simples, ou seja, a média será calculada somente em relação aos termos de curto período do corpo perturbado. A razão desse estudo está na escala de tempo. Para tempos curtos (da ordem de grandeza do período do corpo perturbado, usualmente um satélite) nenhum modelo de média pode ser aplicado e é necessário estudar esse problema com um modelo completo, do tipo “problema restrito de três corpos”. Para tempos longos

(superior ao período do corpo perturbador, que usualmente é o Sol ou a Lua) o modelo de dupla média é bastante interessante. Porém, para tempos intermediários entre os extremos considerados, passa a ser interessante a utilização de um modelo de média simples, onde a média é calculada em relação apenas ao corpo perturbado (satélite), que possui um período menor.

O objetivo básico desse trabalho é o estudo da evolução orbital do corpo perturbado, em particular do comportamento de órbitas quase circulares, principalmente em termos da manutenção do semi-eixo maior, da excentricidade e da inclinação dentro de certos limites pré-fixados. O estudo introdutório dos demais parâmetros orbitais tem por objetivo complementar esse trabalho e não faz parte dos objetivos básicos.

Existem diversas aplicações importantes para esse tipo de pesquisa, tais como: análise de comportamento de órbitas inicialmente circulares, ou órbitas elípticas equatoriais, evolução do perigeu de uma órbita elíptica genérica, etc.

2.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Diversos trabalhos estudaram, com abordagens diferentes, o tópico de perturbações de um terceiro corpo. Um dos primeiros trabalhos encontrados na literatura é Spitzer (1950), que usou os primeiros termos da teoria lunar de Hill-Brown para estudar esse problema com a restrição de excentricidades e inclinações pequenas entre os corpos perturbador e perturbado. Depois disso, Kozai (1959) desenvolveu os termos principais seculares e de longo período da função perturbadora devida à atração gravitacional Lua-Sol em termos dos elementos orbitais do satélite, do Sol e da Lua. Blitzer (1959) obteve estimativas das perturbações do conjunto Lua-Sol usando métodos de mecânica clássica, porém somente para os termos seculares. Na sequência, Moe (1960) utilizou as equações planetárias de Lagrange em um sistema de coordenadas com um eixo na direção do vetor momento angular do corpo perturbador.

Uma das primeiras pesquisas nas perturbações luni-solares de satélites síncronos foi feita por Senhal (1961), que pesquisou os efeitos individuais de vários termos perturbadores utilizando uma aproximação numérica. Frick e Garber (1962), através de análises linearizadas, mostram que o resultado da atração luni-solar é um desvio do plano com pequenas oscilações.

Além disso, Musen (1961) determina as perturbações de longo período causadas pela Lua e pelo Sol no movimento de um satélite artificial. Um primeiro método está baseado na teoria de Gauss para um estudo numérico dos efeitos de longo período em movimento planetário, o qual é aplicado a satélites artificiais. O segundo método é baseado no desenvolvimento da função perturbadora em termos dos polinômios de Legendre. O mesmo Musen (1963) desenvolve novos trabalhos aplicando o método de Halphen às perturbações seculares planetárias, sendo possível aplicar esse método ao estudo dos efeitos de longo período da Lua no movimento de satélites artificiais.

Cook (1962) também utilizou as equações planetárias de Lagrange para obter expressões para a variação dos elementos orbitais durante uma revolução do satélite e para a taxa de variação dos mesmos. Nesse mesmo ano, Kaula (1962) derivou termos

gerais da função perturbadora para a perturbação luni-solar, utilizando elementos equatoriais para a Lua e o Sol, mas não forneceu um algoritmo definitivo para os cálculos.

A estabilidade orbital de dois satélites com períodos de 24 horas sujeito a perturbação do Sol e da Lua é estudada por Martyrko (1967). Posteriormente, Giacaglia et al. (1970) apresenta uma teoria semi-analítica para o movimento de um satélite em torno da Lua, incluindo a força gravitacional da Lua, Terra, Sol e a não-esfericidade da Lua. Os termos com períodos curtos e intermediários são determinados pelo método de Von Zeipel e as perturbações seculares por integração numérica das equações de movimento.

Nos anos 70, esse assunto voltou a ser estudado. Zee (1972) analisa os efeitos da atração luni-solar. Ele empregou um método assintótico de aproximações de mono-freqüência da mecânica não-linear. Ele encontrou resultados considerando que a Terra, o Sol e a Lua são coplanares e se movem em órbitas circulares. Vashkovjak (1973) inseriu os efeitos luni-solares na sua aproximação semi-analítica. Richardson (1976) refinou os trabalhos anteriores considerando uma aproximação de segunda ordem da Lua e considerou o movimento elíptico do Sol próximo do baricentro do sistema Terra-Lua. Giacaglia (1973) obteve a função perturbadora para a perturbação da Lua usando elementos eclípticos para a Lua e elementos equatoriais para o satélite. Foram calculados termos seculares, de longo e de curto períodos e eles foram expressos de forma fechada.

Outro trabalho é de Kozai (1973), que desenvolveu um método alternativo para o cálculo das perturbações luni-solares. A função perturbadora foi expressa em termos dos elementos orbitais do satélite e das coordenadas geocêntricas do Sol e da Lua. Os termos seculares e de longo período são derivados por integração numérica e os de curto período são derivados analiticamente. Em outro estudo, Kamel e Tibbits (1973) estabeleceram a estabilidade relativa de uma órbita com o nodo ascendente sobre o equinócio vernal e inclinação aproximada de 7.5 graus.

A seguir, Cok (1978) calcula as perturbações da Lua sobre um satélite em órbita ao redor da Terra, sendo estas perturbações ocasionadas pelos desvios da Lua com respeito a sua órbita aproximada. Para isso utilizou a teoria lunar de Brown. Posteriormente Kaufman, Alfriend e Dasenbrock (1978) aplicam a teoria da perturbação ao problema de Vinti (estudo do movimento de um corpo ao redor de um esferóide achatado), ao considerar os efeitos da Lua e do Sol. O problema é formulado no espaço de fase inserindo um novo conjunto de variáveis independentes. O objetivo é o desenvolvimento dos termos de segunda ordem seculares e de primeira ordem periódicos.

Na década seguinte, Hough (1981), estudou os efeitos da perturbação luni-solar em órbitas próximas das inclinações de $63,4^\circ$ e $116,6^\circ$ (críticas do ponto de vista do geopotencial da Terra) e concluiu que os efeitos são significativos em altas altitudes, achando variações de grandes períodos na distância do perigeu e na localização angular do mesmo. Além disso, a posição do perigeu não é variada pelo achatamento da Terra próxima à inclinação crítica, onde o perigeu ressonante é causado pelas forças de gravitação norte-sul e devido à distorção da Terra, da Lua, e do Sol. Lane (1989) faz o estudo das perturbações lunares sobre um satélite artificial terrestre considerando um modelo analítico. Este estudo dos efeitos gravitacionais da Lua sobre o satélite considera dois aspectos, primeiro uma expansão em séries da inclinação e da excentricidade da Lua e do satélite e o outro considerando o método das médias.

Na década de noventa, Delhaise e Morbidelli (1993) voltariam a estudar efeitos luni-solares e a inclinação crítica, mas desta vez aplicada aos satélites geossíncronos. Analisando os harmônicos formados pelas combinações da longitude do nodo da Lua e do Sol, encontrando que os termos harmônicos não produzem ressonância. Numa segunda aproximação obtém-se a média sob a hamiltoniana aplicada aos termos não-ressonantes, encontrando que o principal efeito das atrações do Sol e da Lua comparadas à atração terrestre é um forte incremento na amplitude de libração da inclinação e um decréscimo do período de libração. Outro trabalho sobre os efeitos dos grandes termos sobre um satélite em órbita lunar foi de D'avanzo, Teofilatto, Ulivieri

(1997), que consideraram a teoria de perturbação até a primeira ordem, trabalhando com os harmônicos zonais da Lua da mesma ordem de grandeza que J_2 . Em particular, acharam as órbitas congeladas, cujos parâmetros tendem a desaparecer ao longo do tempo. A seguir Steichen (1998) expande a função perturbadora com respeito aos pequenos parâmetros, inserindo uma teoria semi-analítica do movimento da Lua com respeito a Terra e a libração do plano equatorial da Lua. Além disso, as variáveis canônicas de Poincaré levam as equações a formas fechadas com singularidades em $e = 0$ ou $i = 0$. Voltando às perturbações lunisulares, Breiter (1999) estuda os efeitos na ressonância dos ápsides para satélites de baixa altitude determinando as excentricidades ressonantes entre o movimento secular de um satélite em órbita terrestre e as longitudes da Lua e do Sol, esse estudo é feito em uma forma hamiltoniana. O problema é aproximado pelos harmônicos zonais de segunda ordem e por uma aproximação do tipo Hill para os corpos perturbadores. Para cada ressonância são determinadas as variações máximas da excentricidade, sendo as ressonâncias de origem solar mais fortes que as lunares.

Todos esses trabalhos apresentam contribuições fundamentais na área e possuem um enfoque bastante analítico, ricos em derivações de equações. No presente trabalho será buscado um enfoque mais numérico, visando complementar a literatura existente. Mais recentemente surgiram trabalhos mais voltados para resultados e comparações numéricas como o trabalho feito por Prado (2002a), que estuda a perturbação de um terceiro corpo sobre um satélite fazendo um estudo analítico e numérico. Esse trabalho faz também uma aplicação no estudo das perturbações da Lua e do Sol sobre satélites em grandes altitudes. Este estudo é estendido a evolução de órbitas sobre os satélites naturais do nosso sistema Solar, fornecendo as condições que devem ser cumpridas para que as órbitas quase circulares permaneçam quase circulares. Este trabalho faz o estudo do movimento de um satélite com um modelo analítico de dupla média com a função perturbadora expandida em polinômios de Legendre. Esta dupla média é aplicada aos termos de curto período do satélite e a anomalia média do corpo perturbador, e pode-se construir curvas suaves que mostram a evolução dos elementos orbitais para grandes

períodos de tempo. Essa mesma técnica foi aplicada para órbitas retrógradas em Prado (2002b).

CAPÍTULO 3

MODELO MATEMÁTICO DA PERTURBAÇÃO DO TERCEIRO CORPO

Desenvolveremos o trabalho feito por Broucke (1992), o qual utiliza uma forma geral para a função perturbadora do terceiro corpo truncada após o termo de segunda ordem na expansão polinomial de Legendre. Nosso trabalho estende-se até a quarta ordem. Para efetuar a média com relação aos termos de curto período do corpo perturbado foi considerada a hipótese de que o corpo perturbador se encontra a uma distância muito maior em relação ao corpo central do que o corpo perturbado (ver Figura 3.1).

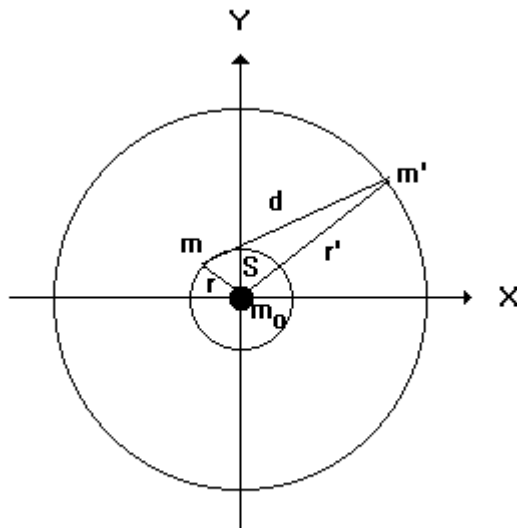


Fig. 3.1 - Ilustração da Perturbação do Terceiro Corpo.

A função perturbadora utilizada é dada por:

$$\mathbf{R} = \frac{m'G(m_0 + m')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(S)}} \quad (3.1)$$

Sendo S o ângulo entre os raios vetores dos corpos perturbador e perturbado. Assumindo $r' \gg r$ e expandindo R em polinômios de Legendre em função de r' e r , temos:

$$\mathbf{R} = \frac{m'G(m_0 + m')}{r'} \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^{\ell} P_{\ell}(\text{Cos}(S)) \quad (3.2)$$

Voltando a Figura 3.1, temos que r' é o raio vetor apontando do corpo central ao corpo perturbador; m_0 é a massa do corpo central; n é o movimento médio do corpo perturbado, obtido através da Lei de Kepler, $n^2 a^3 = Gm_0$; a, e, i, ω, Ω são os elementos orbitais do corpo perturbado, n' é o movimento médio do corpo perturbador em seu movimento em torno de m_0 , obtido de $n'^2 a'^3 = G(m_0 + m')$; r é o raio vetor do corpo perturbado (assumiremos que $r' \gg r$); m é a massa do corpo perturbado; m' é a massa do corpo perturbador; e, pela utilização de unidades canônicas, $\mu' = \frac{m'}{m_0 + m'}$.

A partir da Equação (3.2) vamos executar o desenvolvimento da função perturbadora para as diversas ordens do polinômio de Legendre, em função de r' e r .

Desenvolvendo o função perturbadora em polinômios de Legendre até a segunda ordem, temos:

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{K}_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 [3\text{Cos}^2(S) - 1] \quad (3.3)$$

Onde:

$$\mathbf{K}_2 = a^2 (n')^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \frac{m'}{2} \quad (3.4)$$

Definiremos as quantidades $\alpha = \hat{r}' \cdot \hat{P}$ e $\beta = \hat{r}' \cdot \hat{Q}$, onde \hat{r}' é um vetor unitário dirigido desde o corpo central até o corpo perturbador. O ponto representa o produto escalar dos dois vetores. \hat{P} e \hat{Q} são vetores da base do sistema perifocal, com \hat{P} apontando para o periápside. Usando a relação entre o ângulo S e a anomalia verdadeira do satélite temos (Broucke, 1992):

$$\text{Cos}(S) = a \text{Cos}(f) + b \text{Sen}(f) \quad (3.5)$$

Além disso, para o caso especial de órbita circular para o corpo perturbador obtém-se a seguinte relação (ver Apêndice B):

$$a = \text{Cos}(w)\text{Cos}(W - M') - \text{Cos}(i)\text{Sen}(w)\text{Sen}(W - M') \quad (3.6)$$

$$b = -\text{Sen}(w)\text{Cos}(W - M') - \text{Cos}(i)\text{Cos}(w)\text{Sen}(W - M') \quad (3.7)$$

f: anomalia verdadeira do veículo espacial.

Lembrando que o corpo perturbador está em uma órbita circular, então $f' = M'$. Considerando as Equações 3.7 e 3.6, e utilizando-as em na Equação 3.5 e depois levando em conta a Equação 3.3 temos que:

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{K}_2 \left(\frac{\mathbf{r}}{a}\right)^2 \left[3a^2 \text{Cos}^2(f) + 6ab \text{Cos}(f)\text{Sen}(f) + 3b^2 \text{Sen}^2(f) - 1 \right] \quad (3.8)$$

Onde a media é calculada a partir da expressão (os cálculos são mostrados no Apêndice C):

$$\langle \mathbf{G} \rangle = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \mathbf{G} dM \quad (3.9)$$

Elimina-se então, após a média simples (em relação ao corpo perturbado), os termos de curto período do movimento do corpo perturbado.

A média será feita pela definição usual, mostrada pela Equação (3.9). Para isso usaremos as seguintes igualdades conhecidas da Mecânica Celeste:

$$\begin{aligned} \text{Sen}(f) &= \frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{1 - e\text{Cos}(E)} \text{Sen}(E) \\ \text{Cos}(f) &= \frac{\text{Cos}(E) - e}{1 - e\text{Cos}(E)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{\mathbf{r}}{a}\right) = 1 - e\text{Cos}(E)$$

$$dM = (1 - e\text{Cos}(E))dE$$

Desta forma, efetuando as médias na Equação (3.8) temos:

$$\langle \mathbf{R}_2 \rangle = \left(\frac{3}{2}\right) \mathbf{K}_2 \frac{e}{a} a^2 (1 + 4e^2) + b^2 (1 - e^2) - \left(\frac{2}{3} + e^2\right) \frac{m}{a} \quad (3.11)$$

Continuando a expansão da função perturbadora em polinômios de Legendre até a terceira ordem e considerando as Equações 3.5 , 3.6 , 3.7, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_3 = \mathbf{K}_3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 [5(a^3 \text{Cos}^3(f) + 3a^2 b \text{Cos}^2(f) \text{Sen}(f) + \\ 3a b^2 \text{Cos}(f) \text{Sen}^2(f) + b^3 \text{Sen}^3(f) - 3a \text{Cos}(f) - 3b \text{Sen}(f))] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Aonde

$$\mathbf{K}_3 = a^3 (n')^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \frac{m'}{r'} \quad (3.13)$$

Após do cálculo das médias temos:

$$\langle \mathbf{R}_3 \rangle = \frac{m' a^3 n'^2}{2a'} \left(\frac{a'}{r'}\right)^4 \left[\frac{15ae(4 + 3e^2)}{8} - \frac{25a^3 e(3 + 4e^2)}{8} + \frac{75a b^2 e(e^2 - 1)}{8} \right] \quad (3.14)$$

Agora faremos a expansão da função perturbadora em polinômios de Legendre até a quarta ordem, obtemos:

$$\mathbf{R}_4 = \mathbf{K}_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 [35 \text{Cos}^4(S) - 30 \text{Cos}^2(S) + 3] \quad (3.15)$$

Onde

$$\mathbf{K}_4 = a^4 (n')^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \frac{m'}{8(r')^2} \quad (3.16)$$

Das Equações 3.5, 3.6, 3.7 temos:

$$\mathbf{R}_4 = \mathbf{K}_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 [35(a \text{Cos}(f) + b \text{Sen}(f))^4 - 30(a \text{Cos}(f) + b \text{Sen}(f))^2 + 3] \quad (3.17)$$

Após do cálculo das médias obtemos:

$$\langle R_4 \rangle = \frac{3m' a'^3 n'^2 a^4}{64r'^5} [(8 + 40e^2 + 15e^4) - 10a^2(4 + 41e^2 + 18e^4) + 35a^4 * (1 + 12e^2 + 8e^4) - 10b^2(4 - e^2 - 3e^4) + 70a^2b^2(1 + 5e^2 - 6e^4) + 35b^4(e^2 - 1)^2] \quad (3.18)$$

A partir das funções perturbadoras, obtém-se as equações do movimento do corpo perturbado através das equações planetárias de Lagrange (Taff, 1985):

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \quad (3.20)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial w} \quad (3.21)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-\cos(i)}{\text{Sen}(i)[ma(1 - e^2)]^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (3.22)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos(i)}{\text{Sen}(i)[ma(1 - e^2)]^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial w} - \frac{1}{\text{Sen}(i)[ma(1 - e^2)]^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial W} \quad (3.23)$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\text{Sen}(i)[ma(1 - e^2)]^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (3.24)$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} \quad (3.25)$$

Essas equações estão baseadas no conceito de órbitas osculadoras (a qual dá origem ao conceito de elementos instantâneos). Esta órbita osculadora aparece pelas retificações que sofre a órbita. Assim os elementos orbitais tem um claro significado físico, as variações que experimentam essas variáveis devidas aos efeitos da perturbação são fáceis de serem observadas. É possível restringir, em uma primeira aproximação, as forças perturbadoras, as quais podem ser derivadas a partir de uma função potencial. O negativo desse potencial fornece a função perturbadora.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS PARA A PERTURBAÇÃO DO TERCEIRO CORPO

Considerando a expansão da função perturbadora até a quarta ordem nos polinômios de Legendre e o modelo de médias simples, encontraremos os efeitos perturbadores de um terceiro corpo sobre a órbita de um satélite em órbita terrestre. Num primeiro caso consideraremos o corpo perturbador a Lua.

Faremos as simulações para diferentes altitudes e realizaremos a variação na inclinação inicial da órbita. Desta forma consideraremos um satélite em órbita terrestre com um semi-eixo maior de 0.341 unidades canônicas de comprimento. A seguir consideraremos um satélite em órbita terrestre em uma altitude geossíncrona de semi-eixo maior 0.110 unidades canônicas de comprimento, e por último estudaremos a órbita de um satélite com semi-eixo maior de 0.07 unidades canônicas perturbado pelo Sol. Essas simulações são feitas considerando mudanças na inclinação inicial.

A escala de tempo utilizada em unidades canônicas considera o período do corpo perturbador (a Lua) como 2π o qual equivale a 27.321 dias. A Tabela 4.1 mostra os valores do semi-eixo maior e do período das órbitas consideradas.

TABELA 4.1 – SEMI-EIXO MAIOR E PERÍODOS EXPRESSOS EM UNIDADES CANÔNICAS

| Semi-eixo maior (Km) | Semi-eixo maior (unidades canônicas) | Período (dias) | Período (unidades canônicas) |
|----------------------|--------------------------------------|----------------|------------------------------|
| 384400* | 1 | 27.322* | 2π |
| 131080 | 0.341 | 5.435 | 1.25 |
| 42284 | 0.110 | 1.087 | 0.25 |
| 26908 | 0.07 | 0.478 | 0.11 |

*Dados extraídos do livro do Danby (1989), página 430.

4.1 SIMULAÇÃO DA PERTURBAÇÃO DA LUA

Inicialmente vamos efetuar a análise da inclinação e da excentricidade. Os resultados obtidos nesta seção são baseados na expansão da função perturbadora em polinômios de Legendre até a quarta ordem, considerando o modelo de médias simples.

É importante encontrar as condições para que um veículo espacial que está em uma órbita quase circular em torno do corpo principal, permaneça numa órbita quase circular depois de um certo tempo. Esta condição depende da inclinação inicial.

Se a inclinação é maior que a inclinação crítica as órbitas inicialmente quase circulares chegam a ficar muito elípticas depois de algum tempo. De forma contrária, se a inclinação é menor que a inclinação crítica, as órbitas permanecem quase circulares. Assim sendo, se desejamos órbitas quase circulares por longos períodos, temos que escolher órbitas com inclinação inicial abaixo da inclinação crítica.

Mais adiante faremos análises da inclinação e da excentricidade para um amplo intervalo de valores iniciais da inclinação que vai desde 0 até 80 graus. As análises para as regiões abaixo da inclinação crítica mostram que a inclinação permanece no seu valor inicial, pois pelas escalas utilizadas não podemos observar as pequenas oscilações. Para os valores da inclinação inicial ligeiramente acima do ângulo crítico (alguns graus), a inclinação inicia no seu valor inicial decrescendo até o valor crítico e depois retorna ao seu valor original. Para os valores da inclinação inicial acima do ângulo crítico as excentricidades oscilam com grandes amplitudes, porém a inclinação conserva seu clássico comportamento de iniciar no valor pré-fixado e decrescer até seu valor crítico, voltando depois ao seu valor original. Esse comportamento se repete num ciclo sem fim. Além disso, o tempo requerido para atingir o valor crítico decresce com o incremento da inclinação inicial.

O ângulo crítico esta relacionado ao comportamento dos elementos orbitais. No presente trabalho sempre desejamos que os elementos orbitais não se alterem de forma significativa, permanecendo próximos aos seus valores nominais.

Esse fato acontece de forma semelhante aos efeitos dos termos J_2 para as órbitas afetadas pelo potencial da Terra. Neste caso, os valores da inclinação quando $w' = 0$ são chamados de críticos, os quais não dependem do valor J_2 nem dos outros elementos orbitais (só dependem da inclinação).

Considerando a variação do argumento do perigeu para o modelo de dupla média, e considerando a função perturbadora expandida em polinômios de Legendre até a segunda ordem temos (Prado, 2002a):

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} = & \frac{3m'n'^2}{8n\sqrt{1-e^2}} \left[(5\text{Cos}^2(i) - 1 + e^2) + 5(1 - e^2 - \text{Cos}^2(i))\text{Cos}(2w) \right] + \\ & \frac{9m'n'^2 a^2 \sqrt{1-e^2}}{32.768a'^2 n} \left[5C_1 + C_3 \text{Cos}(2w) + \frac{15}{4} C_1 e^2 + C_3 e^2 \text{Cos}(2w) + \right. \\ & \left. 2C_6 e^2 \text{Cos}(4w) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Onde é necessário também que $i' = e' = 0$, pela presença de e e i na Equação 4.1, temos (Prado, 2002a):

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} = & \frac{15m'n'^2 e\sqrt{1-e^2}}{8n} \text{Sen}^2(i)\text{Sen}(2w) + \frac{9m'n'^2 a^2 \sqrt{1-e^2}}{65.536a'^2 n} \left[2C_3 e \text{Sen}(2w) + \right. \\ & \left. C_3 e^3 \text{Sen}(2w) + 4C_6 e^3 \text{Sen}(4w) \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} = & - \frac{15m'n'^2 e\sqrt{1-e^2}}{16n} \text{Sen}^2(i)\text{Sen}(2w) - \frac{9m'n'^2 a^2 \text{Cos}(i)}{65.536a'^2 n \sqrt{1-e^2} \text{Sen}(i)} \left[2C_3 e^2 * \right. \\ & \left. \text{Sen}(2w) + C_3 e^4 \text{Sen}(2w) + 4C_6 e^4 \text{Sen}(4w) \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Onde:

$$\begin{aligned}
C_1 &= 144 + 320\text{Cos}(2i) + 560\text{Cos}(4i) \\
C_2 &= 5C_1 \\
C_3 &= 1680 + 224\text{Cos}(2i) - 3920\text{Cos}(4i) \\
C_4 &= \frac{15}{8}C_1 \\
C_5 &= \frac{C_3}{2} \\
C_6 &= 4410 - 5880\text{Cos}(2i) + 1470\text{Cos}(4i)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Para satisfazer as Equações 4.3 e 4.2 é necessário que $\text{Sen}(2w) = 0$, o que implica que $\text{Cos}(2w) = \pm 1$. Se consideramos que a solução é $\text{Cos}(2w) = 1$, então $e = 1$, o qual traz como consequência que a órbita inicialmente quase-circular se converte em parabólica. Caso isto aconteça o semi-eixo maior fica indefinido. Agora se $\text{Cos}(2w) = -1$, temos que $w = 90^\circ$ ou $w = 270^\circ$. Uma condição é então:

$$\begin{aligned}
5\text{Cos}^2(i) + e^2 - 5 + 5e^2 + 5\text{Cos}^2(i) &= 0 \\
e^2 &= 1 - \frac{5}{3}\text{Cos}^2(i)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Esta é a relação entre a inclinação e a excentricidade que permite a existência das órbitas congeladas. Da Equação 4.5 a condição $\text{Cos}^2(i) < \frac{3}{5}$ é obtida. Esta condição nos fornece o valor do ângulo crítico, devido a restrição $e^2 > 0$.

Fazendo análises para $a = 0.341$, a Figura 4.1 mostra a evolução temporal da inclinação para valores iniciais menores que a inclinação crítica, as 6000 unidades canônicas de tempo representam aproximadamente 71 anos. Os resultados mostram que elas permanecem praticamente constantes. Isso é consequência da escala utilizada (ver Figura 4.6). A Figura 4.2 apresenta a evolução com respeito ao tempo da inclinação para valores da inclinação inicial maiores que a inclinação crítica, no qual se mostra o típico comportamento da inclinação. Devemos observar que a medida que a inclinação inicial aumenta, o tempo requerido para atingir o ângulo crítico é menor.

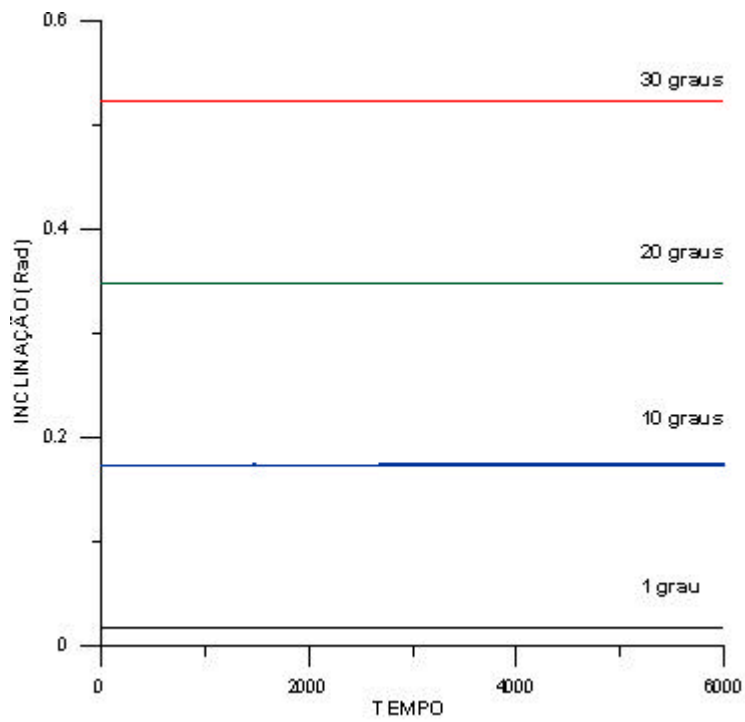


Fig. 4.1 - Evolução temporal da inclinação para $a(0) = 0.341$ e $i(0) < i_c$.

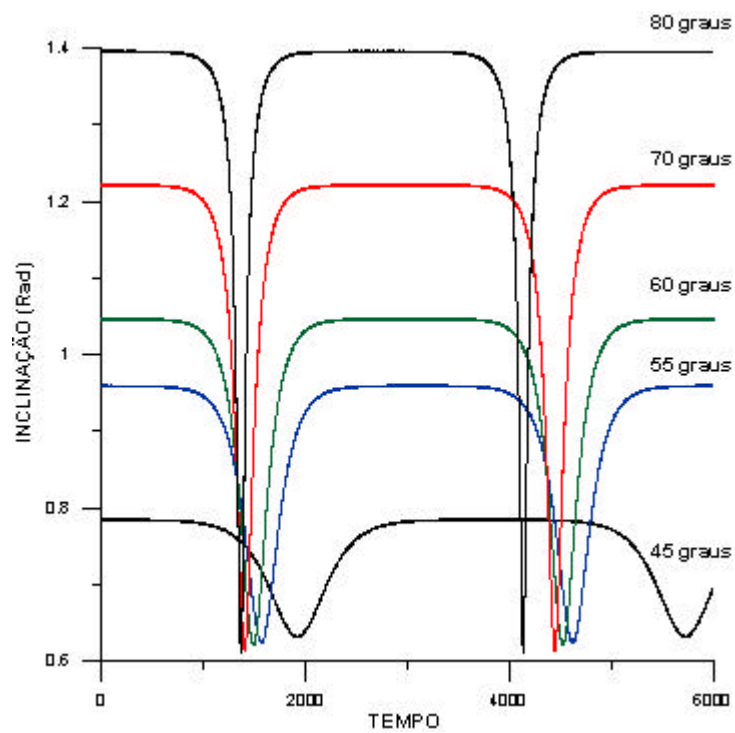


Fig. 4.2 - Evolução temporal da inclinação para $a(0) = 0.341$ e $i(0) > i_c$.

As simulações feitas para $a = 0.110$ apresentam o mesmo comportamento (ver Figuras 4.3 e 4.4), onde a escala de tempo utilizada de 30000 unidades canônicas representam aproximadamente 357 anos. Mostra-se que o efeito é maior quando o satélite está mais próximo do corpo perturbador pois as variações acontecem num tempo menor.

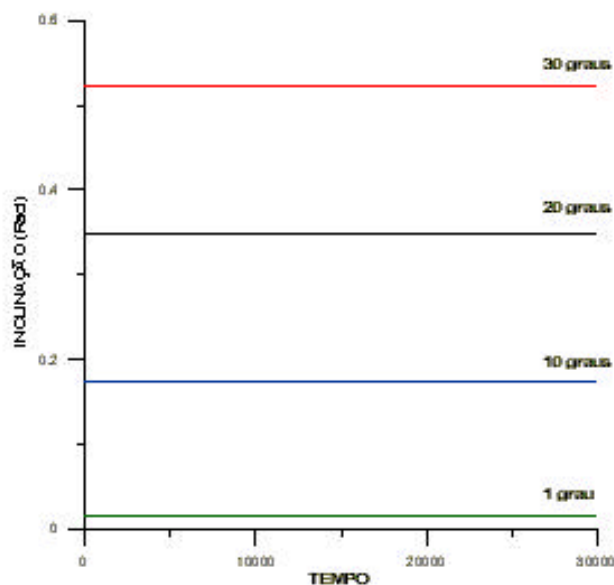


Fig. 4.3 - Evolução temporal da inclinação para $a(0) = 0.110$ e $i(0) < i_c$.

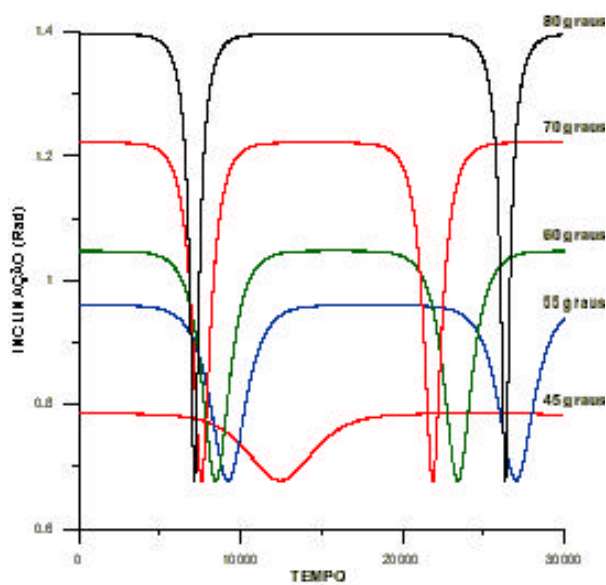


Fig. 4.4 - Evolução temporal da inclinação para $a(0) = 0.110$ e $i(0) > i_c$.

A Figura 4.5 mostra o comportamento da inclinação para valores iniciais próximos da inclinação crítica. Pela escala utilizada só podemos observar as variações que experimentam os ângulos de 40 e 43 graus, embora para 38 graus existam pequenas variações na amplitude (ver Figura 4.6). Podemos estudar estes comportamentos mudando a escala. Lembremos que essa inclinação é menor que a inclinação crítica ($i_c \approx 39$ graus), obtido de $\text{Cos}^2(i) = \frac{3}{5}$.

A Figura 4.6 ilustra bem a diferença entre os modelos de média simples e dupla. O modelo de dupla média teria como resultado uma linha contínua. No caso da excentricidade, para órbitas com $a = 0.341$, podemos ver que com inclinações iniciais menores que a inclinação crítica é possível observar sua evolução com respeito ao tempo.

Para 30 graus (ver Figura 4.7) existe uma amplitude de 0.008 embora conforme o ângulo diminua, as amplitudes também diminuam. Para 20 graus a amplitude é de 0.003 e para 10 graus a amplitude é de 0.002. A escala utilizada não permite analisar a evolução para 1 grau, ela é mostrada separadamente na Figura 4.8, onde as simulações mostram as pequenas oscilações existentes.

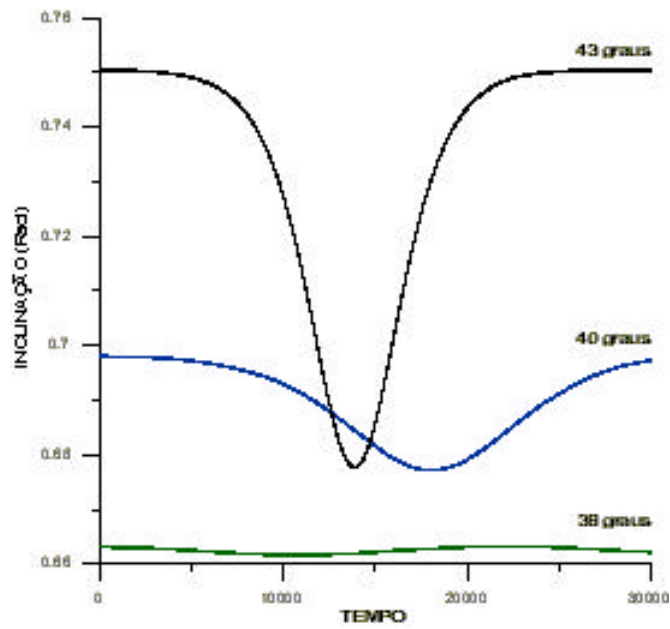


Fig. 4.5 - Evolução temporal da inclinação para $a(0) = 0.110$ e inclinações próximas da i_c .

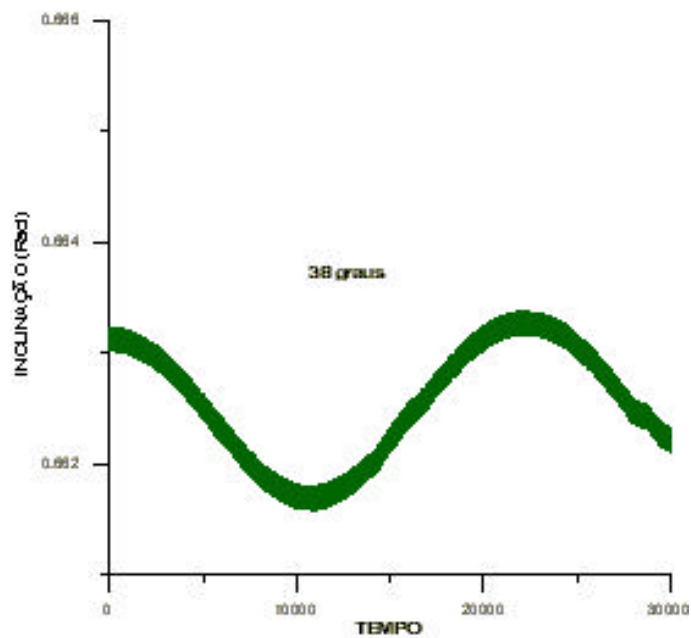


Fig. 4.6 - Evolução da inclinação para $a(0) = 0.110$ e $i(0) = 38$ graus.

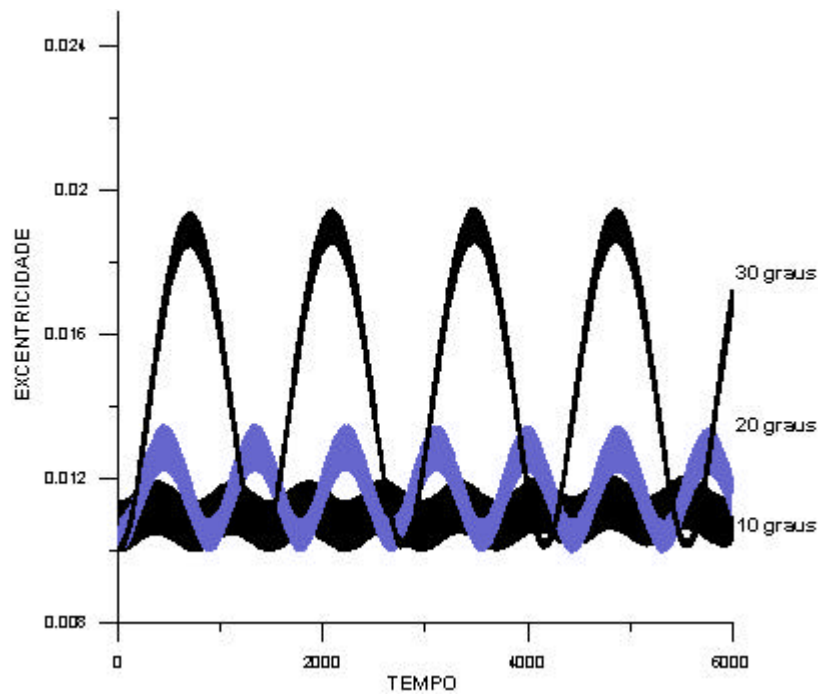


Fig. 4.7 - Evolução temporal da excentricidade para $a(0) = 0.341$ e $i(0) < i_c$.

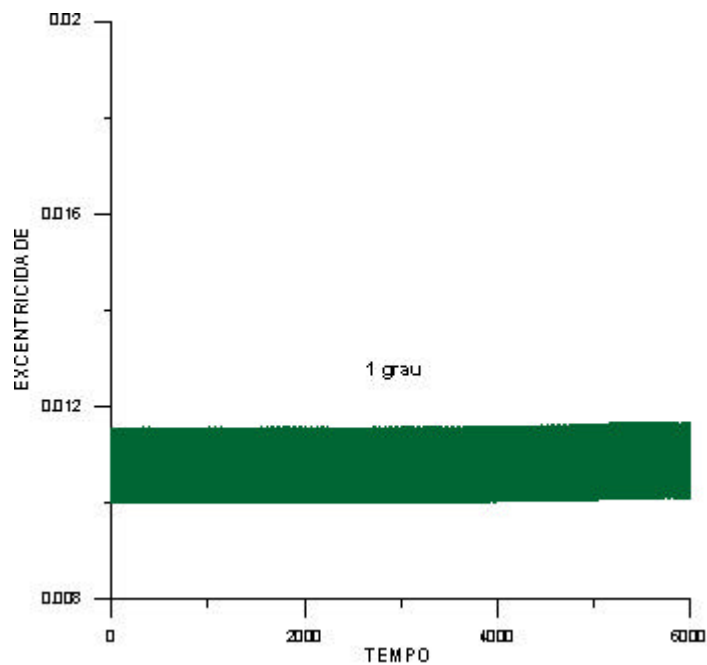


Fig. 4.8 - Evolução temporal da excentricidade para $a(0) = 0.341$ e $i(0) = 1$ grau.

Porém, as excentricidades cujas inclinações iniciais estão acima da inclinação crítica mostram grandes variações. Por exemplo na Figura 4.2, para $i(0) = 45$ graus, a amplitude é de 0.49. Conforme o ângulo aumenta as amplitudes também aumentam, conforme mostrado no caso de $i(0) = 70$ graus cuja amplitude é de 0.89. Devemos levar em consideração que, quando essas curvas atingem suas máximas amplitudes, as inclinações atingem seus valores críticos (ver Figuras 4.2 e 4.10).

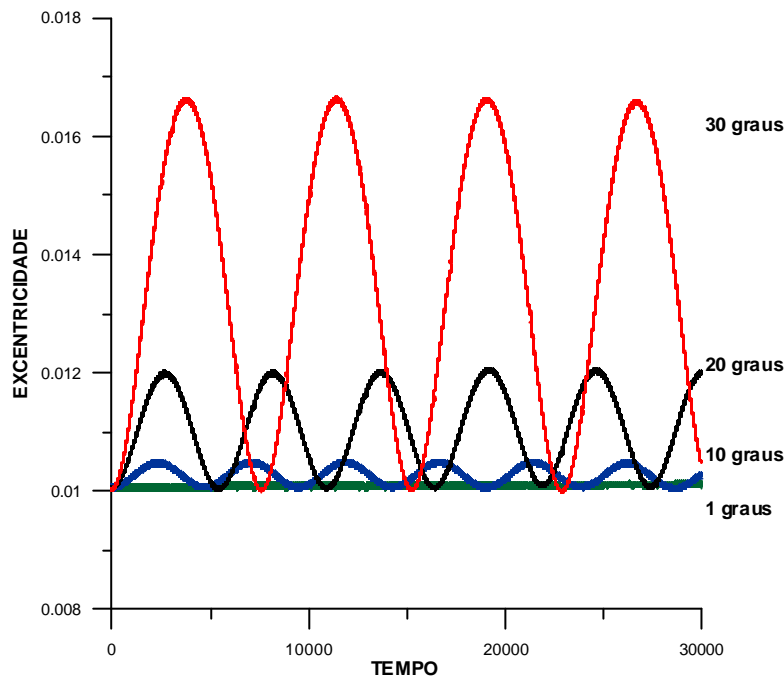


Fig. 4.9 - Evolução temporal da excentricidade para $a(0) = 0.110$ e $i(0) < i_c$.

Nas simulações para $a = 0.110$ (Figura 4.9), observa-se pela escala considerada que a excentricidade, para uma inclinação inicial de 1 grau, não mostra mudanças consideráveis. Porém, para 30 graus, 20 graus e 10 graus, existem oscilações de pequenas amplitudes (0.006, 0.002, 0.0005, respectivamente). É possível fazer uma comparação com a Figura 4.7 e observar que, quando o satélite está mais próximo do corpo perturbador, os efeitos são maiores e a excentricidade apresenta uma maior amplitude de variação.

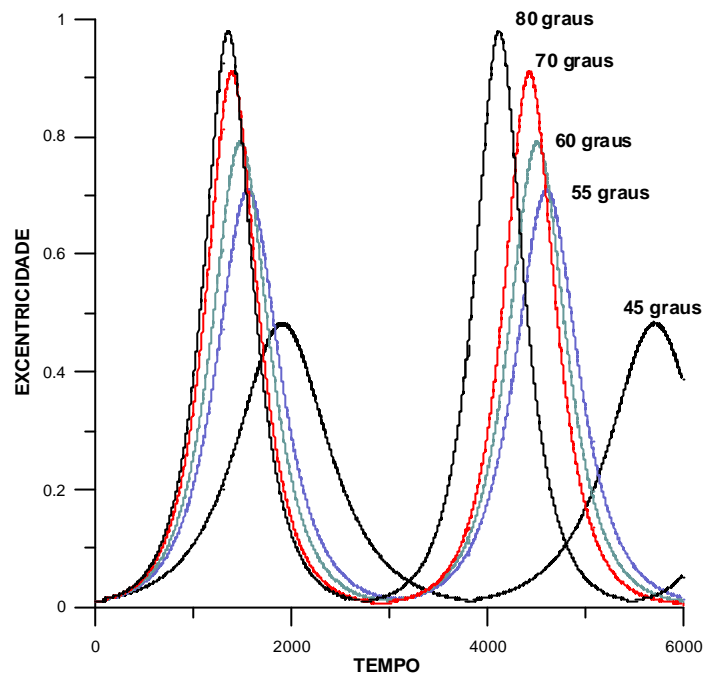


Fig. 4.10 - Evolução temporal da excentricidade para $a(0) = 0.341$ e $i(0) > i_c$.

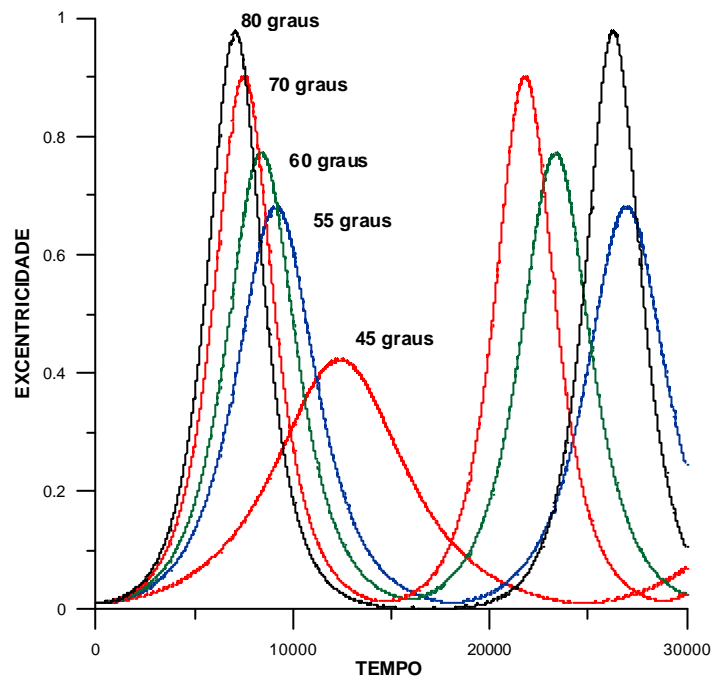


Fig. 4.11 - Evolução temporal da excentricidade para $a(0) = 0.110$ e $i(0) > i_c$.

Nas análises das inclinações próximas da inclinação crítica nota-se um forte incremento nas amplitudes das variações da excentricidade. A Figura 4.12 mostra a evolução temporal dessas excentricidades. Desta forma, para $i(0) = 38$ graus temos uma amplitude de 0.040, para $i(0) = 40$ graus temos uma amplitude de 0.08 e a partir daí existe um forte incremento na amplitude, como por exemplo para $i(0) = 43$ graus, onde a amplitude é de 0.25.

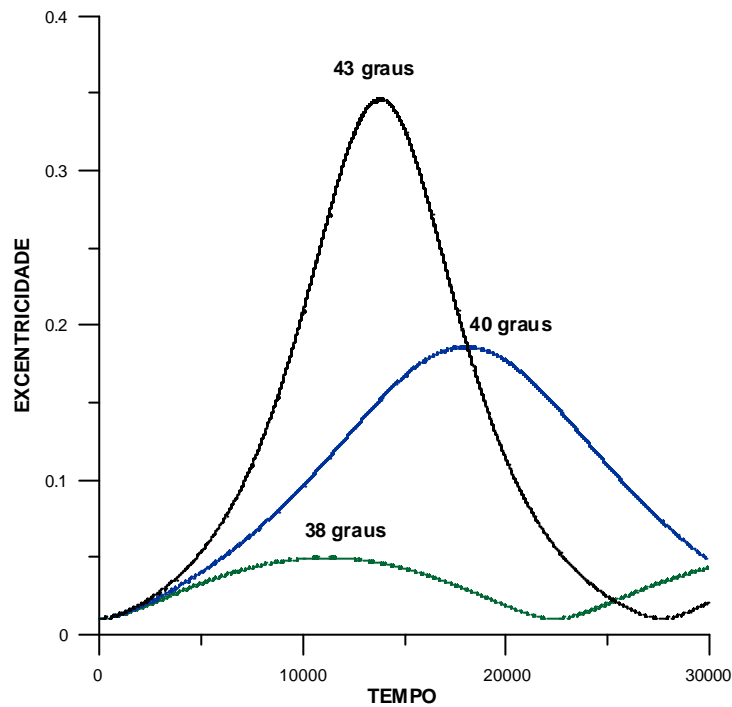


Fig. 4.12 - Evolução temporal da excentricidade para $a(0) = 0.110$ e inclinações próximas de i_c .

O comportamento típico, ou seja o fato de que o aumento da inclinação inicial aumenta as amplitudes de variação da excentricidade, mostra-se também na Figura 4.12, pois as amplitudes são menores do que as mostradas na Figura 4.11.

É possível analisar os comportamentos da inclinação e da excentricidade pelo estudo das equações de movimento. Desta forma, a magnitude da derivada da excentricidade e' é dependente de $e\sqrt{1 - e^2}$. Estes coeficientes afetam as expressões senoidais e

cosenoidais de w , W , t , i . Este termo cresce com a excentricidade a partir de $e = 0.01$ devido a presença de e . Depois que o valor máximo é atingido (próximo de 1), esse termo começa a decrescer devido à presença de $\sqrt{1 - e^2}$. O comportamento oscilatório deve-se à presença das funções senoidais e cosenoidais. A análise pode ser feita também para a derivada da inclinação i' . Está quantidade tem duas partes, a primeira relacionada com $(\cot gi)(e/\sqrt{1 - e^2})$ e a segunda com $(\cosseci)(1/\sqrt{1 - e^2})$. Porém, estes coeficientes afetam as expressões senoidais e cosenoidais de w , W , t , i . Desta forma, estes termos originam o típico comportamento de regiões de inclinação constante alternadas com agudos crescimentos e decrescimentos. Além disso, o termo $\sqrt{1 - e^2}$, que aparece neste caso de forma inversa, justifica o comportamento observado que, quando a excentricidade atinge sua máxima amplitude a inclinação atinge seu valor crítico (mínimo).

A seguir faremos a análise do argumento do perigeu. Esta parte da análise será feita para um satélite em órbita terrestre com um semi-eixo maior ideal de 0.341 unidades canônicas de comprimento. Desta forma, para tempos pequenos eles apresentam um comportamento secular e oscilatório.

Para uma escala de tempo maior (ver Figura 4.13), e para inclinações iniciais abaixo da inclinação crítica, existe um claro comportamento secular. Conforme a inclinação inicial se aproxima do valor crítico, se pode mostrar o forte comportamento secular e oscilatório (ver Figura 4.14).

Ao realizar a superposição dos gráficos para inclinações menores que a inclinação crítica, observa-se que quando a inclinação inicial é menor o argumento do perigeu sofre uma maior variação com respeito ao tempo (Figura 4.13).

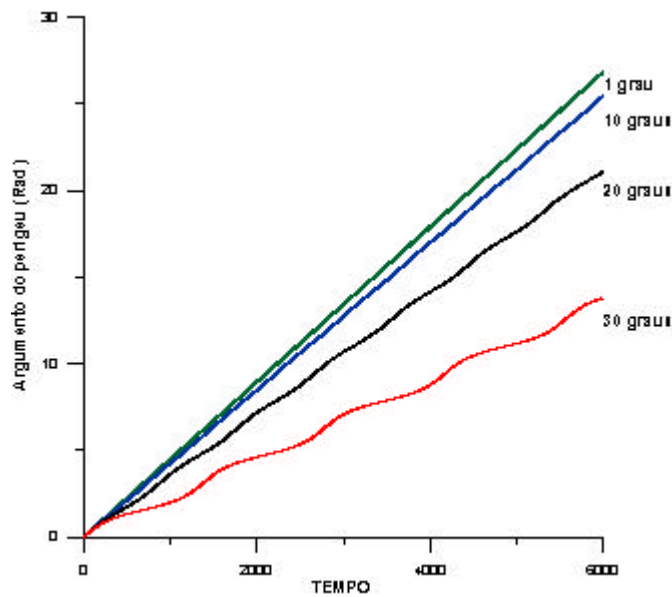


Fig. 4.13 - Evolução temporal do argumento do perigeu para $a(0) = 0.341$ e $i(0) < i_c$.

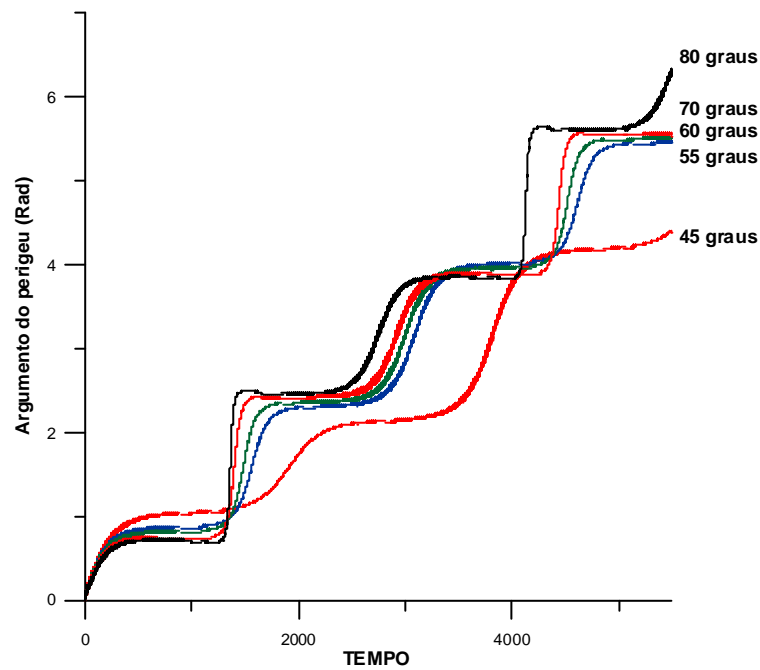


Fig. 4.14 - Evolução temporal do argumento do perigeu para $a(0) = 0.341$ e $i(0) > i_c$.

Estas variações tem um comportamento inverso para inclinações iniciais acima do valor crítico. A partir da Figura 4.14 observa-se que, para tempos maiores que 1400 unidades canônicas, elevados valores iniciais da inclinação apresentam evolução temporal mais

rápida, embora pelas oscilações que eles apresentam, existem regiões onde os gráficos são fortemente superpostos.

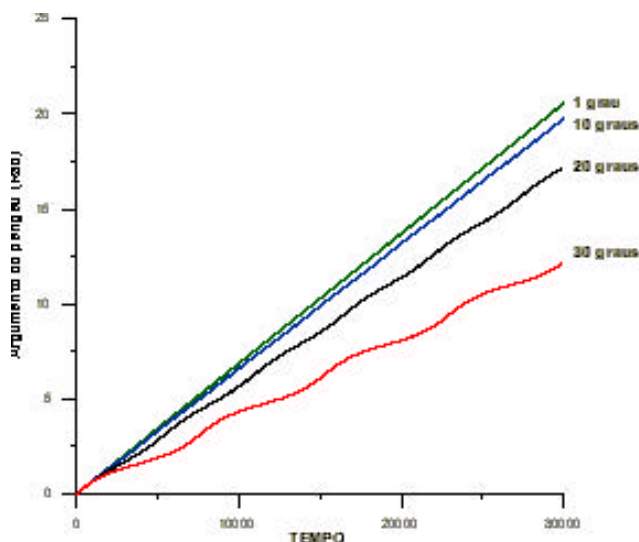


Fig. 4.15 - Evolução temporal do argumento do perigeu para $a(0) = 0.110$ e $i(0) < i_c$.

Nas simulações feitas considerando um semi-eixo maior de 0.110 unidades canônicas de comprimento, as inclinações iniciais abaixo da inclinação crítica ainda apresentam o comportamento típico comentado anteriormente (Figuras 4.13 e 4.15). A escala de tempo utilizada de 30000 unidades canônicas mostra que, para valores iniciais da inclinação pequenos, existe uma variação maior no argumento do perigeu. Fazendo uma comparação entre as Figuras 4.13 e 4.15 observa-se que, quando o satélite está mais próximo do corpo perturbador (neste caso a Lua), ele sofre uma maior variação no argumento do perigeu.

As variações no argumento do perigeu continuam diminuindo à medida que as inclinações iniciais estão próximas da inclinação crítica.

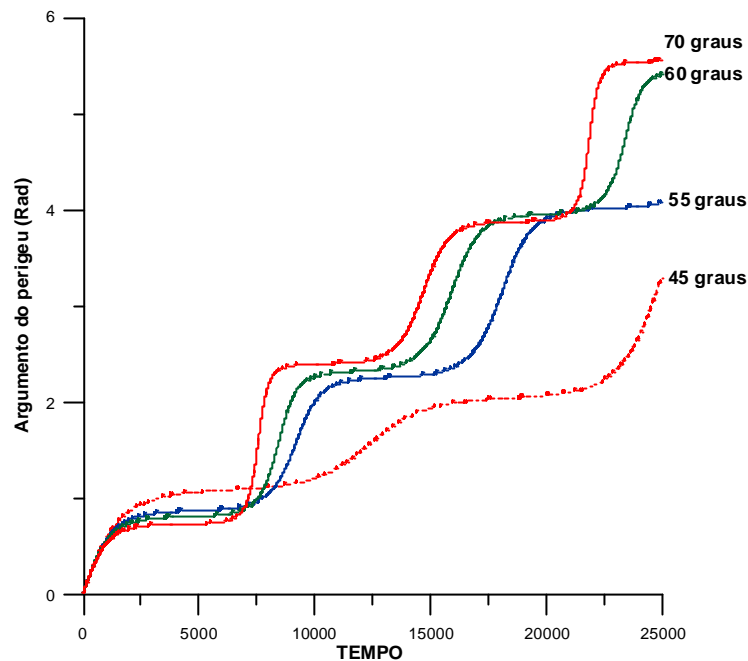


Fig. 4.16 - Evolução temporal do argumento do perigeu para $a(0) = 0.110$ e $i(0) > i_c$.

Realizando as simulações para ângulos próximos à inclinação crítica, com 30000 unidades canônicas de tempo, nota-se que para a inclinação inicial de 38 graus atinge-se um valor próximo de 229.18 graus, mas para $i(0) = 40$ graus, no mesmo tempo, atinge-se um valor de 100.27 graus. O comportamento típico mostra que, a medida que a inclinação inicial aumenta, o argumento do perigeu apresenta um comportamento secular e oscilatório.

Num tempo canônico de 25000 unidades a Figura 4.16 mostra o comportamento secular e oscilatório do argumento do perigeu. Fazendo a comparação entre as Figuras 4.14 e 4.16 observa-se que a primeira atinge variações maiores no argumento do perigeu para uma escala de tempo menor.

A seguir vamos analisar a longitude do nodo ascendente. As figuras mostradas tem um comportamento similar ao argumento do perigeu, nas simulações feitas para $a = 0.341$. Nota-se que para os ângulos pequenos (abaixo da inclinação crítica) a longitude do nodo apresenta uma maior regressão (Figura 4.17). Além disso, pela escala utilizada, só é possível observar o comportamento secular.

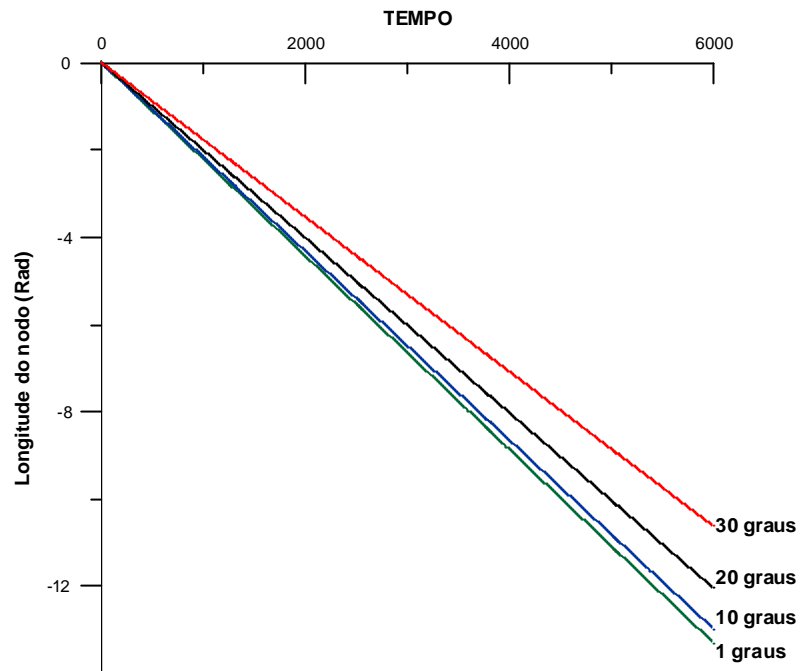


Fig. 4.17 - Evolução temporal da longitude do nodo para $a(0) = 0.341$ e $i(0) < i_c$.

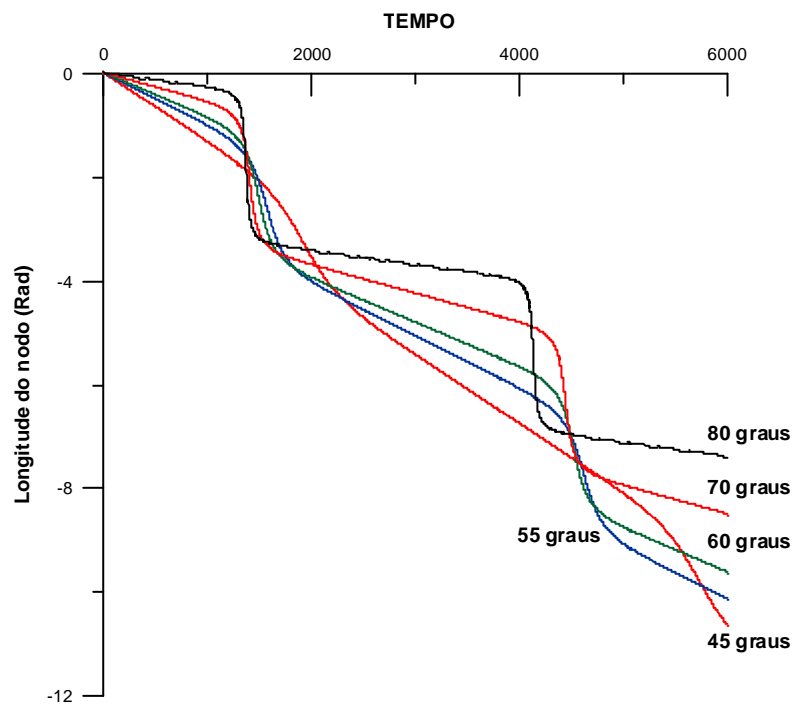


Fig. 4.18 - Evolução temporal da longitude do nodo para $a(0) = 0.341$ e $i(0) > i_c$.

Para 6000 unidades canônicas de tempo e inclinações iniciais maiores que a inclinação crítica (Figura 4.18), existe um típico comportamento secular e oscilatório. Além disso, fazendo uma comparação entre as Figuras 4.18 e 4.2, os pontos de mínimo nas oscilações da longitude do nodo tem relação com as máximas amplitudes que atinge a excentricidade (Figura 4.10) e com o descenso das curvas da inclinação, quando estão próximas da inclinação crítica (Figura 4.18).

Fazendo uma análise para as situações aonde a inclinação inicial está abaixo e próxima à inclinação crítica ($a = 0.110$), estas apresentam movimento retrógrado. E para valores pequenos da inclinação inicial existe uma regressão maior com respeito ao tempo. Desta forma, quando as inclinações iniciais crescem, a regressão diminui (Figura 4.19).

Os ângulos próximos à inclinação crítica (38 graus, 40 graus e 43 graus) não apresentam diferenças significativas nas primeiras 12000 unidades canônicas de tempo, nota-se apenas que para 43 graus existe uma variação retrógrada maior na longitude do nodo. Para ângulos maiores que a inclinação crítica (Figura 4.20) nota-se o típico comportamento secular e oscilatório. Além disso, os pontos mais baixos dessas oscilações acontecem no mesmo instante em que a excentricidade atinge sua máxima amplitude e a inclinação chega à inclinação crítica.

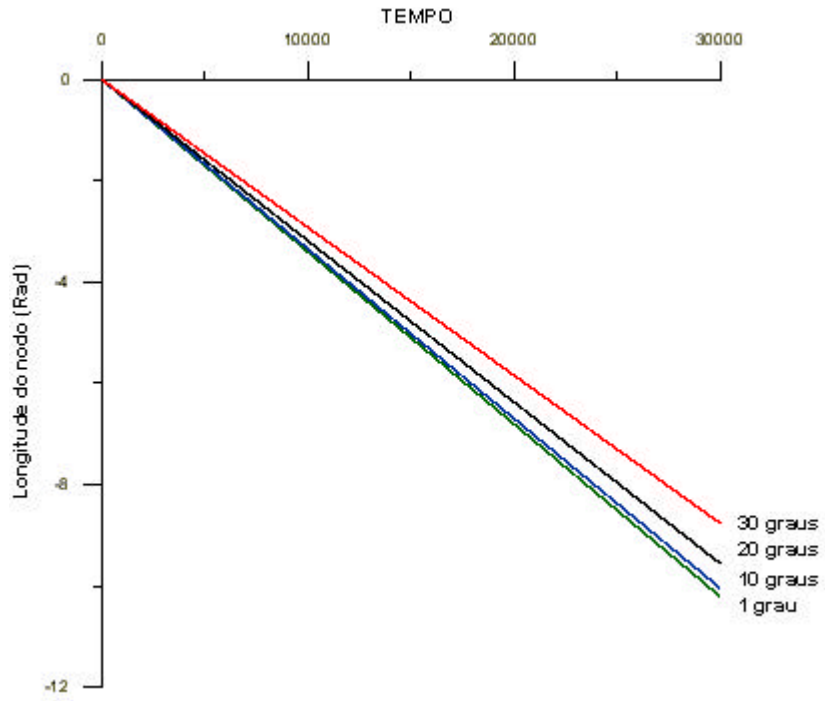


Fig. 4.19 - Evolução temporal da longitude do nodo para $a(0) = 0.110$ e $i(0) < i_c$.

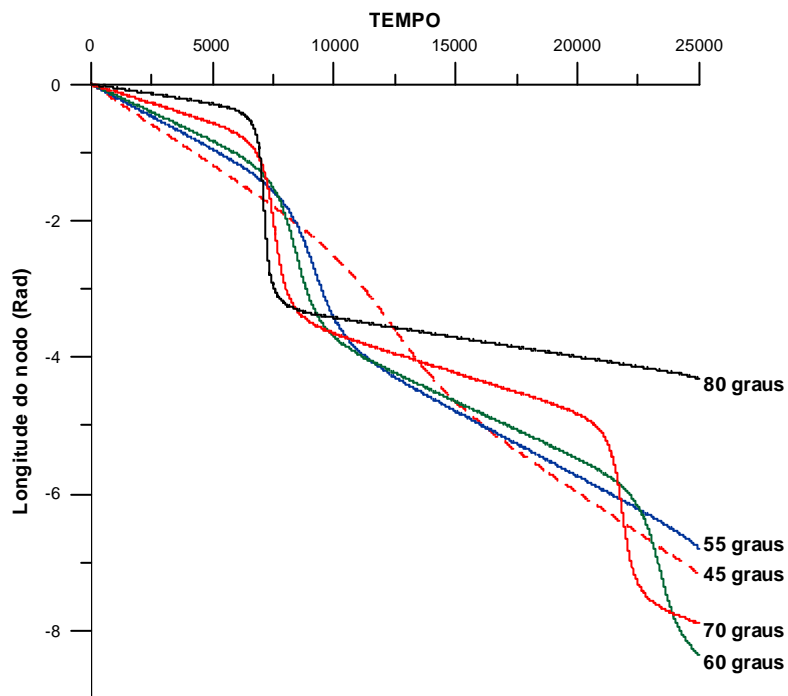


Fig. 4.20 - Evolução temporal da longitude do nodo para $a(0) = 0.110$ e $i(0) > i_c$.

4.2 SIMULAÇÃO DA PERTURBAÇÃO DO SOL

A seguir apresentaremos as simulações feitas para a perturbação do terceiro corpo considerando o Sol como o corpo perturbador (semi-eixo maior 389.25 unidades canônicas de comprimento). Consideraremos um satélite posicionado numa órbita com semi-eixo maior de 0.07 unidades canônicas de comprimento, e mesmas características das simulações feitas para a perturbação da Lua, especialmente quanto às condições iniciais. Os gráficos mostram o comportamento dos elementos orbitais para diversas condições iniciais (variação da inclinação inicial).

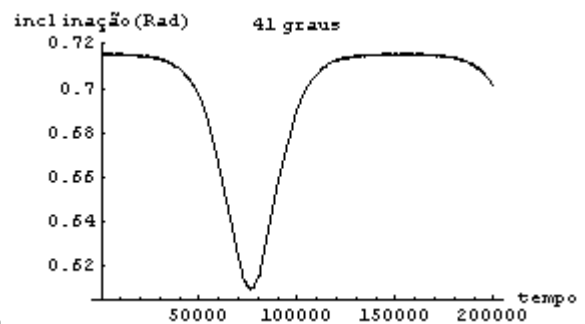
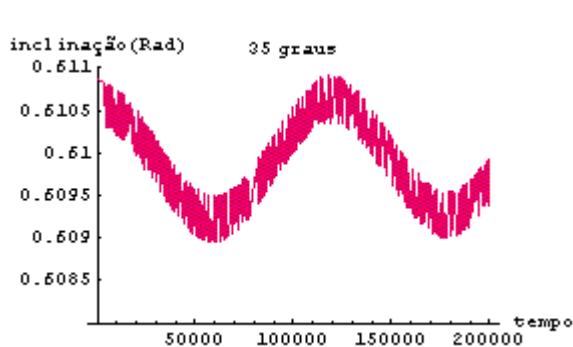


Fig. 4.21 - Evolução da inclinação para $i(0) = 35$ graus. Fig. 4.22 - Evolução da inclinação para $i(0) = 41$ graus.

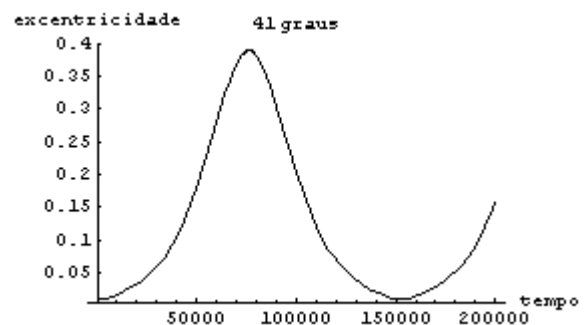
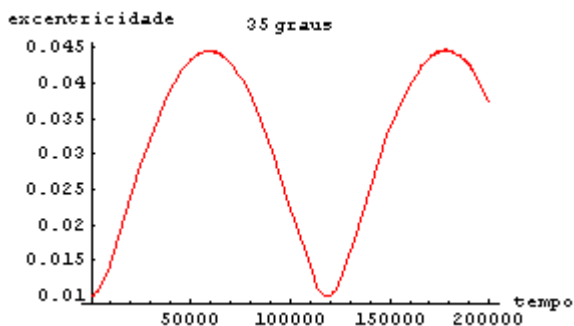


Fig. 4.23 - Evolução da excentricidade para $i(0) = 35$ graus. Fig. 4.24 - Evolução da excentricidade para $i(0) = 41$ graus.

As figuras apresentam o mesmo comportamento analisado anteriormente da excentricidade e da inclinação. A escala de tempo utilizada é de 200000 unidades canônicas (2382 anos). As figuras permitem observar a forte variação que

experimentam esses elementos orbitais quando a inclinação inicial está próxima da inclinação crítica (para 35 graus) e quando estamos acima do valor crítico (para 41 graus). A amplitude para a inclinação é muito pequena, aproximadamente de 0.109 graus, mas conforme atingimos o valor crítico e consideramos valores acima dele a amplitude chega a ser de 6.303 graus. Este comportamento da inclinação ocasiona o comportamento da excentricidade onde, para $i(0) = 35$ graus (Figura 4.23) existe uma amplitude de 0.035, porém para $i(0) = 43$ graus (Figura 4.24) existe uma amplitude de 0.39 e uma variação de quase 1000% .

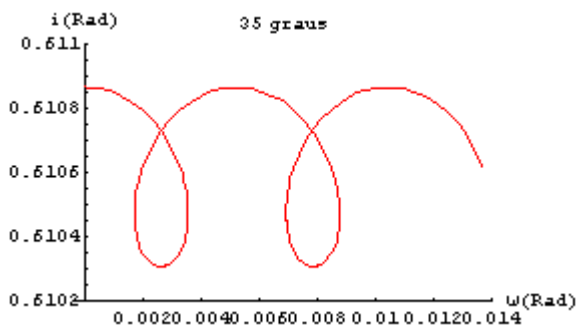


Fig. 4.25 - Evolução da inclinação e do argumento do perigeu ($i(0) = 35$ graus e 100 unidades canônicas de tempo).

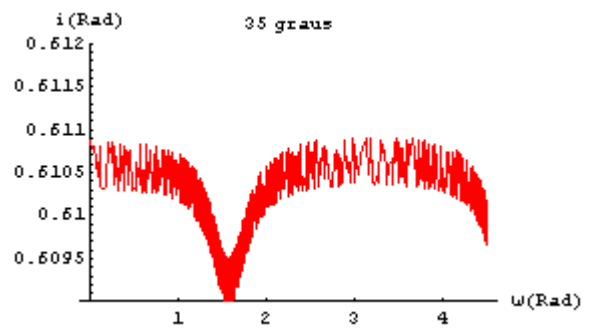


Fig. 4.26 - Evolução da inclinação e do argumento do perigeu ($i(0) = 35$ graus e 10^5 unidades canônicas de tempo).

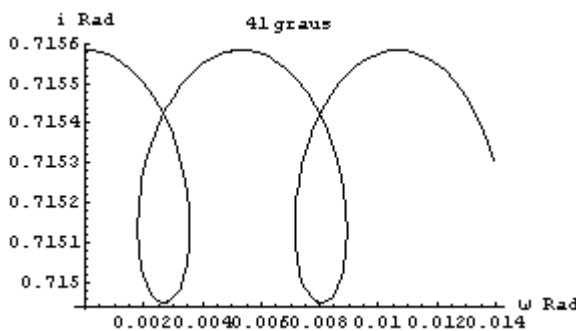


Fig. 4.27 - Evolução da inclinação e do argumento do perigeu ($i(0) = 41$ graus e 100 unidades canônicas de tempo).

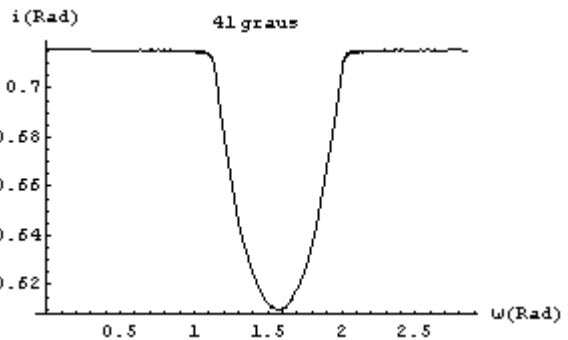


Fig. 4.28 - Evolução da inclinação e do argumento do perigeu ($i(0) = 41$ graus e 10^5 unidades canônicas de tempo).

As figuras anteriores mostram o comportamento da inclinação e do argumento do perigeu. Elas mostram o comportamento da inclinação que foi analisado nos gráficos 4.21 e 4.22. Aqui mostramos o comportamento do argumento do perigeu, o qual é secular e oscilatório. Devemos lembrar que analisamos o comportamento da inclinação para tempos grandes (200000 unidades canônicas ou 2382 anos). Se mostrássemos os gráficos representativos para tempos pequenos observaríamos que ele está composto de pequenas oscilações. Por isso, quando realizamos a simulação desses elementos para um tempo de 100 unidades canônicas eles apresentam essas hélices, as quais evoluem ao longo do tempo. Essas hélices representam o comportamento oscilatório e secular dos elementos keplerianos em estudo. Quando o tempo é maior (10^5 unidades canônicas) observamos a superposição desses comportamentos (oscilatório e secular), onde devemos reiterar que as Figuras 4.26 e 4.28 estão compostas das hélices mostradas nas Figuras 4.25 e 4.27.

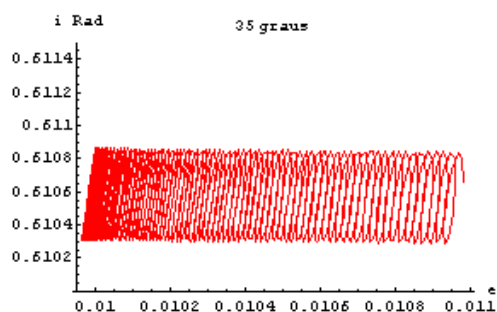


Fig. 4.29 - Evolução da inclinação e da excentricidade ($i(0) = 35$ graus e 4000 unidades canônicas de tempo).

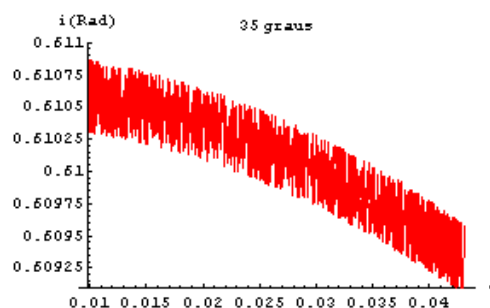


Fig. 4.30 - Evolução da inclinação e da excentricidade ($i(0) = 35$ graus e 50000 unidades canônicas de tempo).

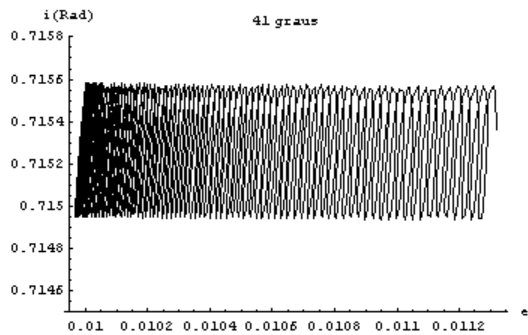


Fig. 4.31 - Evolução da inclinação e da excentricidade ($i(0) = 41$ graus e 4000 unidades canônicas de tempo).

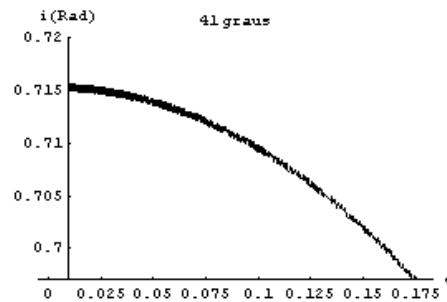


Fig. 4.32 - Evolução da inclinação e da excentricidade ($i(0) = 41$ graus e 50000 unidades canônicas de tempo).

As Figuras 4.29 a 4.32 mostram a evolução da inclinação e da excentricidade. Nelas observamos que para tempos curtos (de 4000 unidades canônicas) os gráficos são formados por um conjunto de hélices, que tem relação com as oscilações que experimentam tanto a excentricidade como a inclinação para tempos curtos. Quando fazemos as simulações para tempos maiores (de 50000 unidades canônicas), no plano inclinação vs. excentricidade se observa que, quando a inclinação atinge seus valores máximos a excentricidade atinge seus valores mínimos. Este comportamento repete-se ao longo do tempo (ver Figuras 4.21 a 4.24). Os resultados mostrados anteriormente só foram considerados para inclinações abaixo e próximas da inclinação crítica. A seguir mostraremos alguns gráficos referentes às simulações feitas para inclinações iniciais maiores que a inclinação crítica.

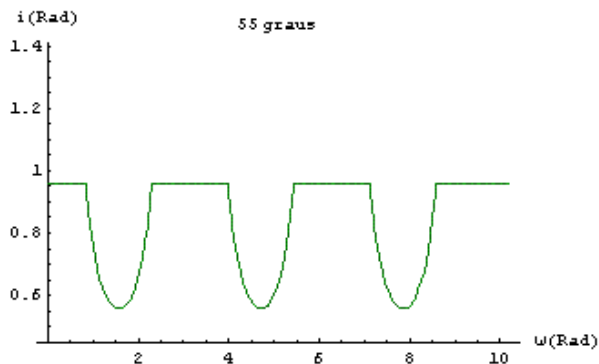
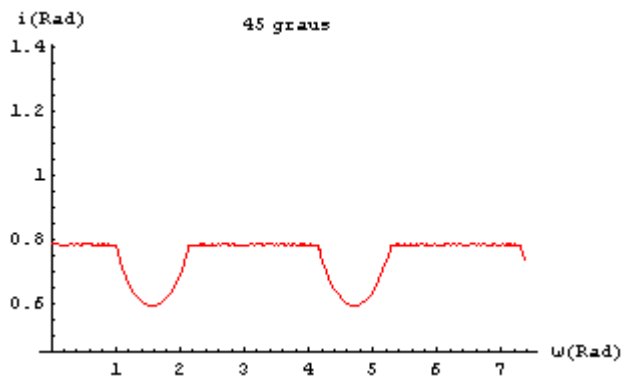


Fig. 4.33 - Evolução da inclinação e do argumento do perigeu ($i(0) = 45$ graus e 200000 unidades canônicas de tempo).

Fig. 4.34 - Evolução da inclinação e do argumento do perigeu ($i(0) = 55$ graus e 200000 unidades canônicas de tempo).

O comportamento da inclinação é o comportamento esperado. É constante durante um certo intervalo de tempo, depois decresce até seu valor crítico, voltando a seguir ao seu valor inicial. Pelo comportamento secular do argumento do perigeu esses gráficos evoluem ao longo do tempo (Figuras 4.33 e 4.34). Lembremos que os gráficos estudados em escala de tempo menores estão formados por hélices que avançam ao longo do tempo.

Pode-se encontrar no plano inclinação vs. excentricidade uma série de figuras alusivas ao comportamento desses elementos (Figura 4.35), encontrando uma série de curvas, nas quais se ressalta que quando a inclinação está no seu valor inicial, a excentricidade está no seu valor mínimo. A partir daí acontece o comportamento já estudado desses elementos.

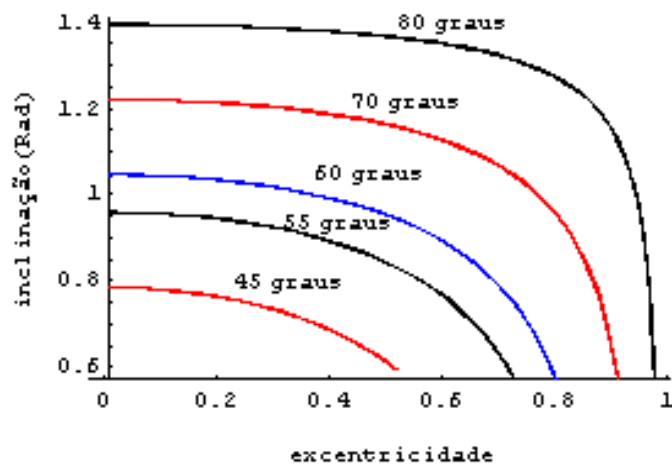


Fig. 4.35 - Evolução no plano inclinação vs excentricidade para ângulos maiores que a inclinação crítica.

Deve-se lembrar que o comportamento tanto para a excentricidade como para a inclinação já foi analisado anteriormente, porque o comportamento é quase o mesmo, sendo que as diferenças existentes são devidas à escala de tempo utilizada.

Nas discussões das simulações anteriores, nós observamos que as soluções perturbadas ao longo do tempo tem dois tipos de termos: i) aqueles que contém a variável independente diretamente, e ii) aqueles que a contém como um argumento de uma função trigonométrica. Os primeiros sempre crescem com o tempo e são chamados seculares. Os da segunda classe voltam ao seu valor original depois de uma revolução ou uma fração, e são chamados periódicos. É importante ressaltar que para longos tempos os termos seculares são predominantes, embora limitem a precisão e o alcance da predição da teoria de perturbações, recebendo mais atenção que os efeitos dos termos periódicos. Deve-se esperar que os termos seculares de ordem maior sejam geralmente não lineares e a seqüência total pode tender a uma representação em séries de potências de um termo periódico de um período muito longo e, possivelmente, com grandes amplitudes.

No caso das soluções analíticas, uma primeira abordagem estima as forças perturbadoras nas coordenadas não perturbadas. Os primeiros resultados são combinados com as coordenadas e um novo conjunto de valores iniciais é encontrado. Assim, no início de cada subintervalo, ele absorve a perturbação acumulada para a retificação da órbita.

4.3 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DE MÉDIA SIMPLES E MÉDIA DUPLA

No presente trabalho utilizamos o método de média simples, sendo essa média realizada com relação a anomalia média do veículo perturbado, em nosso caso um satélite artificial. Para o método de média dupla realiza-se novamente o cálculo das médias com relação a anomalia média do corpo perturbador, mantendo os demais elementos orbitais constantes. Isso é possível devido a escala utilizada, dado que o período do satélite é muito menor que o período do corpo perturbador, e também é menor que as pequenas oscilações dos elementos orbitais.

A seguir mostraremos alguns gráficos que nos permitem analisar as diferenças e similaridades entre os dois métodos. As simulações foram feitas para um satélite localizado em uma órbita idealizada de semi-eixo maior 0.341 unidades canônicas de comprimento, e considerando as mesmas condições iniciais utilizadas ao longo do presente trabalho. Mostraremos os gráficos com respeito as inclinações iniciais de 30 e 80 graus.

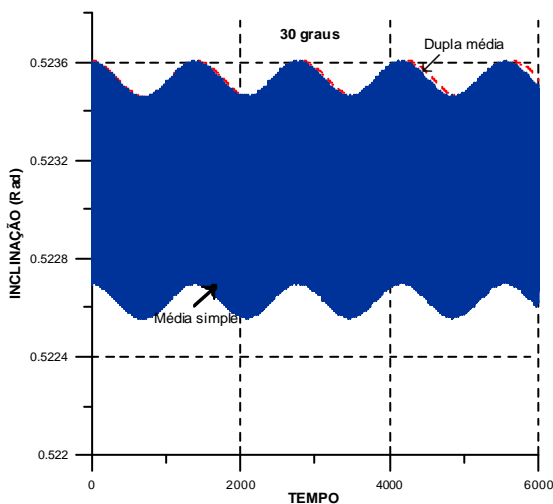


Fig. 4.36 - Gráfico comparativo da inclinação para $i(0) = 30$ graus (6000 uct).

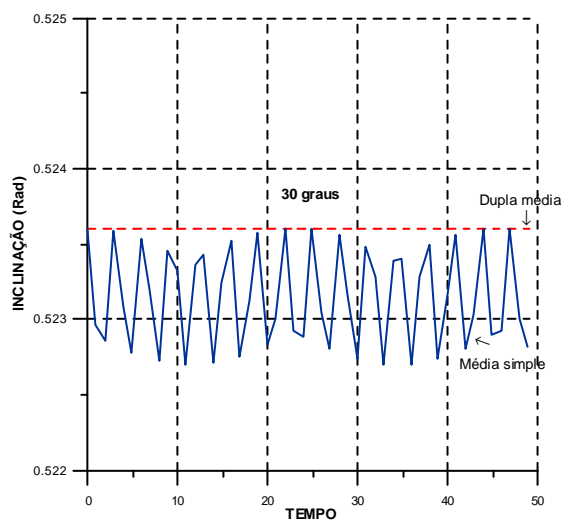


Fig. 4.37 - Gráfico comparativo da inclinação para $i(0) = 30$ graus (50 uct).

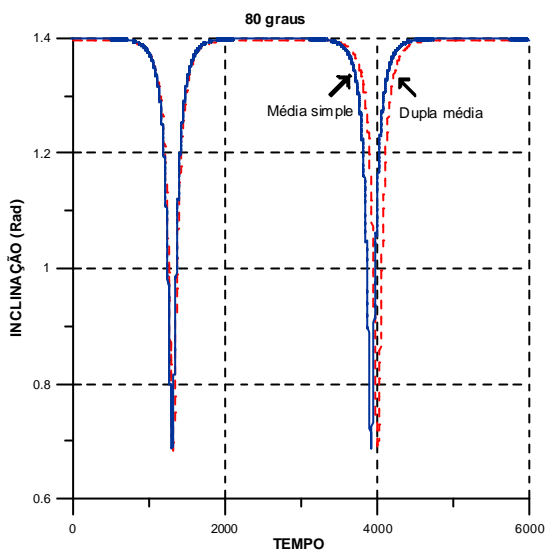


Fig. 4.38 - Gráfico comparativo da inclinação para $i(0) = 80$ graus (6000 uct) .

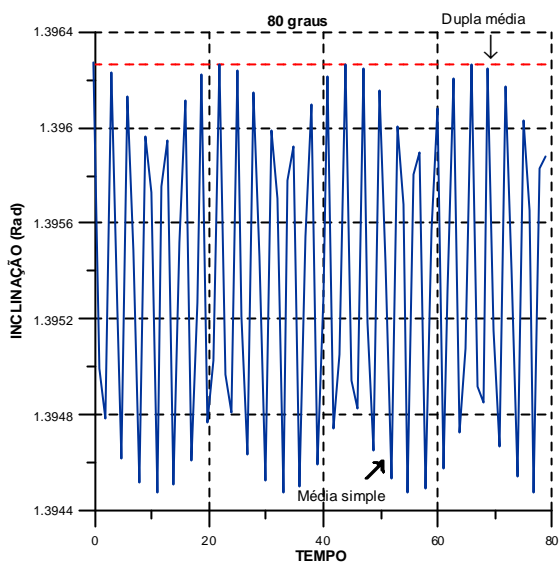


Fig. 4.39 - Gráfico comparativo da inclinação para $i(0) = 80$ graus (80 uct) .

Os gráficos mostrados apresentam o comportamento da inclinação, conforme obtidos pelos métodos de média simples e duplas. Para a inclinação abaixo da inclinação crítica (30 graus) a Figura 4.36 mostra o comportamento para 6000 unidades canônicas. Observamos que, pela escala utilizada, o método de média simples mostra uma região repleta de oscilações, que atingem uma amplitude de aproximadamente 0.05729 graus. Quando fazemos a superposição com o modelo de dupla média observa-se que estes gráficos aparecem como uma envolvente dos gráficos de médias simples. Podemos justificar novamente que a análise desejada depende do grau de precisão requerida. Para os tempos menores (Figura 4.37) mostra-se que a evolução temporal da inclinação obtida pelo método de média simples é formado por pequenas oscilações, embora a dupla média mostre uma evolução constante no tempo.

Fazendo a análise para $i(0) = 80$ graus (ver Figura 4.38) e 6000 unidades de tempo canônico observamos que o comportamento é parecido, mas existe um deslocamento a partir das 3000 até as 5000 unidades do tempo. Podemos utilizar cada uma dessas representações dependendo do grau de precisão desejada. Estas diferenças no comportamento representam o grau de precisão da aproximação utilizada. Para as

simulações feitas para uma escala do tempo menor (Figura 4.39), encontra-se que a evolução temporal da inclinação para o modelo de média simples é formada por oscilações que atingem uma amplitude de 0.10313 graus. Na mesma situação o modelo de média dupla mostra uma inclinação constante. Isso acontece porque no modelo de dupla média realizamos duas vezes a média com respeito aos termos de curta duração (anomalia média).

Fazendo a análise das equações de movimento, ambas tem dependência com respeito ao termo $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$. O modelo de média dupla depende também do seno de w, i , além de depender de e^2 . Para o modelo de média simples, além dos termos anteriores, existe uma dependência explícita com a $\cotg(i)$, e $\operatorname{cosec}(i)$ e funções trigonométricas explícitas de w, i, e, t, W . Isso justifica o comportamento oscilatório apresentado.

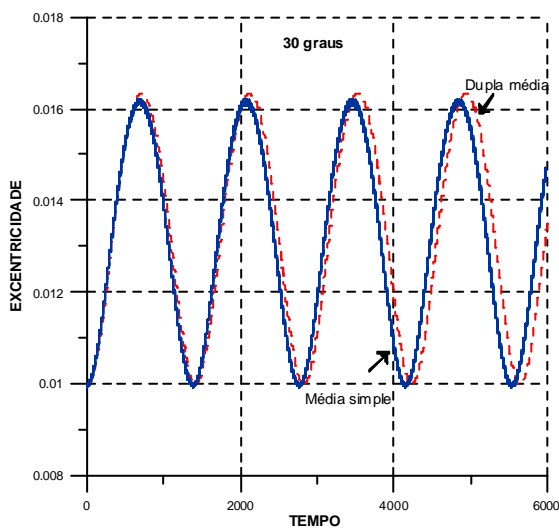


Fig. 4.40 - Gráfico comparativo da excentricidade para $i(0)=30$ graus (6000 uct).

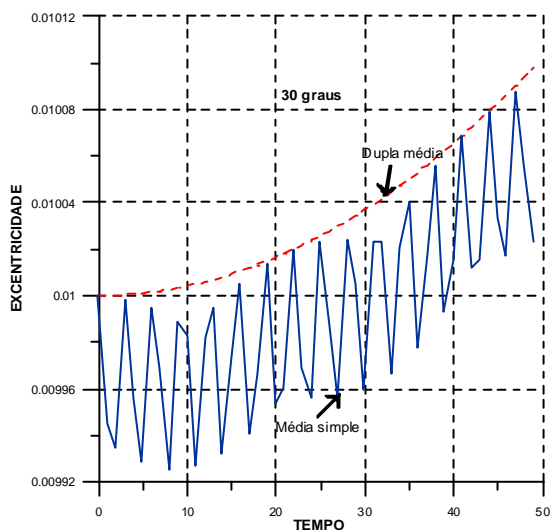


Fig. 4.41 - Gráfico comparativo da excentricidade para $i(0)=30$ graus (50 uct).

As Figuras 4.40 e 4.41 mostram os gráficos comparativos para a evolução da excentricidade, considerando uma inclinação inicial de 30 graus. Para a escala de tempo apresentada de 6000 unidades canônicas existe um ligeiro deslocamento dos gráficos a medida que o tempo transcorre. Para tempos longos o deslocamento é maior. A partir

das 3500 unidades canônicas se observa claramente esse comportamento. Nas simulações realizadas para um tempo menor (Figura 4.41) observamos o comportamento altamente oscilatório da excentricidade para o modelo de média simples e a evolução que eles experimentam ao longo do tempo, sendo interessante ressaltar que essas oscilações fazem parte da evolução da excentricidade para tempos maiores.

A Figura 4.42 mostra a evolução da excentricidade para uma inclinação inicial de 80 graus. Observa-se que a medida que o tempo transcorre o deslocamento é maior, sendo que a partir de 3000 unidades canônicas existe um deslocamento bastante significativo.

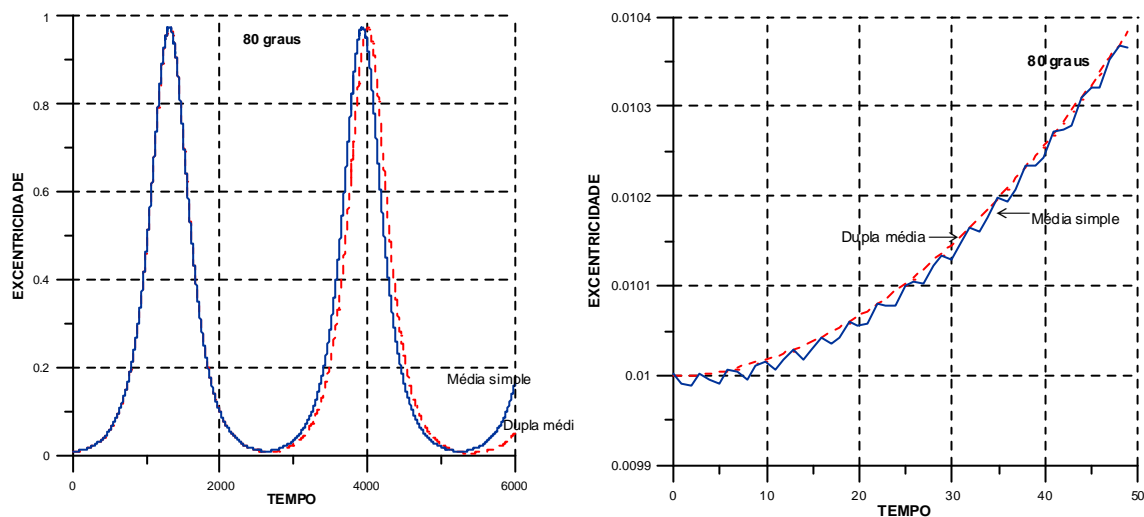


Fig. 4.42 - Gráfico comparativo da excentricidade para $i(0) = 80$ graus (6000 uct).

Fig. 4.43 - Gráfico comparativo da excentricidade para $i(0) = 80$ graus (50 uct).

A Figura 4.43 mostra o comportamento da excentricidade para $i(0) = 80$ graus, considerando um tempo de 50 unidades canônicas. Observa-se o comportamento oscilatório para a média simples. No caso do modelo de média dupla só existe uma curva ascendente. As oscilações que elas apresentam tem amplitudes muito pequenas, para a escala do tempo considerada.

A análise das equações mostram que o modelo de dupla média tem uma dependência com respeito a $e\sqrt{1 - e^2}$, além dos termos senoidais de w e i . No caso do modelo de

média simples, ele apresenta uma dependência com respeito a $e\sqrt{1 - e^2}$, além de termos altamente oscilantes compostos fundamentalmente de funções senoidais e cossenoidais de w, W, t, i . Esses termos causam o comportamento oscilatório para curtos períodos.

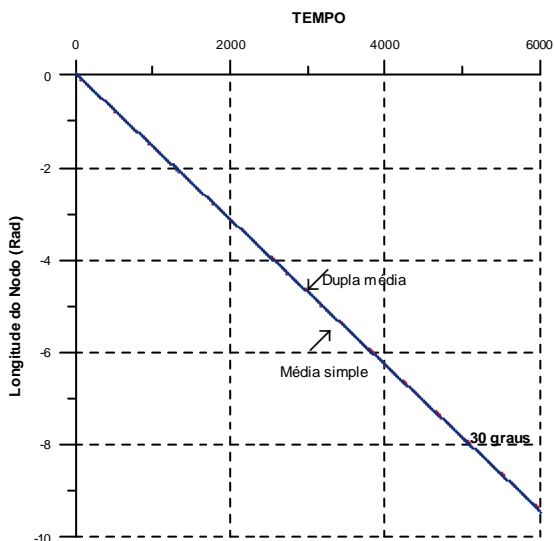


Fig. 4.44 - Gráfico comparativo da longitude do nodo para $i(0) = 30$ graus (6000 uct).

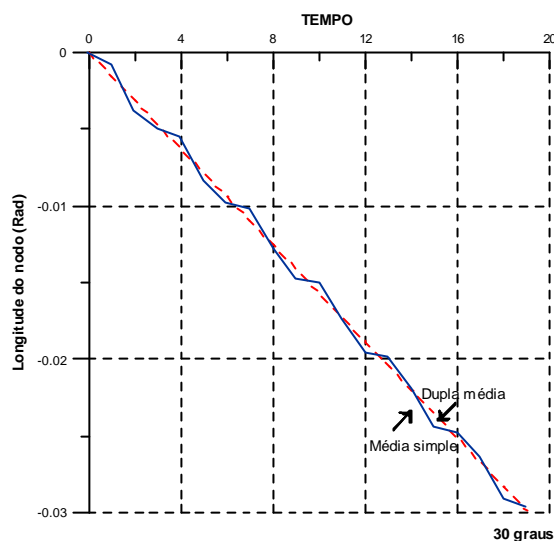


Fig. 4.45 - Gráfico comparativo da longitude do nodo para $i(0) = 30$ graus (20 uct).

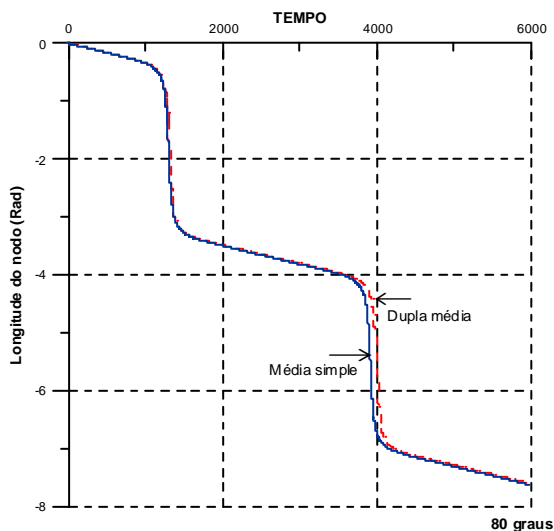


Fig. 4.46 - Gráfico comparativo da longitude do nodo para $i(0) = 80$ graus (6000 uct).

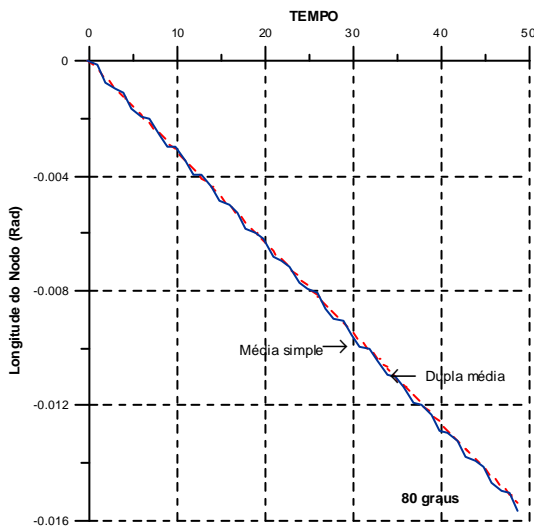


Fig. 4.47 - Gráfico comparativo da longitude do nodo para $i(0) = 80$ graus (50 uct).

A Figura 4.44 mostra o comportamento secular da longitude do nodo ascendente para ambos os métodos, para a escala de tempo considerada. A Figura 4.46 apresenta, além do comportamento secular, um comportamento oscilatório, o qual tem um ligeiro desvio a medida que o tempo passa (neste caso, a partir de 3500 unidades de tempo). No caso das simulações feitas para tempos menores as Figuras 4.45 e 4.47 mostram o comportamento secular do modelo de dupla média e o comportamento secular e oscilatório do modelo de média simples. Em geral estas curvas formam parte da evolução da longitude do nodo para tempos maiores.

Com respeito ao equacionamento, o modelo de dupla média tem dependência com $\frac{\cos(i)}{\sqrt{1-e^2}}$, além de relações com e e funções cosenoidais de w . No modelo de média simples existe uma forte influência do termo $\frac{1}{(\sin(i)\sqrt{1-e^2})}$, além de outras funções senoidais e cosenoidais dos argumentos de w, W, t, i , as quais forçam o comportamento secular e oscilatório para tempos curtos. Esta influência é significativa para as inclinações iniciais acima da inclinação crítica, porque elas tem um comportamento secular e oscilatório para tempos maiores.

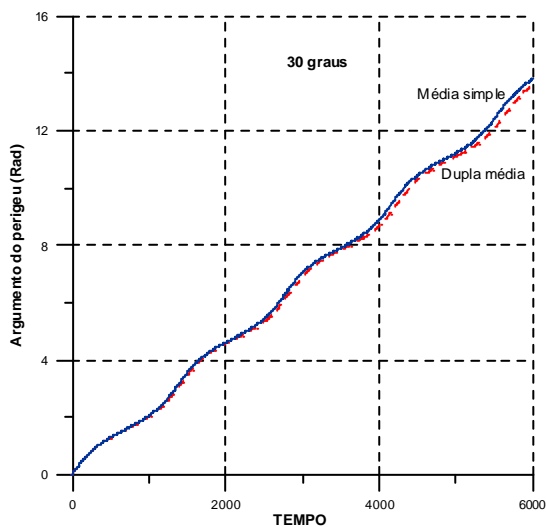


Fig. 4.48 - Gráfico comparativo do argumento do perigeu para $i(0)=30$ graus (6000 uct).

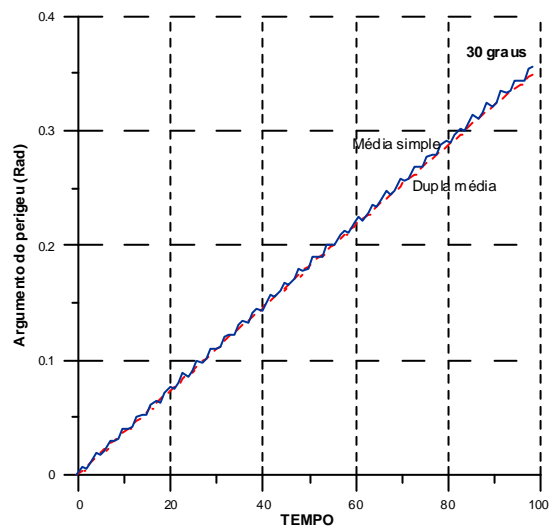


Fig. 4.49 - Gráfico comparativo do argumento do perigeu para $i(0)= 30$ graus(100 uct).

O gráfico para o argumento do perigeu mostra pequenos desvios para a escala do tempo mostrada (Figura 4.48), os quais tem um forte aumento no desvio a medida que o tempo aumenta, sendo bastante significativo a partir das 3500 unidades de tempo. Ambos os gráficos (4.48 e 4.50) mostram o característico comportamento secular e oscilatório, embora para uma inclinação inicial de 80 graus observa-se que ele é fortemente oscilatório. A superposição dos gráficos para este caso começam a apresentar um forte desvio para tempos maiores, próximos das 4000 unidades de tempo.

Para tempos curtos e considerando a escala utilizada (Figuras 4.49 e 4.51) existe um típico comportamento secular e oscilatório para o modelo de média simples, o qual difere do modelo de duplas média, que nesse intervalo só mostra comportamento secular. Lembremos que esse comportamento secular e oscilatório do modelo de média simples forma parte das curvas que evoluem para tempos maiores.

As equações de movimento para o modelo de dupla média estão em função de $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$, além de ter outras dependências com respeito a w , i , e e . No caso do modelo de média simples existem termos contendo $-\cot g(i)/\sqrt{1-e^2}$ e $\sqrt{1-e^2}/e$, os quais influenciam as funções senoidais e cosenoidais de w , t , e , W .

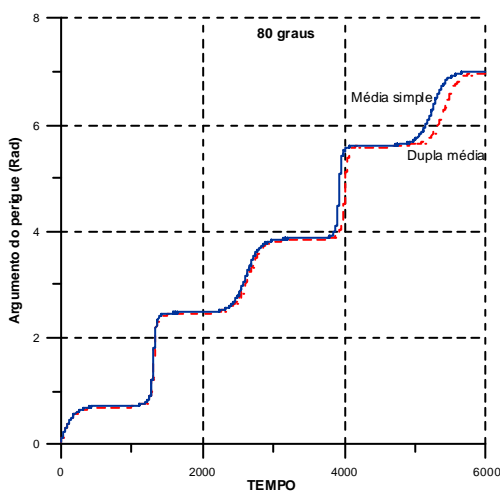


Fig. 4.50 - Gráfico comparativo do argumento do perigeu para $i(0)=80$ graus (6000 uct).

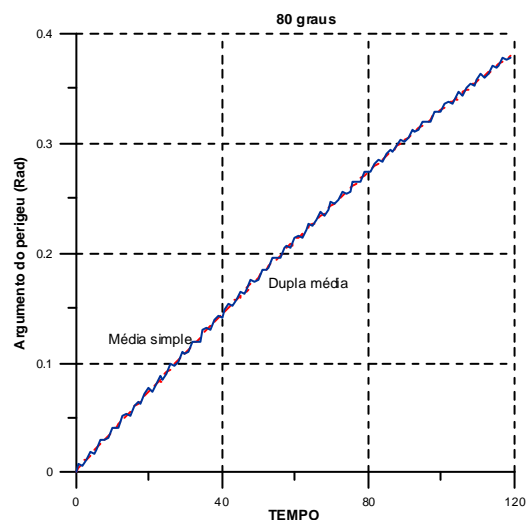


Fig. 4.51 - Gráfico comparativo do argumento do perigeu para $i(0)= 80$ graus (120 uct).

4.4 ÓRBITAS RETRÓGRADAS E ÓRBITAS POLARES.

As simulações feitas na presente seção são dedicadas às órbitas retrógradas e polares. Consideram um semi-eixo maior com 0.341 unidades canônicas de comprimento, $e(0) = 0.01$ e $M(0) = \Omega(0) = \omega(0) = 0$. De forma análoga as simulações apresentadas ao longo deste trabalho, os gráficos foram obtidos considerando as variações na inclinação inicial e considerando os elementos orbitais indicados anteriormente.

O estudo da inclinação das órbitas retrógradas apresenta um comportamento parecido a uma imagem especular com respeito ao caso de órbitas diretas. Este efeito espelho inverte todos os gráficos obtidos para as órbitas diretas. Desta forma, a partir de 90 graus as órbitas mostram grandes amplitudes até atingirem um valor próximo a 141 graus (o suplemento do valor crítico). Isto é mostrado na Figura 4.52.

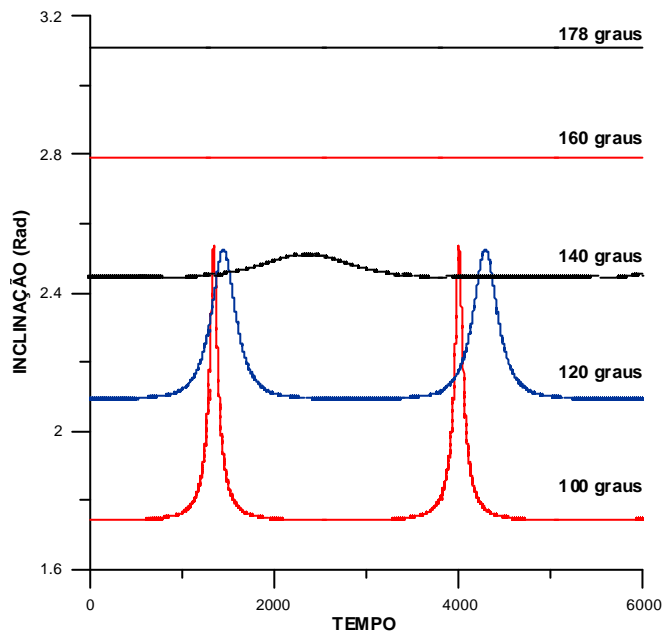


Fig. 4.52 – Evolução da inclinação para órbitas retrógradas.

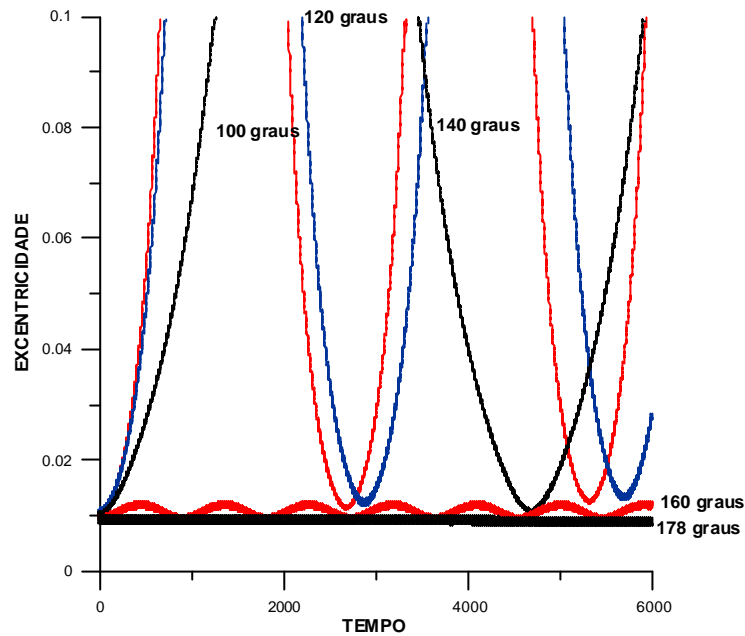


Fig. 4.53 – Evolução da excentricidade para órbitas retrógradas ($i(0) = 160$ graus, $i(0) = 178$ graus).

Conforme o valor inicial da inclinação aumenta, a curva correspondente à evolução temporal da excentricidade diminui (Figuras 4.53 e 4.54), ou seja, quando estamos mais próximos do suplemento do valor crítico os valores da excentricidade diminuem, fazendo com que as órbitas altamente elípticas cheguem a ser quase circulares e mostrando pequenas variações na excentricidade. O argumento do perigeu mostra o típico comportamento secular e oscilatório, para os valores da inclinação inicial maiores de 90 graus (Figura 4.55). Desta forma, quando estamos mais próximos do suplemento do valor crítico o comportamento oscilatório desaparece, mostrando só o comportamento secular. Lembremos que para uma escala menor do tempo existem pequenas oscilações.

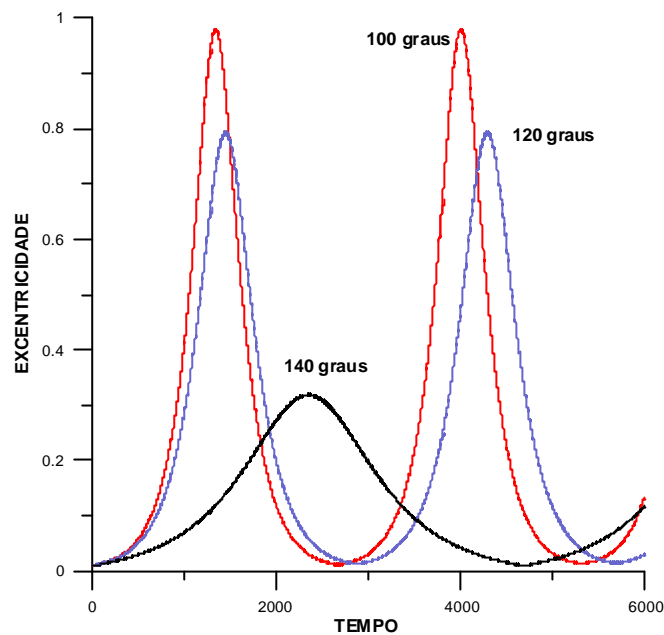


Fig. 4.54 – Evolução da excentricidade para órbitas retrógradas.

Outra característica das órbitas retrógradas está no comportamento da longitude do nodo (Figura 4.56), o qual para as órbitas diretas sofrem uma regressão ao longo do tempo. Estas órbitas sofrem acréscimos positivos. Este mesmo comportamento da mudança no sinal encontra-se nos efeitos da perturbação devida ao achatamento da Terra.

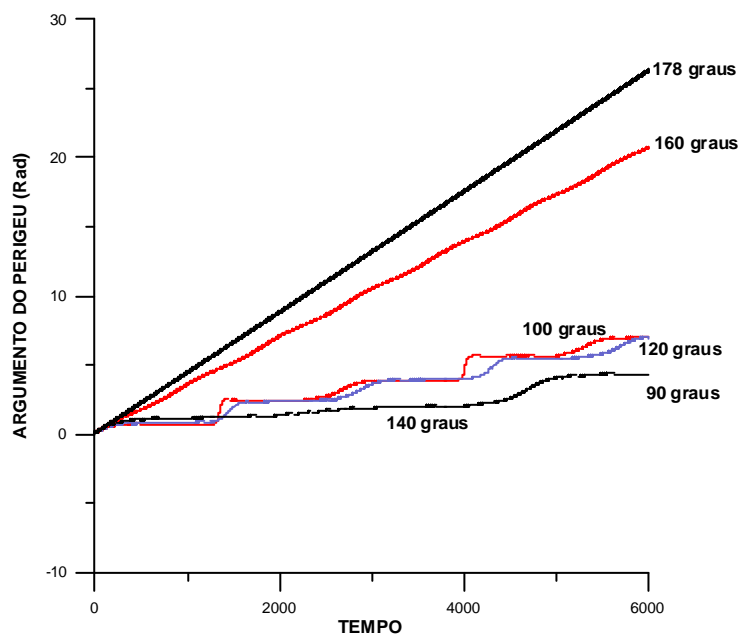


Fig. 4.55 – Evolução do argumento do perigeu para órbitas retrógradas.

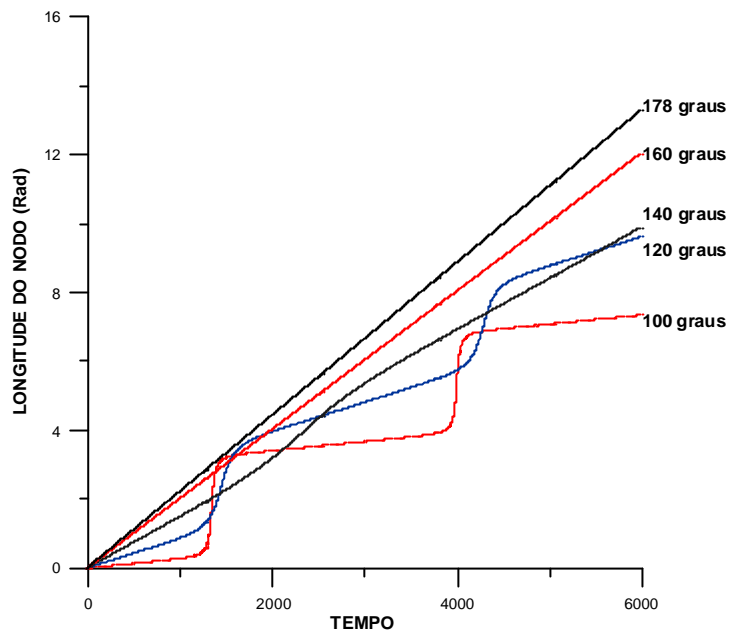


Fig. 4.56 – Evolução da longitude do nodo para órbitas retrógradas.

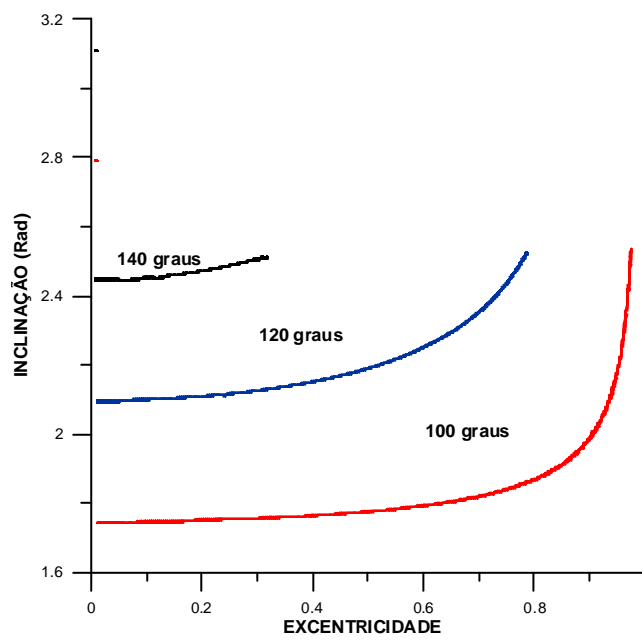


Fig. 4.57 – Evolução da inclinação vs. excentricidade para órbitas retrógradas.

As simulações feitas no plano inclinação vs. excentricidade mostram o efeito encontrado e que denominamos “efeito espelho”. Ou seja, existe uma inversão das curvas encontradas para o caso das órbitas diretas.

A Figura 4.57 mostra que a inclinação começa no seu valor inicial, aumentando seu valor até atingir o valor crítico. Isto acontece também com a excentricidade, a qual começa no seu valor inicial, e com o transcorrer do tempo atinge um valor máximo, embora a inclinação chegue ao suplemento do ângulo crítico. Depois de atingir esse valor, ela retorna ao seu valor original. O mesmo acontece com a excentricidade, ou seja, ela aumenta e retorna depois de um certo tempo ao seu valor original.

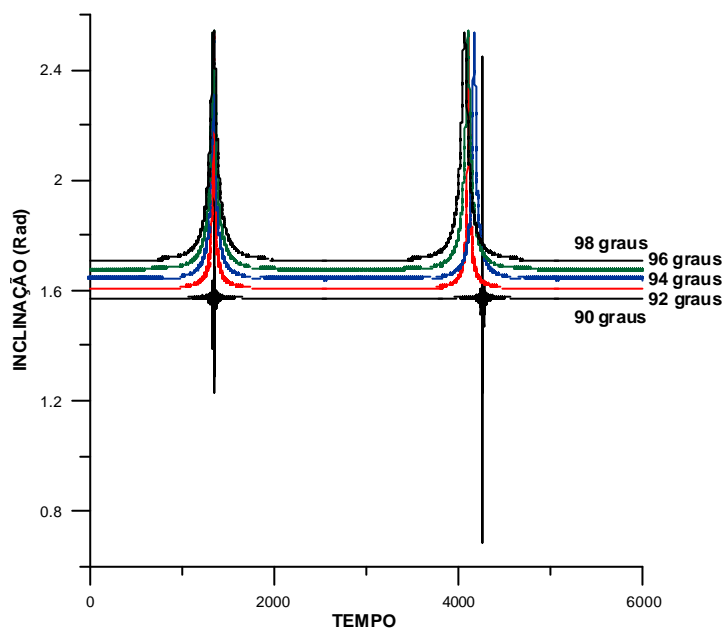


Fig. 4.58 – Evolução da inclinação para órbitas polares.

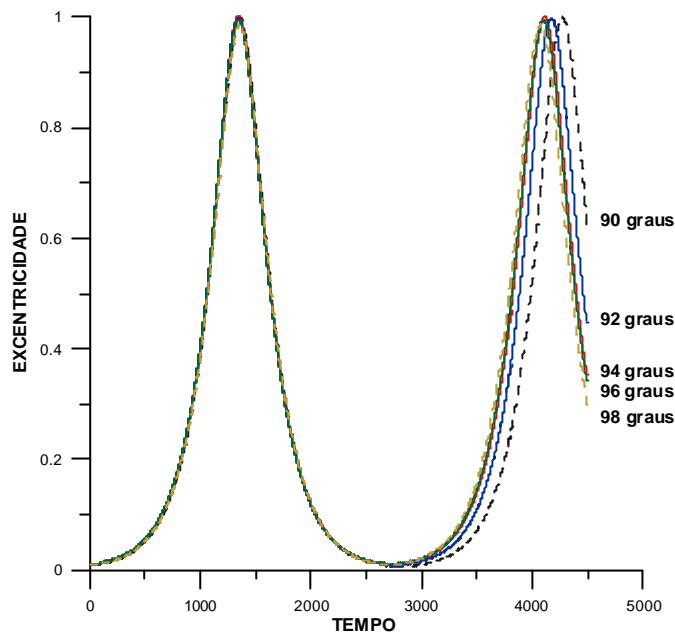


Fig. 4.59 – Evolução da excentricidade para órbitas polares.

O caso das órbitas polares é também de interesse. Considerando as condições expostas inicialmente, as Figuras 4.58 e 4.59 mostram as primeiras análises realizadas. A máxima amplitude é atingida quando $i(0) = 90$ graus, e conforme o ângulo inicial decresce as amplitudes também decrescem. Isto é observado para a inclinação e a excentricidade.

As Figuras 4.60 e 4.61 comprovam o comportamento secular e oscilatório do argumento do perigeu e a longitude do nodo. Além disso, a longitude do nodo tem um comportamento positivo. O oposto acontece para as órbitas diretas, nas quais seu comportamento é retrógrado.

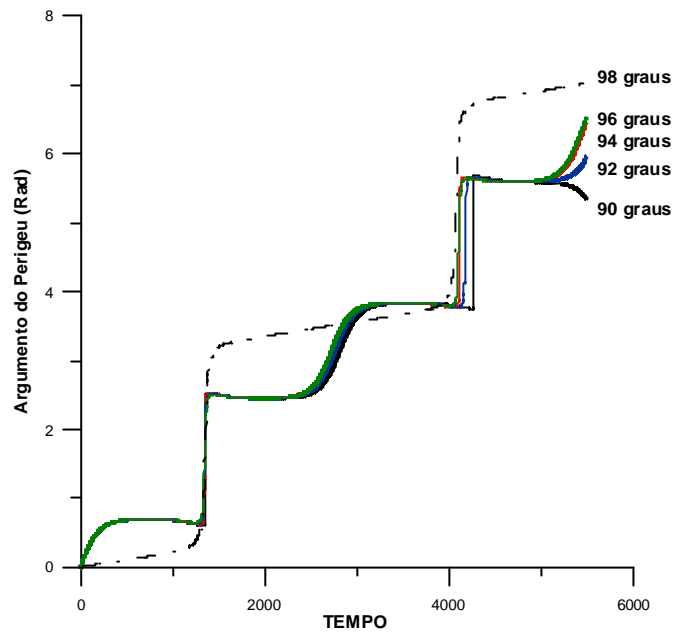


Fig. 4.60 – Evolução do argumento do perigeu para órbitas polares.

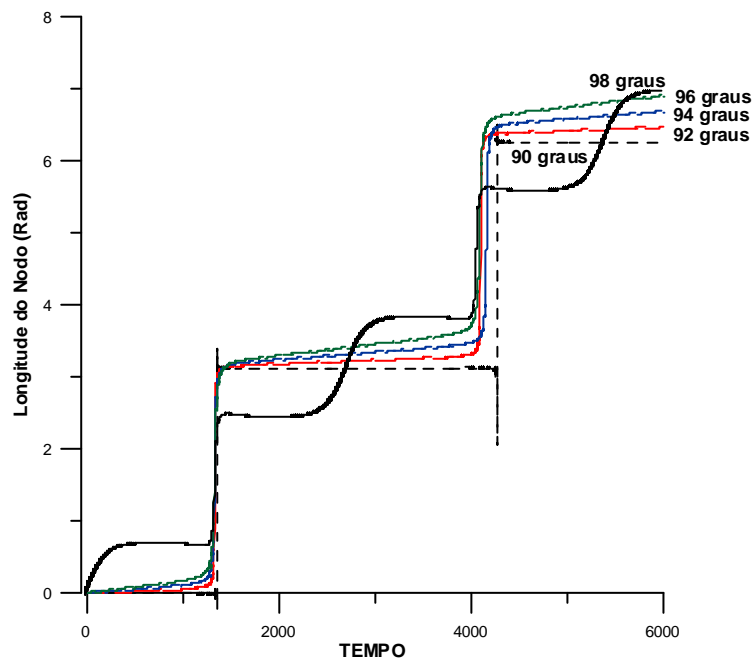


Fig. 4.61 – Evolução da longitude do nodo para órbitas polares.

CAPÍTULO 5

PERTURBAÇÕES DA LUA E DO SOL SOBRE UM SATÉLITE ARTIFICIAL TERRESTRE

De forma geral, no sistema Terra-Sol-Lua, a Terra se move ao redor do Sol no plano da eclíptica, numa órbita de excentricidade 0.017. O plano equatorial da Terra tem uma inclinação aproximada de $23^{\circ} 27'$ contados desde a eclíptica. A Lua se move ao redor da Terra em sua própria órbita, a qual tem uma inclinação aproximada de $5^{\circ} 09'$ com relação ao plano da eclíptica e em uma órbita com excentricidade 0.055.

As órbitas da Lua e da Terra não estão contidas num mesmo plano. A linha de nodos da órbita da Lua tem um movimento de regressão ao redor do plano da eclíptica com um período de 18.6 anos. A linha dos ápsides evolui em seu próprio plano orbital com um período de 8.8 anos. Desta forma, o ângulo entre o plano equatorial da Terra e o plano orbital de Lua varia entre $28^{\circ} 36'$ e $18^{\circ} 18'$.

Um importante tipo de satélites é formado pelos geoestacionários, onde a taxa de rotação angular é igual a taxa de rotação da Terra com respeito a seu eixo polar. Sendo assim, é possível escolher um sistema de coordenadas geocêntricas esféricas onde o satélite permanece em posição fixa.

O sistema de coordenadas geocêntricas esféricas é adotado para determinar a posição do satélite ao longo do tempo, embora ao considerar o movimento da Lua e do Sol, é preciso outro sistema de coordenadas que esteja centrado na Terra. Um sistema de referência usualmente utilizado são as coordenadas inerciais retangulares.

Como no caso do problema clássico dos n -corpos, a aceleração do satélite relativa à Terra pode ser obtida considerando a atração da Lua, do Sol e da Terra. Além disso, é possível considerar as forças gravitacionais da Lua e do Sol sobre a Terra (Zee, 1989).

5.1 PRECESSÃO GIROSCÓPICA DEVIDA AO SOL

O principal efeito do Sol e da Lua é a precessão do plano orbital próximo ao pólo da eclíptica, de forma análoga à precessão dos equinócios.

A razão de precessão aumenta com o tamanho da órbita e a excentricidade decresce com a inclinação da órbita ao equador. As perturbações radiais são pequenas. O satélite natural da Terra (a Lua), é perturbada pela atração do Sol, existindo algumas diferenças entre o comportamento da Lua e dos satélites ao redor da Terra.

No caso da Lua, a principal perturbação é do Sol, e dos demais planetas, sendo o efeito do achatamento terrestre pequeno. Para satélites próximos da Terra, o efeito dominante é devido ao achatamento terrestre, sendo pequena a perturbação devida aos outros planetas.

Algumas restrições usualmente encontradas na literatura é considerar pequenas excentricidades e pequenas inclinações na órbita da Lua no plano da eclíptica. É possível estudar o movimento como se fosse um movimento giroscópico (Blitzer, 1959), realizando o cálculo do torque médio sob o satélite pela atração da Lua e do Sol, considerando que o período do movimento de precessão é longo com respeito ao período do satélite. Além disso é possível efetuar os cálculos da energia e do torque médios.

Porém, precisamos um longo intervalo de tempo para que os efeitos gravitacionais do Sol sejam evidentes. Assim sendo, a força não está em uma direção fixa relativa ao plano da órbita, mas com uma orientação que muda constantemente.

A média sobre longos períodos da força é então obtida em todas as direções, considerando que o plano orbital mantém um ângulo constante com o plano da eclíptica. Para satélites próximos da Terra o efeito dominante do achatamento produz a precessão do plano da órbita ao redor do eixo polar da Terra. O equador mantém um ângulo

constante com respeito à eclíptica (23,5 graus), mas de forma geral o ângulo entre o plano da órbita e a eclíptica não é constante, apresentando uma taxa da velocidade de precessão retrógrada média do plano orbital ao redor do pólo da eclíptica, análoga à precessão dos equinócios.

Desta forma, quando o eixo de rotação da Terra tem um movimento de precessão com respeito à normal da eclíptica, o efeito é a precessão dos equinócios. Embora quando o eixo normal do plano da órbita tenha um movimento de precessão com respeito à normal da eclíptica o efeito é a precessão do plano orbital.

5.1.1 Efeitos conjuntos do Sol e da Lua

O efeito da atração da Lua é a precessão do plano da órbita do satélite ao redor do plano da eclíptica, com uma certa velocidade angular. Ambos os movimentos de precessão (devido ao Sol e a Lua), estão na direção do pólo da eclíptica. A precessão giroscópica não é o único efeito que resulta da atração do Sol e da Lua, ou seja, nem sempre o satélite se encontra num potencial que depende do inverso da distância. De forma similar, nem sempre a força é inversamente proporcional ao quadrado da distância. Então é possível que a linha dos ápsides tenha um movimento de precessão.

Os efeitos radiais da perturbação do Sol são de curto período, mas estas perturbações são as mesmas para as diversas revoluções. É possível supor que o satélite se encontre numa órbita circular e calcular os desvios devidos à atração do Sol. O desvio da órbita da sua circularidade muda proporcionalmente com o dobro da frequência do movimento orbital. A aceleração perturbadora (força perturbadora por unidade de massa) do satélite relativa à Terra é dada pela aceleração do satélite devido ao Sol menos a aceleração da Terra devida ao Sol, sendo a aceleração perturbadora maior quando o Sol, a Terra e o satélite estão em uma mesma linha. O efeito da perturbação radial da Lua e do Sol sobre satélites próximos à Terra é pequeno.

Também podemos estudar os efeitos radiais da Lua, considerando o caso mais extremo no qual a perturbação é maior. Essa situação é aquela na qual o plano da órbita contém a Lua. O desvio da órbita a partir da sua circularidade muda proporcionalmente ao dobro da frequência do movimento orbital. Os efeitos de ambos podem ser considerados (Lua e Sol). O principal efeito sobre a órbita do satélite é um movimento retrógrado do plano de órbita, sendo a precessão devida ao Sol e a Lua, ao redor do pólo da eclíptica. A precessão aumenta com a excentricidade da órbita e com o tamanho da órbita de acordo com $a^{3/2}$ (Blitzer, 1959).

5.1.2 Equivalência entre as funções perturbadoras da Lua e do Sol

Nós estamos interessados nos efeitos conjuntos da Lua e do Sol. Para isso é importante encontrar a equivalência entre a expansão da função perturbadora do Sol e a expansão da função perturbadora da Lua.

Estas relações são importantes, considerando as diferenças das massas e das distâncias entre esses corpos. Para justificar a expansão da função perturbadora devido a Lua e a sua equivalência com respeito a perturbação do Sol, apresentaremos a Tabela 5.1 mostrada abaixo. Essa tabela mostra que o termo de segunda ordem referente ao Sol é equivalente ao de quarta ordem da expansão referente a Lua.

**TABELA 5.1 - ORDENS DE GRANDEZAS DA FUNÇÃO PERTURBADORA DA
LUA E DO SOL**

| GRANDEZAS | LUA | SOL |
|------------------|----------------|-----------------|
| μ' | 0.0121 | 0.99 |
| r' | 1 | 389.25 |
| n' | 1 | 0.07 |
| R2 | $1.36*10^{-3}$ | $4.033*10^{-4}$ |
| R3 | $4.63*10^{-4}$ | |
| R4 | $1.47*10^{-4}$ | |
| R5 | $4.77*10^{-5}$ | |
| R6 | $1.52*10^{-5}$ | |
| R7 | $4.79*10^{-6}$ | |
| R8 | $1.48*10^{-6}$ | |

5.2 SIMULAÇÃO DA PERTURBAÇÃO LUNISOLAR

Nesta seção de simulações consideraremos as expansões feitas para a função perturbadora do Sol e da Lua de forma conjunta. Os testes serão feitos considerando satélites posicionados em órbitas com semi-eixo maior de 0.110 e 0.070 unidades canônicas de comprimento.

5.2.1 Perturbação Luni-Solar para um Satélite com um Semi-Eixo Maior de 0.110 Unidades Canônicas de Comprimento

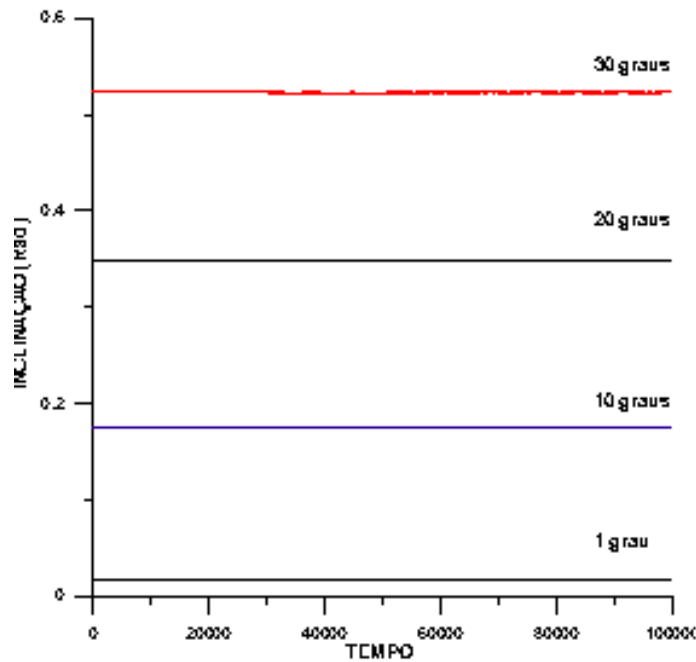


Fig. 5.1 – Evolução temporal da inclinação com $i(0) < i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$).

Os resultados obtidos para a perturbação luni-solar mostram um comportamento parecido aos resultados obtidos para a perturbação do terceiro corpo (Capítulo 4).

A Figura 5.1 mostra a evolução da inclinação para valores abaixo da inclinação crítica. A escala de tempo utilizada nos permite observar linhas retas, sendo a evolução constante. Ao analisar o comportamento da excentricidade pode-se observar as diversas amplitudes atingidas por ela com o incremento da inclinação inicial (Figura 5.2).

Para um valor inicial de $i(0) = 30$ graus, a excentricidade apresenta uma amplitude de 0.005 e para $i(0) = 20$ graus uma amplitude de 0.002. Estes valores podem ser considerados pequenos e a órbita como quase-circular ainda.

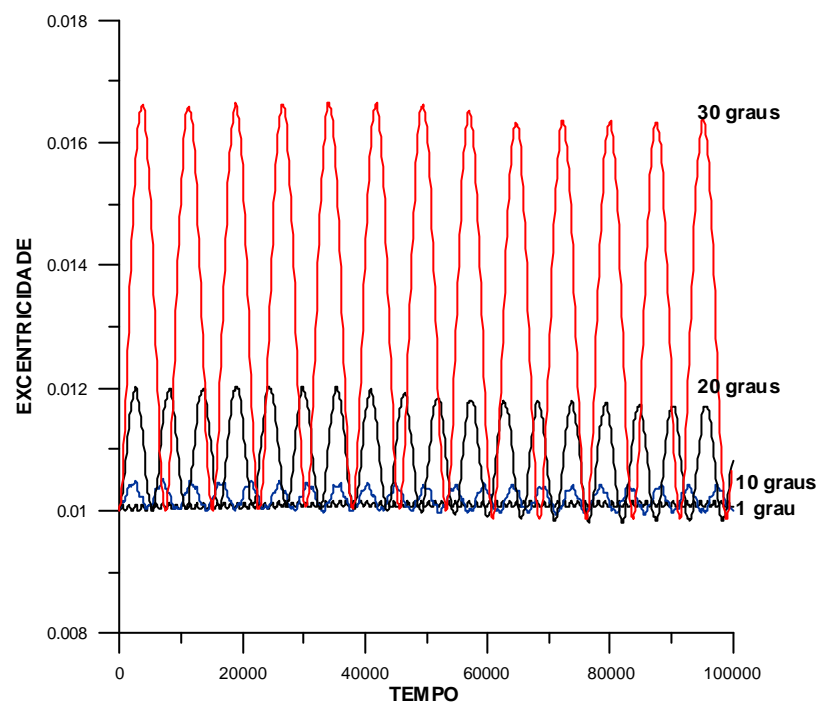


Fig. 5.2 – Evolução temporal da excentricidade com $i(0) < i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$).

Para valores maiores da inclinação crítica, a inclinação mostra seu típico comportamento, ou seja, inicia no seu valor inicial e logo desce até o valor crítico (Figura 5.3). Este comportamento oscilatório apresenta a característica que, conforme a inclinação inicial aumenta, a amplitude da inclinação sofre acréscimo. Isto se reflete na evolução da excentricidade (Figura 5.4), onde as órbitas com excentricidades iniciais pequenas (quase circulares) atingem grandes valores (se transformam em elípticas).

Quando a inclinação atinge seu valor mínimo, a excentricidade atinge seu valor máximo. Este comportamento repetitivo é mostrado na Figura 5.5, onde a inclinação inicia no seu valor $i(0)$ (o mesmo acontece para a excentricidade), e depois de um certo período a excentricidade atinge seu valor máximo e a inclinação seu valor mínimo.

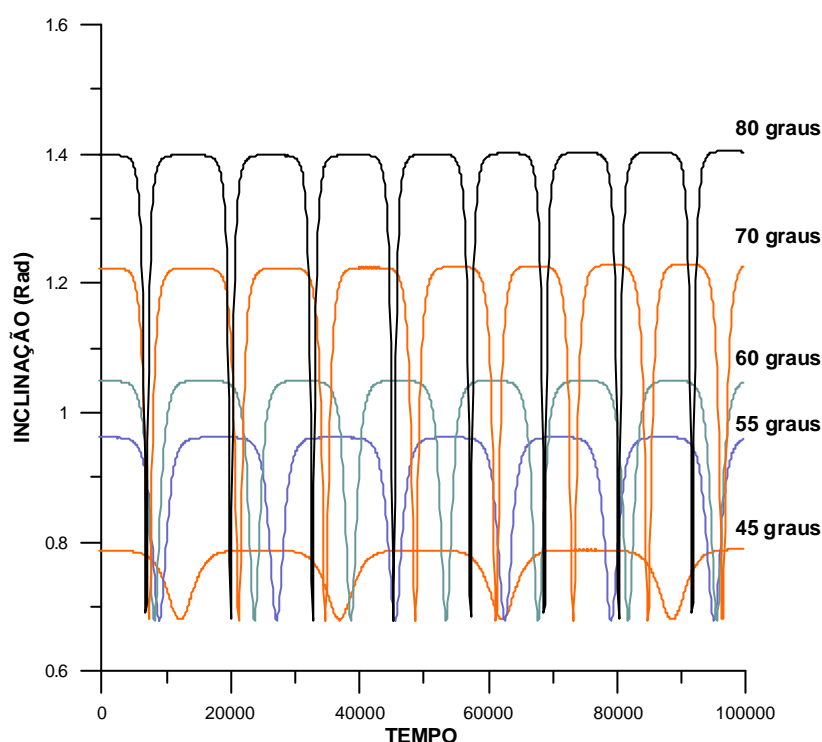


Fig. 5.3 – Evolução temporal da inclinação com $i(0) > i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$).

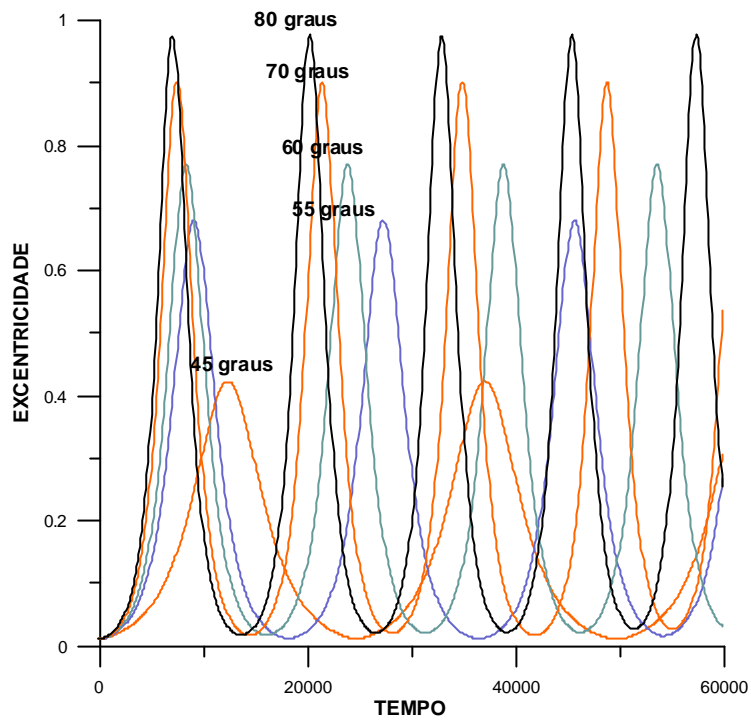


Fig. 5.4 – Evolução temporal da excentricidade com $i(0) > i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$).

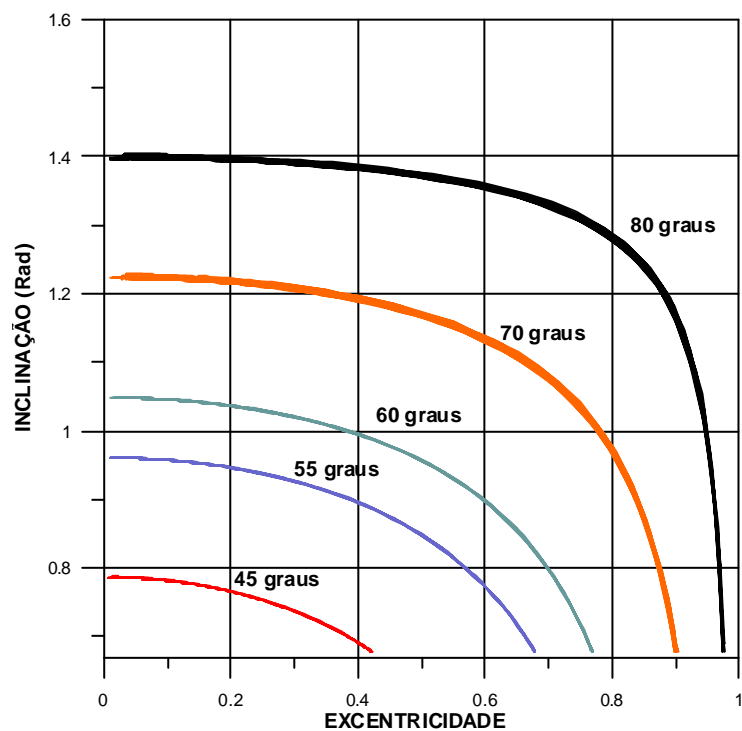


Fig. 5.5 – Evolução no plano inclinação vs. excentricidade com $i(0) > i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$).

As Figuras 5.6 e 5.9 mostram a evolução do argumento do perigeu para valores da inclinação inicial entre 1 e 30 graus. Ambas as figuras mostram o comportamento secular do argumento do perigeu para a escala de tempo utilizada. Para um intervalo de tempo menor as curvas seculares estão formadas por pequenas oscilações é uma característica do sistema que as pequenas inclinações sofram uma maior variação no argumento do perigeu e na longitude do nodo. Além disso, as Figuras 5.7 e 5.8 ilustram o comportamento retrógrado da longitude do nodo.

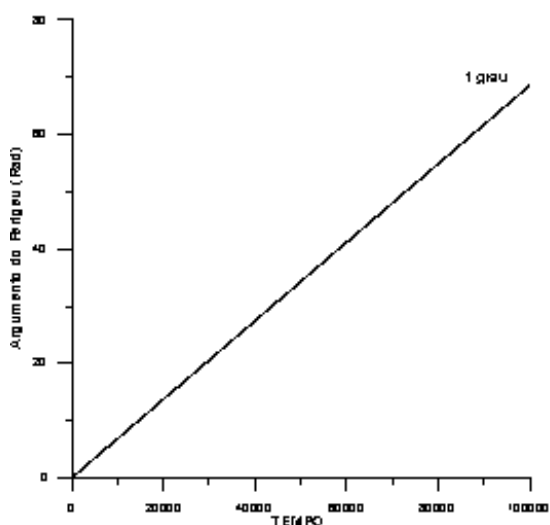


Fig. 5.6 – Evolução do argumento do perigeu com $i(0) = 1$ grau para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$).

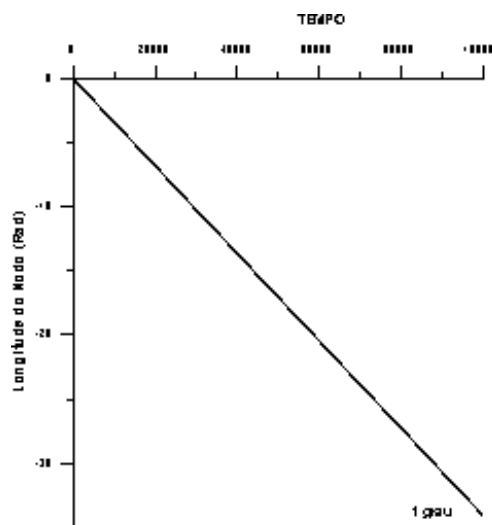


Fig. 5.7 – Evolução da longitude do nodo com $i(0) = 1$ grau para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$).

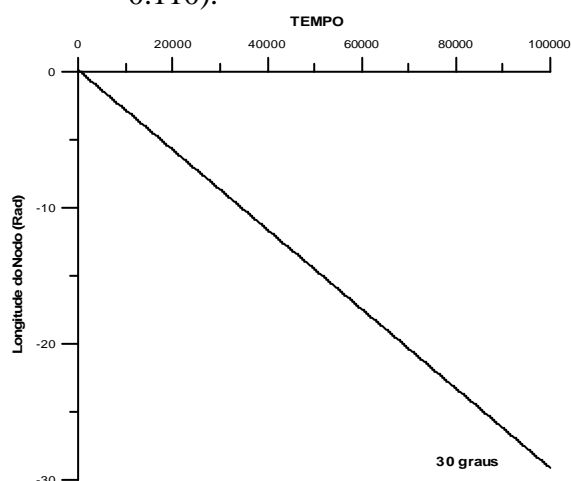


Fig. 5.8 – Evolução da longitude do nodo com $i(0) = 30$ graus para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$).

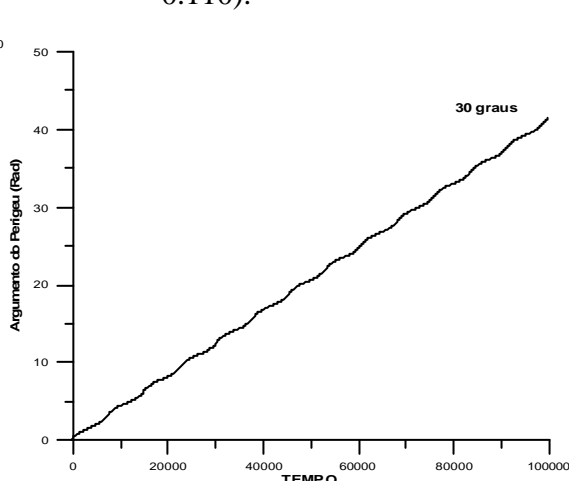


Fig. 5.9 – Evolução do argumento do perigeu com $i(0) = 30$ graus para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$).

Para os valores próximos ou ligeiramente maiores que a inclinação crítica, observamos que os primeiros tem uma variação da inclinação quase constante (Figura 5.10). Conforme esse valor sofre acréscimos, a inclinação experimenta variações maiores. Por exemplo, para $i(0) = 43$ graus existe uma variação de 4.01070 graus. Na análise da excentricidade (Figura 5.11), observamos que existe uma zona onde a excentricidade apresenta pequenas oscilações (da ordem de 0.01 a 0.05). Depois disso, ela experimenta variações com grandes amplitudes, tornando a órbita inicialmente quase circular em elíptica.

Realizando a análise no plano excentricidade–inclinação (Figura 5.12), observamos que para os valores próximos da inclinação crítica as variações são pequenas, de tal forma que com a escala de tempo utilizada não é possível observar as pequenas variações. Para valores maiores existe o comportamento cíclico.

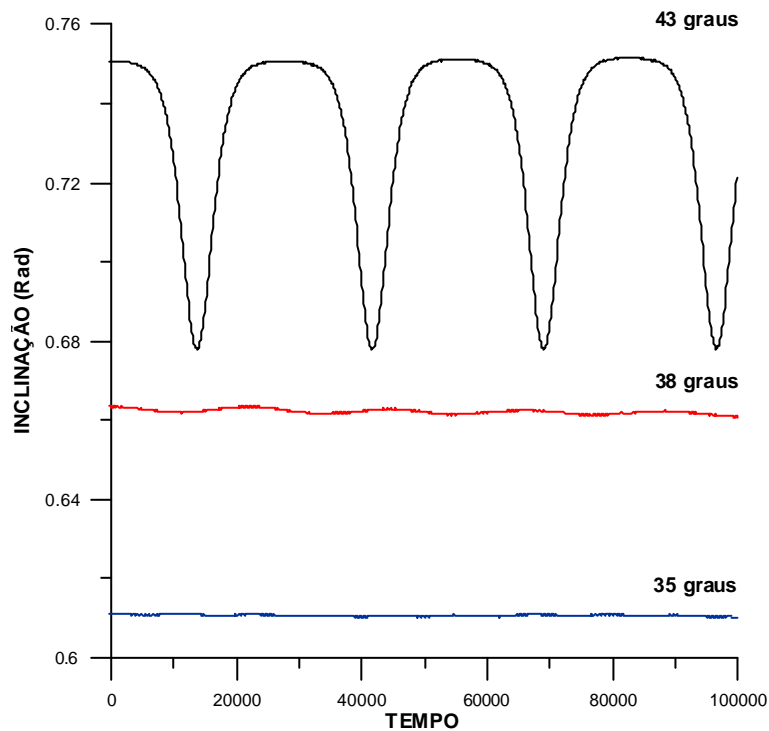


Fig. 5.10 – Evolução temporal da inclinação com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$).

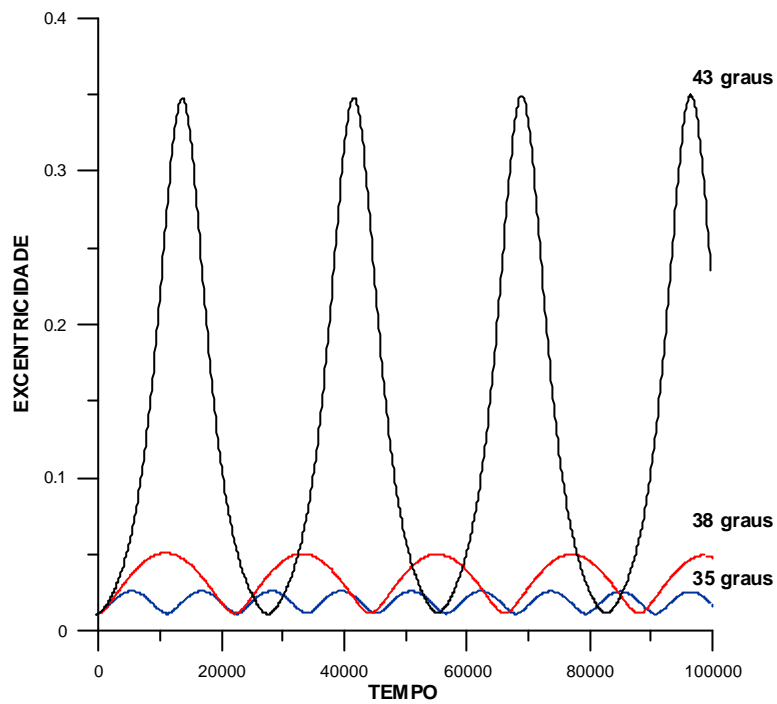


Fig. 5.11 – Evolução temporal da excentricidade com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$).

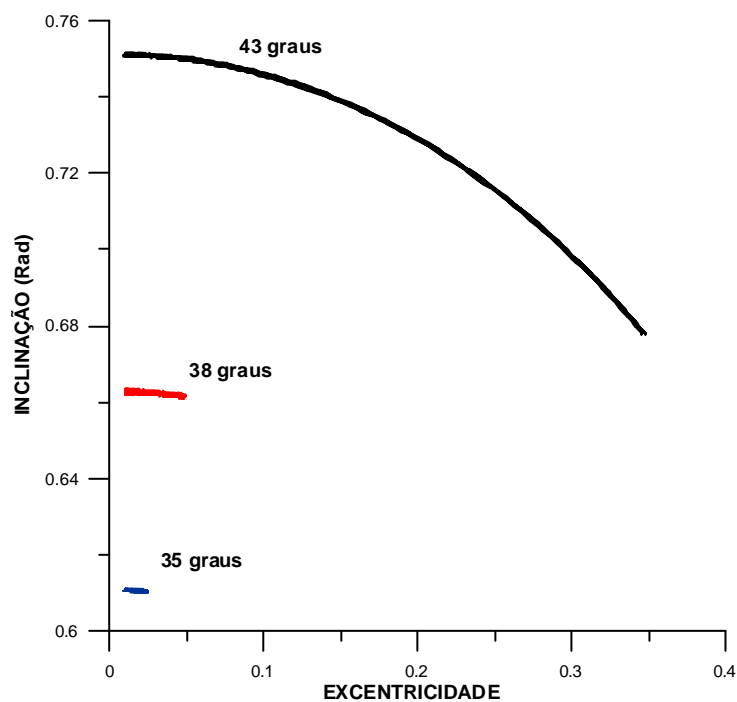


Fig. 5.12 – Evolução no plano inclinação vs. excentricidade com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$).

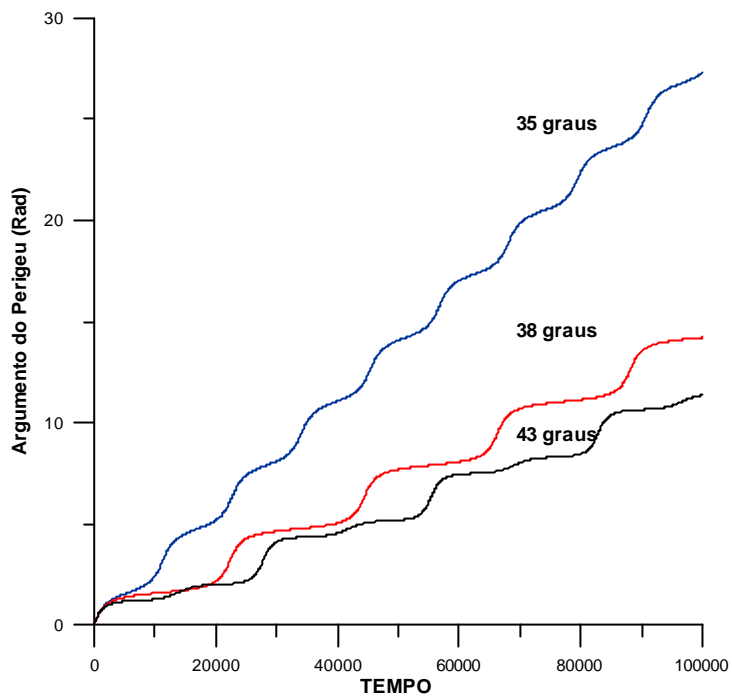


Fig. 5.13 – Evolução do argumento do perigeu com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$).

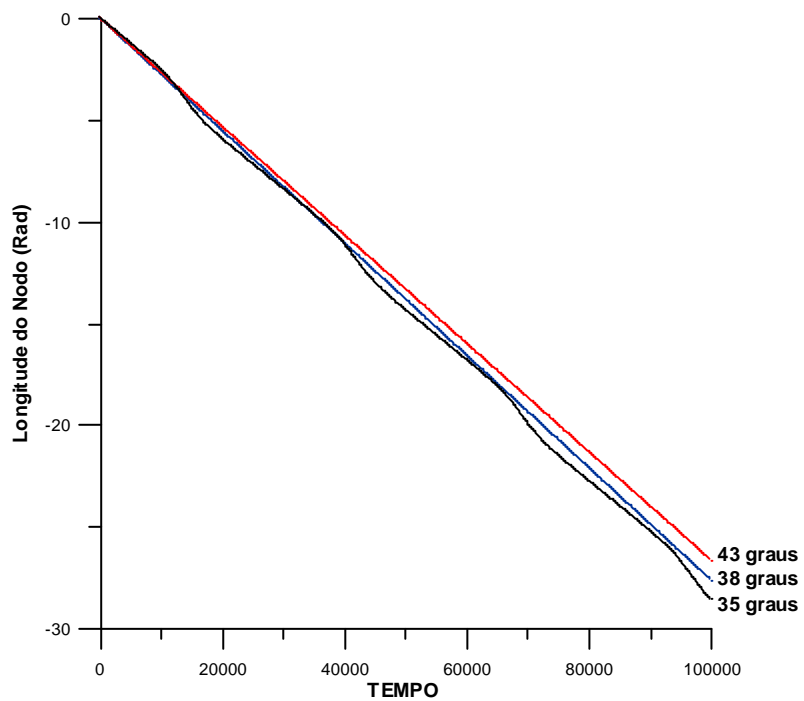


Fig. 5.14 – Evolução da longitude do nodo com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.110$)

Na análise do argumento do perigeu, nota-se o comportamento secular, o qual vai acompanhado de pequenas oscilações (Figura 5.13). Podemos dizer que para uma escala menor do tempo observaremos que essas curvas estão formadas por pequenas oscilações. Além disso, a Figura 5.14 mostra o comportamento retrógrado da longitude do nodo.

5.2.2 Perturbação Luni-Solar para um Satélite com um Semi-Eixo Maior de 0.07 Unidades Canônicas de Comprimento

As simulações apresentadas nesta seção são similares as mostradas na seção 5.2.1. Uma das principais características é o menor número de oscilações em uma mesma unidade de tempo (Figuras 5.3 e 5.17).

Isto traz como consequência que, quando o satélite está posicionado em uma órbita com um semi-eixo maior de 0.110 unidades canônicas de comprimento, ele atinja mais rapidamente a inclinação crítica. Assim, na Figura 5.17 observamos que para $i(0) = 45$ graus, o satélite atinge seu primeiro valor crítico quando o tempo é de 25000 unidades canônicas. Embora na Figura 5.3 observa-se que atinge a inclinação crítica próximo de 12000 unidades canônicas de tempo.

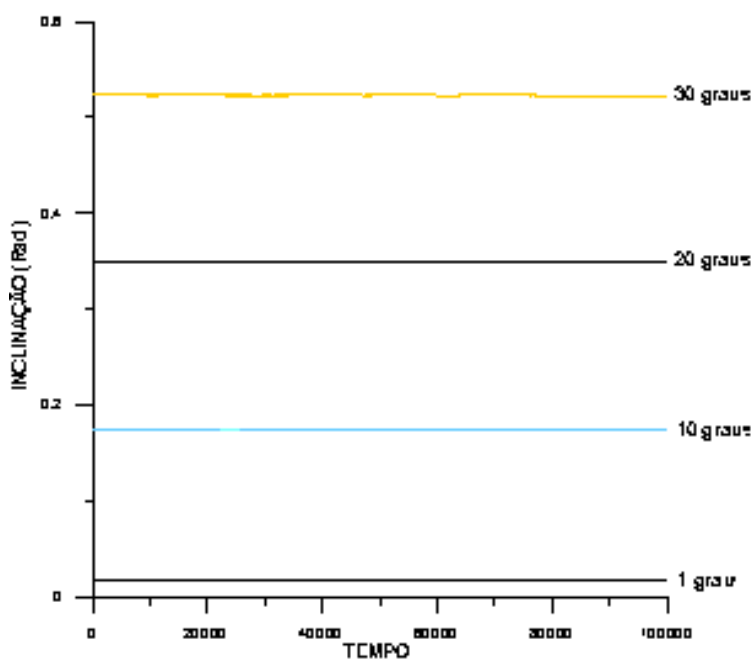


Fig. 5.15 – Evolução temporal da inclinação com $i(0) < i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$).

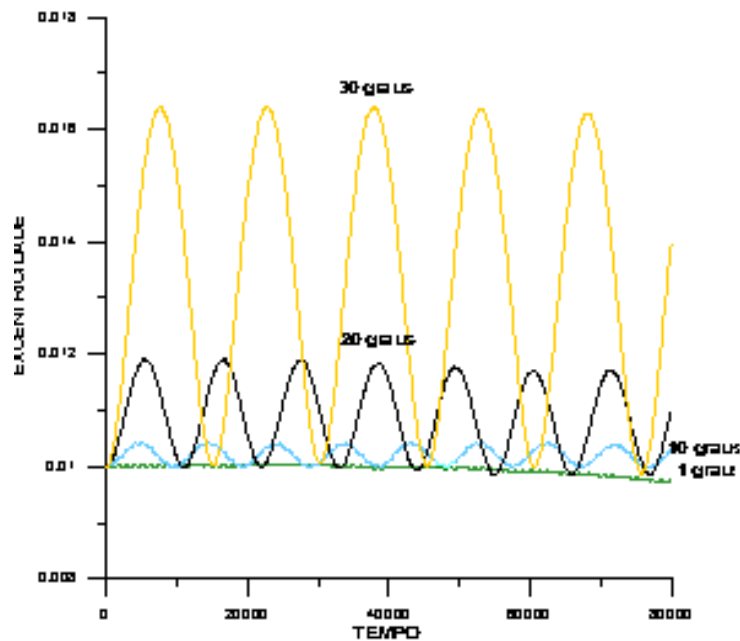


Fig. 5.16 – Evolução temporal da excentricidade com $i(0) < i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$).

Na evolução da inclinação e da excentricidade, para os valores da inclinação inicial abaixo da crítica, a inclinação (Figura 5.15) mantém o seu comportamento típico, embora a excentricidade não experimente variações significativas (Figuras 5.16 e 5.2).

Como consequência de que o tempo necessário para atingir a inclinação crítica é maior, o número de oscilações na evolução da excentricidade é menor (Figura 5.18), embora o comportamento analisado mostre que com maiores excentricidades atingem-se menores inclinações, conforme pode ser visto nas Figuras 5.18 e 5.19.

As Figuras 5.20 e 5.21 mostram a evolução do argumento do perigeu para inclinações iniciais maiores que crítica. Mostra-se o comportamento secular e oscilatório, sendo um ponto interessante que, conforme a inclinação inicial aumenta, o satélite atinge valores mais elevados para o argumento do perigeu. No caso da longitude do nodo, ele apresenta o comportamento típico secular e retrógrado (Figuras 5.22 e 5.23).

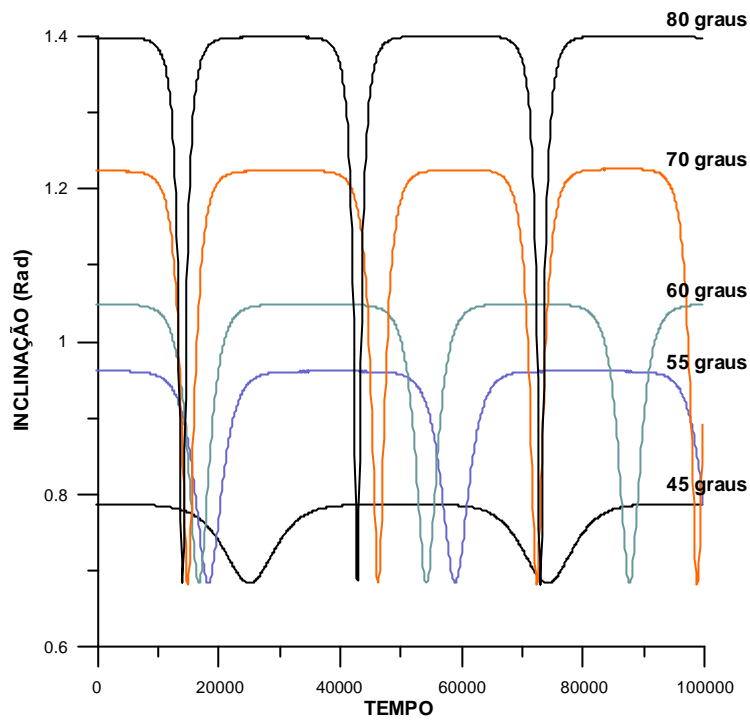


Fig. 5.17 – Evolução temporal da inclinação com $i(0) > i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$).

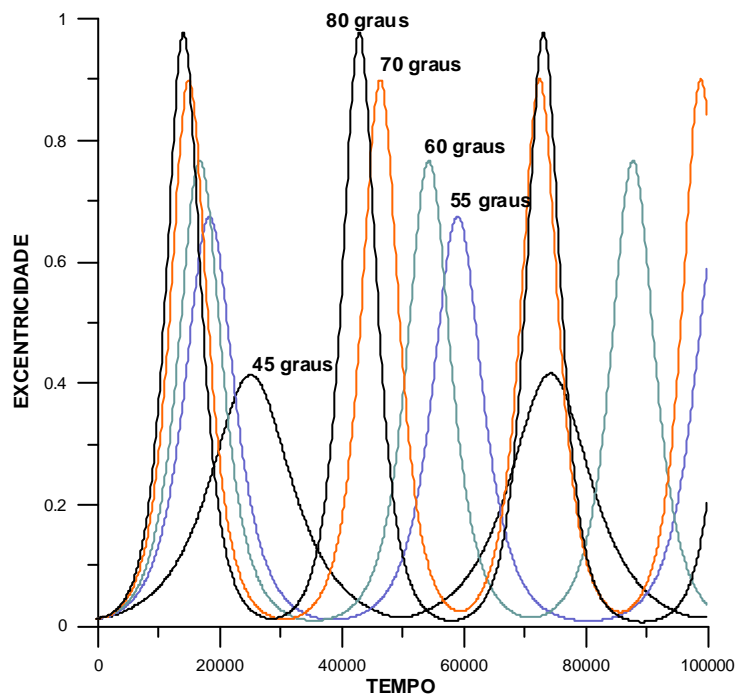


Fig. 5.18 – Evolução temporal da excentricidade com $i(0) > i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$).

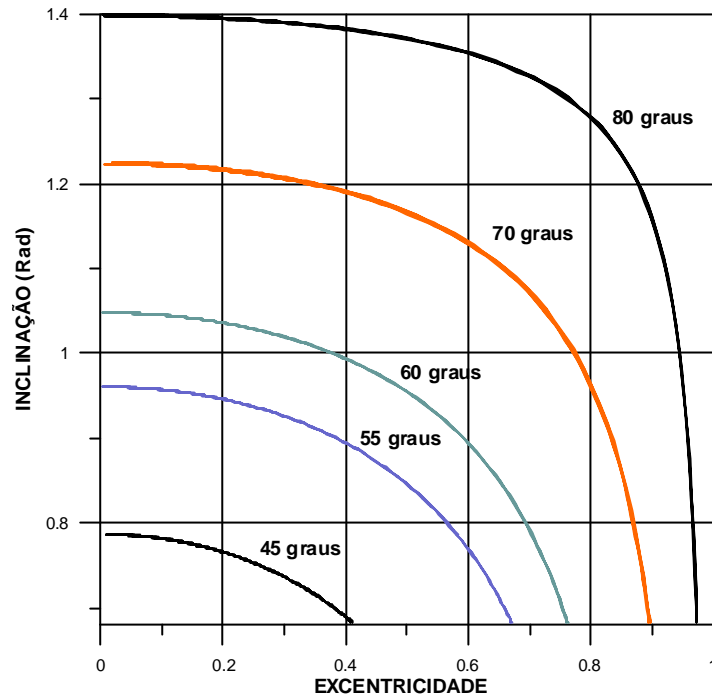


Fig. 5.19 – Evolução no plano inclinação vs. excentricidade com $i(0) > i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$).

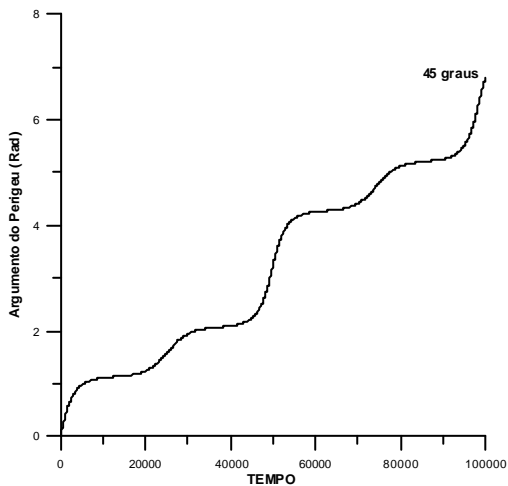


Fig. 5.20 – Evolução do argumento do perigeu com $i(0) = 45$ graus para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$).

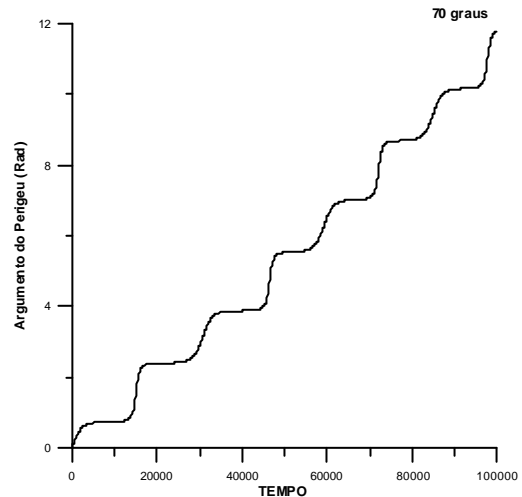


Fig. 5.21 – Evolução do argumento do perigeu com $i(0) = 70$ graus para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$).

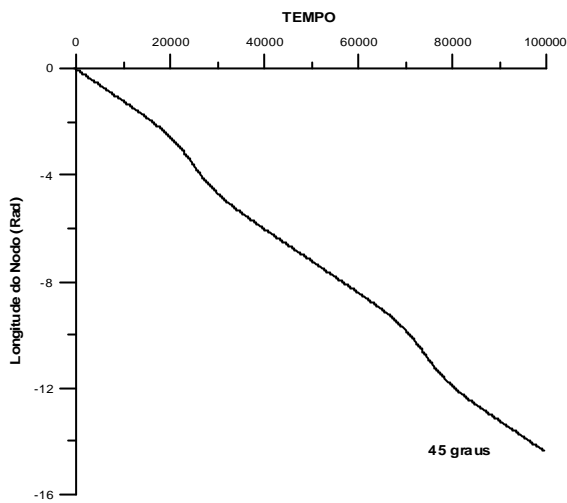


Fig. 5.22 – Evolução da longitude do nodo com $i(0) = 45$ graus para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$).

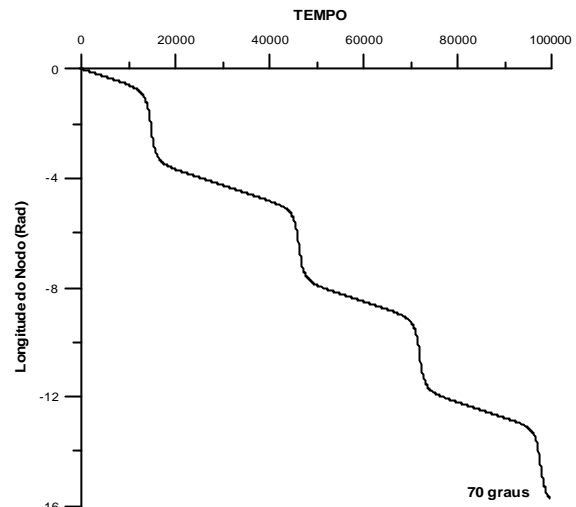


Fig. 5.23 – Evolução da longitude do nodo com $i(0) = 70$ graus para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$).

As Figuras 5.24 e 5.25 mostram o comportamento da inclinação e da excentricidade, para valores próximos e ligeiramente maiores que a inclinação crítica.

Os valores próximos do valor crítico experimentam pequenas variações na inclinação e na excentricidade. Estas pequenas oscilações permitem que as órbitas quase circulares permaneçam assim, embora conforme a inclinação inicial aumente as amplitudes sejam maiores. Estes fatos também são mostrados na Figura 5.26.

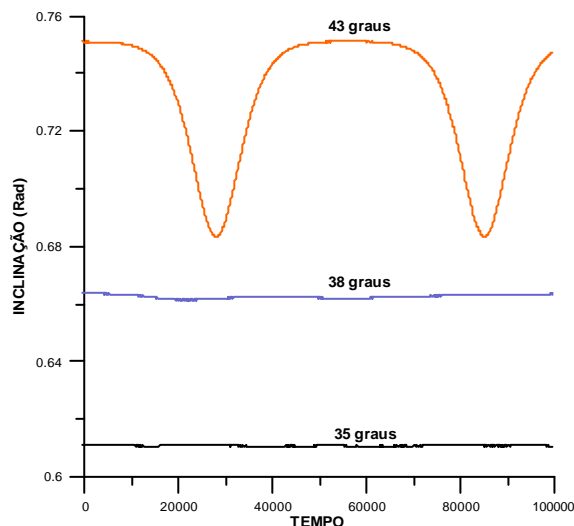


Fig. 5.24 – Evolução temporal da inclinação com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$).

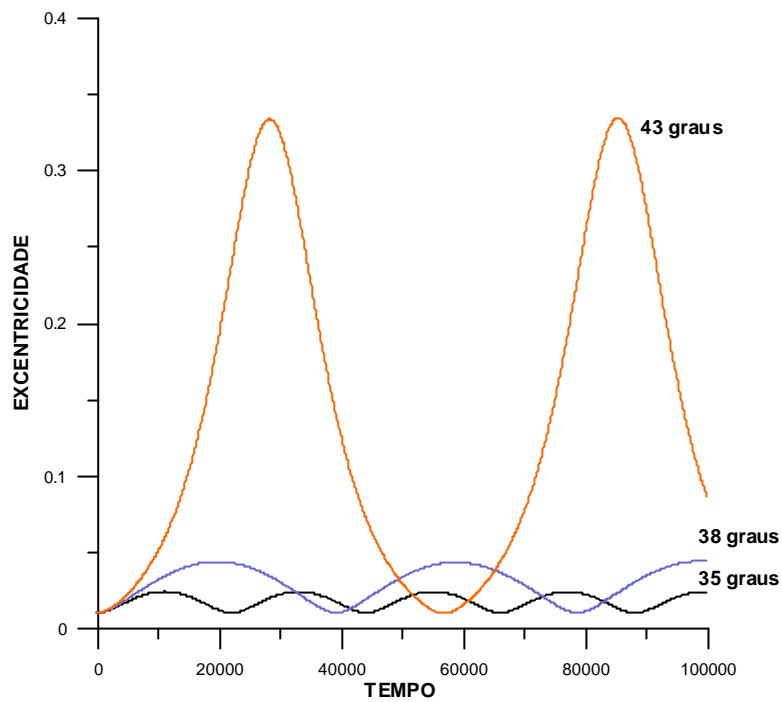


Fig. 5.25 – Evolução temporal da excentricidade com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$).

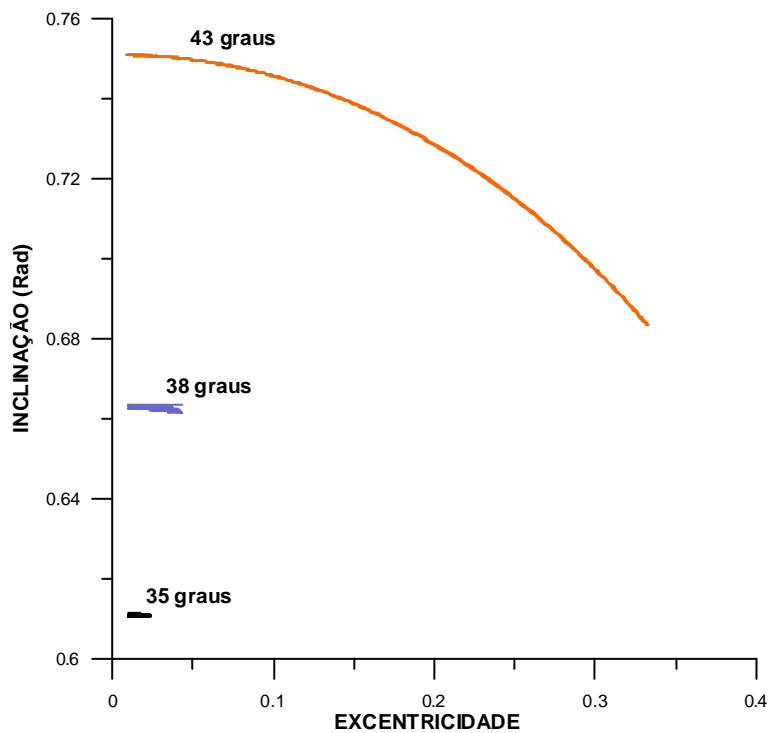


Fig. 5.26 – Evolução no plano inclinação vs. excentricidade com $i(0) \cong i_c$ para a perturbação Luni-Solar ($a = 0.07$).

CAPÍTULO 6

ANÁLISE DAS SINGULARIDADES

6.1 FORMA ALTERNATIVA PARA PEQUENAS EXCENTRICIDADES E / OU INCLINAÇÕES.

As equações de Lagrange apresentadas no Capítulo 3 possuem alguns inconvenientes para sua aplicação à órbitas com pequenas inclinações ou pequenas excentricidades. A presença da excentricidade e do $\sin(i)$ no denominador conduz a certas singularidades nas equações de movimento do corpo perturbado.

Ao examinar as equações de Lagrange observamos que, para órbitas com pequenas excentricidades, estas grandezas tendem a grandes mudanças nos elementos. Pela presença de e no denominador, pequenas alterações na excentricidade causam dificuldades em definir mudanças em ω . As equações que dependem da inclinação tem um comportamento especial quando ela é pequena. Existe uma justificativa para esse comportamento, que é o fato da longitude do nodo ser indefinida quando a inclinação é zero. No caso de órbitas circulares, estas apresentam o argumento do perigeu de forma indefinida e no caso das órbitas equatoriais elas mostram o mesmo comportamento para a longitude do nodo.

É possível obter equações que superam estas dificuldades pela mudança dos elementos orbitais. Na literatura existem muitos tipos de mudanças de variáveis para evitar as singularidades nas equações de movimento. Nós observamos que a adição desses elementos não faz nenhuma mudança física ou geométrica ao conhecimento dos efeitos da perturbação, além de não produzir simplificação matemática alguma. O seu objetivo principal é a eliminação das singularidades.

6.2 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE UM SATÉLITE

Consideraremos as equações de movimento determinadas por Giacaglia (1977) em variáveis não-singulares. As Equações 3.20 até 3.25 não se aplicam no caso de órbitas circulares ou equatoriais, sendo necessária uma mudança de variáveis. O conjunto de variáveis definidas abaixo para $i \neq \pi$ e $e < 1$ são não-singulares.

$$\begin{aligned}
 l &= M + w + W \\
 x &= e \cos[v] \\
 h &= e \sin[v] \\
 P &= \sin\left[\frac{i}{2}\right] * \cos[W] \\
 Q &= \sin\left[\frac{i}{2}\right] * \sin[W] \\
 v &= W + w
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Para este conjunto as equações planetárias de Lagrange são (Giacaglia, 1977):

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial l} \\
 \frac{dl}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{g}{2na^2} \left(x \frac{\partial R}{\partial x} + h \frac{\partial R}{\partial h} \right) + \frac{1}{2na^2 g} \left(P \frac{\partial R}{\partial P} + Q \frac{\partial R}{\partial Q} \right) \\
 \frac{dx}{dt} &= - \frac{g}{na^2(1+g)} \left(x \frac{\partial R}{\partial l} \right) - \frac{g}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{1}{2na^2 g} h \left(P \frac{\partial R}{\partial P} + Q \frac{\partial R}{\partial Q} \right) \\
 \frac{dh}{dt} &= - \frac{g}{na^2(1+g)} \left(h \frac{\partial R}{\partial l} \right) + \frac{g}{na^2} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{2na^2 g} x \left(P \frac{\partial R}{\partial P} + Q \frac{\partial R}{\partial Q} \right) \\
 \frac{dP}{dt} &= - \frac{1}{2na^2 g} P \frac{\partial R}{\partial l} - \frac{1}{4na^2 g} \frac{\partial R}{\partial Q} + \frac{1}{2na^2 g} P \left(h \frac{\partial R}{\partial x} - x \frac{\partial R}{\partial h} \right) \\
 \frac{dQ}{dt} &= - \frac{1}{2na^2 g} Q \frac{\partial R}{\partial l} + \frac{1}{4na^2 g} \frac{\partial R}{\partial P} + \frac{1}{2na^2 g} Q \left(h \frac{\partial R}{\partial x} - x \frac{\partial R}{\partial h} \right)
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Onde: $g = \sqrt{1 - e^2}$.

A função perturbadora devida a um terceiro corpo pode ser escrita como:

$$\mathbf{R} = m' n'^2 r'^2 \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \sum_{\ell=2}^{\infty} \dot{\mathbf{a}} \left(\frac{r}{r'} \right)^{\ell-2} \mathbf{P}_{\ell}(\text{Cos}(\mathbf{S})) \quad (6.3)$$

Onde:

$$m' = \frac{m'}{m + m'}, \quad m' = \text{Massa do corpo perturbador}$$

n' = movimento médio do corpo perturbador

a' = semi-eixo maior do corpo perturbador

S = Elongação geocêntrica do satélite desde o corpo perturbador

r' = Distância geocêntrica do corpo perturbador.

Utilizando as coordenadas equatoriais (declinação e ascensão reta) temos:

d = Declinação.

a = Ascensão reta.

$$\text{Cos}(\mathbf{S}) = \text{Sen}(d)\text{Sen}(d') + \text{Cos}(d)\text{Cos}(d')\text{Cos}(a - a') \quad (6.4)$$

Os polinômios de Legendre podem ser escritos como:

$$\mathbf{P}_{\ell}(\text{Cos}(\mathbf{S})) = \sum_{z=0}^{\ell} \dot{\mathbf{a}} z \frac{(\ell - z)!}{(\ell + z)!} \mathbf{P}_{\ell z}(\text{Send}) \mathbf{P}_{\ell z}(\text{Send}') \text{Cos}z(a - a') \quad (6.5)$$

Tem-se que: $V_0 = 1$ e $V_z = 2$ para $z \neq 0$. Pela fórmula de Rodrigues:

$$\mathbf{P}_{\ell z}(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^z (1 - x^2)^{z/2}}{2^{\ell} \ell!} \frac{d^{\ell+z}}{dx^{\ell+z}} (x^2 - 1)^{\ell} \quad (6.6)$$

Sendo os coeficientes harmônicos dados por:

$$\mathbf{C}'_{\ell z} = \left\{ \frac{m' n'^2}{a'^{\ell-2}} \left(\frac{a'}{r'} \right)^{\ell+1} z \frac{(\ell - z)!}{(\ell + z)!} \mathbf{P}_{\ell z}(\text{Send}') \right\} \text{Cos}z a' \quad (6.7)$$

$$\mathbf{S}'_{\ell z} = \left\{ \frac{m'n'^2}{a'^{\ell-2}} \left(\frac{a'}{r'} \right)^{z_z} \frac{(\ell - z)!}{(\ell + z)!} \mathbf{P}_{\ell z}(\text{Send}') \right\} \text{Sen}(za') \quad (6.8)$$

Tal que:

$$\mathbf{R} = \dot{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \mathbf{R}_{\ell z} \quad (6.9)$$

Onde:

$$\mathbf{R}_{\ell z} = \mathbf{a}^{\ell} \left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{a}} \right)^{\ell} \mathbf{P}_{\ell z}(\text{Send}) [\mathbf{C}'_{\ell z} \text{Cos}(za) + \mathbf{S}'_{\ell z} \text{Sen}(za)] \quad (6.10)$$

A Equação (6.9) pode ser representada em coordenadas orbitais como (Giacaglia, 1977):

$$\mathbf{P}_{\ell z}(\text{Send}) [\mathbf{C}'_{\ell z} \text{Cos}(za) + \mathbf{S}'_{\ell z} \text{Sen}(za)] = \dot{\mathbf{a}} \mathbf{F}_{\ell zp}(\mathbf{i}) \{ \mathbf{A}'_{\ell z} \text{Cos} Y_{\ell zp} + \mathbf{B}'_{\ell z} \text{Sen} Y_{\ell zp} \} \quad (6.11)$$

$\mathbf{F}_{\ell zp}(\mathbf{i})$: Função inclinação de Kaula

$$Y_{\ell zp} = (\ell - 2p)(w + f) + zW \quad (6.12)$$

Da Equação 6.11:

Se $\ell - z$ for par: $\mathbf{A}'_{\ell z} = \mathbf{C}'_{\ell z}$; $\mathbf{B}'_{\ell z} = \mathbf{S}'_{\ell z}$

Se $\ell - z$ for ímpar: $\mathbf{A}'_{\ell z} = -\mathbf{S}'_{\ell z}$; $\mathbf{B}'_{\ell z} = \mathbf{C}'_{\ell z}$ (6.13)

Levando as Equações 6.11 à 6.10 e 6.10 à 6.9 temos:

$$\mathbf{R} = \dot{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \mathbf{R}_{\ell zp} = \dot{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \mathbf{a}^{\ell} \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{r}} \right)^{\ell} \mathbf{F}_{\ell zp}(\mathbf{i}) \{ \mathbf{A}'_{\ell z} \text{Cos} Y_{\ell zp} + \mathbf{B}'_{\ell z} \text{Sen} Y_{\ell zp} \} \quad (6.14)$$

Dos coeficientes de Hansen (Giacaglia, 1977) temos:

$$\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{a}} \right)^{\ell} \text{Cos} Y_{\ell zp} = \dot{\mathbf{a}} \mathbf{H}_{\ell pq}(\mathbf{e}) \text{Cos} Y_{\ell zp q} \quad (6.15)$$

Onde:

$$Y_{\ell zpq} = (\ell - 2p + q)l - qv + (w + f) + (z + 2p - \ell)W \quad (6.16)$$

e:

$$\mathbf{H}_{\ell pq} = e^{iq} \mathbf{L}_{\ell pq}(g) \quad (6.17)$$

É possível escrever a função perturbadora como:

$$\mathbf{R} = \underset{\substack{\ell=2 \\ z=0 \\ p=0 \\ q}}{\overset{\ell}{\underset{\ell}{\dot{a}}}} \underset{\substack{\ell=2 \\ z=0 \\ p=0 \\ q}}{\overset{\ell}{\underset{\ell}{\dot{a}}}} \underset{\substack{\ell=2 \\ z=0 \\ p=0 \\ q}}{\overset{\ell}{\underset{\ell}{\dot{a}}}} \underset{\substack{\ell=2 \\ z=0 \\ p=0 \\ q}}{\overset{\ell}{\underset{\ell}{\dot{a}}}} \mathbf{F}_{\ell zp}(\mathbf{i}) e^{iq} \mathbf{L}_{\ell pq}(g) \{ \mathbf{A}'_{\ell z} \text{Cos} Y_{\ell zpq} + \mathbf{B}'_{\ell z} \text{Sen} Y_{\ell zpq} \} \quad (6.18)$$

A seguir faremos o desenvolvimento da Equação 6.18, até a segunda ordem. A Tabela 6.1 mostra os valores de p e q para $\ell = 2$ e $z = 0$

TABELA 6.1 - VALORES DE p E q PARA $\ell = 2$ E $z = 0$

| p | q |
|---|-----------------|
| 0 | -2, -1, 0, 1, 2 |
| 1 | -2, -1, 0, 1, 2 |
| 2 | -2, -1, 0, 1, 2 |

Os coeficientes são determinados pelas Equações 6.13. Empregando as Equações 6.7 e 6.8 temos:

$$\mathbf{A}'_{20} = m'n'^2 \left(\frac{\mathbf{a}'}{r'} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \right) (3\text{Sen}d'^2 - 1) \quad (6.19)$$

Trabalhando a Equação 6.18 e considerando a Tabela 6.1, temos as seguintes parcelas:

1) Para $\ell = 2, z = 0, p = 0$

$$\mathbf{a}^2 \mathbf{F}_{200}(\mathbf{i}) \mathbf{A}'_{20} \{ \mathbf{e}^2 \mathbf{L}(g)_{20(-2)} \text{Cos} Y_{200(-2)} + \mathbf{e} \mathbf{L}(g)_{20(-1)} \text{Cos} Y_{200(-1)} + \mathbf{L}(g)_{20(-0)} \text{Cos} Y_{200(-0)} + \mathbf{e} \mathbf{L}(g)_{20(1)} \text{Cos} Y_{200(1)} + \mathbf{e}^2 \mathbf{L}(g)_{20(2)} \text{Cos} Y_{200(2)} \} \quad (6.20)$$

Da Equação 6.16:

$$Y_{\ell p q} = (\ell - 2p + q)l - qv + (w + f) + (z + 2p - \ell)W$$

Aonde: $l = M + w + W = M + v$

Ao considerar a Equação 6.16 podemos obter uma representação dessas variáveis em elementos orbitais. Após algumas simplificações temos:

$$Y_{\ell p q} = (\ell - 2p + q)M + (\ell - 2p)w + zW \quad (6.21)$$

Devemos fazer a avaliação dos valores de ℓ , p , q , z na Equação 6.21. Devemos considerar também a avaliação das funções inclinação. Desta forma temos:

$$\mathbf{F}_{\ell p}(\mathbf{i}) = s^{|\mathbf{a}|} \mathbf{J}(\mathbf{c})_{\ell p} \quad (6.22)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{z} + 2\mathbf{p} + \ell \quad (6.23)$$

Onde $\mathbf{J}(\mathbf{c})_{\ell p}$ é um polinômio em $c = \text{Cos}(\frac{i}{2})$ e $s = \text{Sen}(\frac{i}{2})$. Desta forma temos os resultados mostrados abaixo.

TABELA 6.2 - VALORES PARA $\mathbf{J}(\mathbf{c})_{\ell p}$

| ℓ | \mathbf{z} | \mathbf{p} | $1/2\mathbf{a}^{1/2}$ | $\mathbf{J}(\mathbf{c})_{\ell p} \quad c = \text{Cos}(\frac{i}{2})$ |
|--------|--------------|--------------|-----------------------|---|
| 2 | 0 | 0 | 2 | $-3c^2/2$ |
| 2 | 0 | 1 | 0 | $-1/2+3c^2-3c^4$ |
| 2 | 0 | 2 | 2 | $-3c^2/2$ |

Adaptada de Giacaglia, 1977, página 208.

Das Equações 6.21, 6.22, 6.23 e da Tabela 6.2, temos:

$$\begin{aligned}
F_{200}(\mathbf{i}) &= s^2 J(\mathbf{c})_{200} = -\frac{3}{2} \text{Sen}^2\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right) \text{Cos}^2\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right) \\
\text{Cos} Y_{200(-2)} &= \text{Cos}(2w) \\
\text{Cos} Y_{200(-1)} &= \text{Cos}(M + 2w) \\
\text{Cos} Y_{200(0)} &= \text{Cos}(2M + 2w) \\
\text{Cos} Y_{200(1)} &= \text{Cos}(3M + 2w) \\
\text{Cos} Y_{200(2)} &= \text{Cos}(4M + 2w)
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Levando os valores de 6.24 a Equação 6.20:

$$\begin{aligned}
a^2 \left[-\frac{3}{2} \text{Sen}^2\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right) \text{Cos}^2\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right) \right] A_{20} \{ & e^2 L(g)_{20(-2)} \text{Cos}(2w) + \\
e L(g)_{20(-1)} \text{Cos}(M + 2w) + L(g)_{20(0)} \text{Cos}(2M + 2w) + & \\
e L(g)_{20(1)} \text{Cos}(3M + 2w) + e^2 L(g)_{20(2)} \text{Cos}(4M + 2w) \} &
\end{aligned} \tag{6.25}$$

2) Para $\ell = 2, z = 0, p = 1$

$$\begin{aligned}
a^2 F_{201}(\mathbf{i}) A_{20} \{ & e^2 L(g)_{21(-2)} \text{Cos} Y_{201(-2)} + e L(g)_{21(-1)} \text{Cos} Y_{201(-1)} + \\
L(g)_{21(0)} \text{Cos} Y_{201(0)} + e L(g)_{21(1)} \text{Cos} Y_{201(1)} + e^2 L(g)_{21(2)} \text{Cos} Y_{201(2)} \} &
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Das Equações 6.21, 6.22, 6.23, e da Tabela 6.2, temos:

$$\begin{aligned}
F_{201}(\mathbf{i}) &= s^0 J(\mathbf{c})_{201} = -\frac{1}{2} + 3 * \text{Cos}^2\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right) - 3 * \text{Cos}^4\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right) \\
\text{Cos} Y_{201(-2)} &= \text{Cos}(-2M) \\
\text{Cos} Y_{201(-1)} &= \text{Cos}(-M) \\
\text{Cos} Y_{201(0)} &= \text{Cos}(0) \\
\text{Cos} Y_{201(1)} &= \text{Cos}(M) \\
\text{Cos} Y_{201(2)} &= \text{Cos}(2M)
\end{aligned} \tag{6.27}$$

A Equação 6.27 serão levadas a Equação 6.26:

$$\begin{aligned}
& a^2 \left[-\frac{1}{2} + 3 * \text{Cos}^2\left(\frac{i}{2}\right) - 3 * \text{Cos}^4\left(\frac{i}{2}\right) \right] A_{20} \{ e^2 L(g)_{21(-2)} \text{Cos}(-2M) + \\
& eL(g)_{21(-1)} \text{Cos}(-M) + L(g)_{21(-0)} \text{Cos}(0) + eL(g)_{21(1)} \text{Cos}(M) + \\
& e^2 L(g)_{21(2)} \text{Cos}(2M) \}
\end{aligned} \tag{6.28}$$

3) Para $\ell = 2, z = 0, p = 2$

$$\begin{aligned}
& a^2 F_{202}(i) A_{20} \{ e^2 L(g)_{22(-2)} \text{Cos} Y_{202(-2)} + eL(g)_{22(-1)} \text{Cos} Y_{202(-1)} + \\
& L(g)_{22(-0)} \text{Cos} Y_{202(-0)} + eL(g)_{22(1)} \text{Cos} Y_{202(1)} + e^2 L(g)_{22(2)} \text{Cos} Y_{202(2)} \}
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Das Equações 6.21, 6.22, 6.23, e da Tabela 6.2, temos:

$$\begin{aligned}
F_{202}(i) &= s^2 J(c)_{202} = -\frac{3}{2} \text{Sen}^2\left(\frac{i}{2}\right) \text{Cos}^2\left(\frac{i}{2}\right) \\
\text{Cos} Y_{202(-2)} &= \text{Cos}(-4M - 2w) \\
\text{Cos} Y_{202(-1)} &= \text{Cos}(-3M - 2w) \\
\text{Cos} Y_{202(0)} &= \text{Cos}(-2M + 2w) \\
\text{Cos} Y_{202(1)} &= \text{Cos}(-M - 2w) \\
\text{Cos} Y_{202(2)} &= \text{Cos}(-2w)
\end{aligned} \tag{6.30}$$

A Equação 6.30 em 6.29 permite obter:

$$\begin{aligned}
& a^2 \left[-\frac{3}{2} \text{Sen}^2\left(\frac{i}{2}\right) \text{Cos}^2\left(\frac{i}{2}\right) \right] A_{20} \{ e^2 L(g)_{22(-2)} \text{Cos}(-4M - 2w) + eL(g)_{22(-1)} \\
& \text{Cos}(-3M - 2w) + L(g)_{22(-0)} \text{Cos}(-2M - 2w) + eL(g)_{22(1)} \text{Cos}(-M - 2w) \\
& + e^2 L(g)_{22(2)} \text{Cos}(-2w) \}
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Desta forma a função perturbadora será representada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} = & \mathbf{a}^2 \left[-\frac{3}{4} \text{Sen}^2(\mathbf{i}) \right] \mathbf{A}_{20} \left\{ \mathbf{e}^2 \mathbf{L}(\mathbf{g})_{22(-2)} \text{Cos}(4\mathbf{M} + 2\mathbf{w}) + \right. \\
& \mathbf{e} \mathbf{L}(\mathbf{g})_{22(-1)} \text{Cos}(3\mathbf{M} + 2\mathbf{w}) + \mathbf{L}(\mathbf{g})_{22(-0)} \text{Cos}(2\mathbf{M} + 2\mathbf{w}) + \mathbf{e} \mathbf{L}(\mathbf{g})_{22(1)} \\
& \left. \text{Cos}(\mathbf{M} + 2\mathbf{w}) + \mathbf{e}^2 \mathbf{L}(\mathbf{g})_{22(2)} \text{Cos}(2\mathbf{w}) \right\} + \mathbf{a}^2 \left[-\frac{1}{2} + 3 * \text{Cos}^2\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right) - 3 * \text{Cos}^4\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right) \right] \quad (6.32) \\
& \mathbf{A}_{20} \left\{ \mathbf{e}^2 \mathbf{L}(\mathbf{g})_{21(-2)} \text{Cos}(2\mathbf{M}) + \mathbf{e} \mathbf{L}(\mathbf{g})_{21(-1)} \text{Cos}(\mathbf{M}) + \mathbf{L}(\mathbf{g})_{21(-0)} + \mathbf{e} \mathbf{L}(\mathbf{g})_{21(1)} \right. \\
& \left. \text{Cos}(\mathbf{M}) + \mathbf{e}^2 \mathbf{L}(\mathbf{g})_{21(2)} \text{Cos}(2\mathbf{M}) \right\}
\end{aligned}$$

A seguir, nossa tarefa será representar a Equação 6.32 em variáveis não-singulares (ver Apêndice D). Assim teremos:

$$\mathbf{e} \text{Cos}(\mathbf{M}) = \mathbf{x} \text{Cos}(\mathbf{l}) + \mathbf{h} \text{Sen}(\mathbf{l})$$

$$\mathbf{e}^2 \text{Cos}(2\mathbf{M}) = (\mathbf{x}^2 - \mathbf{h}^2)(\text{Cos}^2(\mathbf{l}) - \text{Sen}^2(\mathbf{l})) + 4\mathbf{x} \mathbf{h} \text{Cos}(\mathbf{l}) \text{Sen}(\mathbf{l})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^2 \text{Sen}^2(\mathbf{i}) \text{Cos}(2\mathbf{w}) = & 4(1 - \mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2)(\mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2) [\text{Cos}^2(\mathbf{l})[(\mathbf{x}^2 - \mathbf{h}^2) \\
& \text{Cos}^2(\mathbf{l}) + (\mathbf{h}^2 - \mathbf{x}^2) \text{Sen}^2(\mathbf{l}) + 4\mathbf{x} \mathbf{h} \text{Cos}(\mathbf{l}) \text{Sen}(\mathbf{l})] + \text{Sen}^2(\mathbf{l}) [(-\mathbf{x}^2 + \\
& \mathbf{h}^2) \text{Cos}^2(\mathbf{l}) + (-\mathbf{h}^2 + \mathbf{x}^2) \text{Sen}^2(\mathbf{l}) - 4\mathbf{x} \mathbf{h} \text{Cos}(\mathbf{l}) \text{Sen}(\mathbf{l})] + 4\text{Sen}(\mathbf{l}) \\
& \text{Cos}(\mathbf{l}) [(\mathbf{x}^2 - \mathbf{h}^2) \text{Cos}(\mathbf{l}) \text{Sen}(\mathbf{l}) - \mathbf{x} \mathbf{h} \text{Cos}^2(\mathbf{l}) + \mathbf{x} \mathbf{h} \text{Sen}^2(\mathbf{l})]] + 16(1 - \\
& \mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2) \mathbf{P} \mathbf{Q} [(\mathbf{x}^2 - \mathbf{h}^2) \text{Cos}^3(\mathbf{l}) \text{Sen}(\mathbf{l}) - (\mathbf{x}^2 - \mathbf{h}^2) \text{Sen}^3(\mathbf{l}) \text{Cos}(\mathbf{l}) + \\
& 4\mathbf{x} \mathbf{h} \text{Cos}^2(\mathbf{l}) \text{Sen}^2(\mathbf{l}) + \text{Sen}^2(\mathbf{l}) [(\mathbf{x}^2 - \mathbf{h}^2) \text{Cos}(\mathbf{l}) \text{Sen}(\mathbf{l}) + \mathbf{x} \mathbf{h} \\
& \text{Sen}^2(\mathbf{l}) - \mathbf{x} \mathbf{h} \text{Cos}^2(\mathbf{l})] - \text{Cos}^2(\mathbf{l}) [(\mathbf{x}^2 - \mathbf{h}^2) \text{Cos}^3(\mathbf{l}) \text{Sen}(\mathbf{l}) + \mathbf{x} \mathbf{h} \\
& \text{Sen}^2(\mathbf{l}) - \mathbf{x} \mathbf{h} \text{Cos}^2(\mathbf{l})]]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} \text{Sen}^2(\mathbf{i}) \text{Cos}(\mathbf{M} + 2\mathbf{w}) = & 4(1 - \mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2)(\mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2)(\mathbf{x} \text{Cos}(\mathbf{l}) - \mathbf{h} \text{Sen}(\mathbf{l})) + \\
& 8(1 - \mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2) \mathbf{P} \mathbf{Q} (\mathbf{x} \text{Sen}(\mathbf{l}) + \mathbf{h} \text{Cos}(\mathbf{l}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sen}^2(\mathbf{i}) \text{Cos}(2\mathbf{M} + 2\mathbf{w}) = & 4(1 - \mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2)(\mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2)(\text{Cos}^2(\mathbf{l}) - \text{Sen}^2(\mathbf{l})) + \\
& 16 \text{Cos}(\mathbf{l}) \text{Sen}(\mathbf{l}) \mathbf{P} \mathbf{Q} (1 - \mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} \text{Sen}^2(\mathbf{i}) \text{Cos}(3\mathbf{M} + 2\mathbf{w}) = & 4(\mathbf{h} \text{Sen}(3\mathbf{l}) + \mathbf{x} \text{Cos}(3\mathbf{l})) (1 - \mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2)(\mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2) \quad (6.33) \\
& + 8(1 - \mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2) \mathbf{P} \mathbf{Q} (\mathbf{x} \text{Sen}(3\mathbf{l}) - \mathbf{h} \text{Cos}(3\mathbf{l}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^2 \text{Sen}^2(\mathbf{i}) \text{Cos}(4\mathbf{M} + 2\mathbf{w}) = & 4(1 - \mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2)(\mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2) [(\mathbf{x}^2 - \mathbf{h}^2) \text{Cos}(4\mathbf{l}) + \\
& 2\mathbf{h} \mathbf{x} \text{Sen}(4\mathbf{l})] + 8\mathbf{P} \mathbf{Q} (1 - \mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2) [(\mathbf{x}^2 - \mathbf{h}^2) \text{Sen}(4\mathbf{l}) - 2\mathbf{h} \mathbf{x} \text{Cos}(4\mathbf{l})]
\end{aligned}$$

Seguindo com o objetivo do trabalho faremos a eliminação das variáveis de curto período nos elementos não-singulares. Lembremos que $l = M + W + w$, o que implica que a eliminação das variáveis de curto período nos elementos não-singulares devem ser feitas em função de l . Sendo assim, a expressão do cálculo da média será:

$$\langle G \rangle = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \dot{G} dl \quad (6.34)$$

Da Equação 6.33 e considerando o cálculo da média temos:

$$\begin{aligned} \langle G_1 \rangle &= \langle \text{Sen}(l) \rangle = 0 \\ \langle G_2 \rangle &= \langle \text{Sen}(2l) \rangle = 0 \\ \langle G_3 \rangle &= \langle \text{Sen}(3l) \rangle = 0 \\ \langle G_4 \rangle &= \langle \text{Sen}(4l) \rangle = 0 \\ \langle G_5 \rangle &= \langle \text{Cos}(l) \rangle = 0 \\ \langle G_6 \rangle &= \langle \text{Cos}(2l) \rangle = 0 \\ \langle G_7 \rangle &= \langle \text{Cos}(3l) \rangle = 0 \\ \langle G_8 \rangle &= \langle \text{Cos}(4l) \rangle = 0 \\ \langle G_9 \rangle &= \langle \text{Cos}^4(l) \rangle = \frac{3}{8} \\ \langle G_{10} \rangle &= \langle \text{Sen}^4(l) \rangle = \frac{3}{8} \\ \langle G_{11} \rangle &= \langle \text{Sen}^2(l) \text{Cos}^2(l) \rangle = \frac{1}{8} \\ \langle G_{12} \rangle &= \langle \text{Sen}(l) \text{Cos}^3(l) \rangle = 0 \\ \langle G_{13} \rangle &= \langle \text{Cos}(l) \text{Sen}^3(l) \rangle = 0 \\ \langle G_{14} \rangle &= \langle \text{Cos}^2(l) \rangle = \frac{1}{2} \\ \langle G_{15} \rangle &= \langle \text{Sen}^2(l) \rangle = \frac{1}{2} \\ \langle G_{16} \rangle &= \langle \text{Cos}(l) \text{Sen}(l) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Levando os termos dados pela Equação (6.35) a Equação (6.32) e após algumas operações algébricas temos:

$$\langle \mathbf{R} \rangle = \mathbf{a}^2 \left(-\frac{3}{4}\right) \mathbf{A}_{20}' \{ \mathbf{L}(g)_{22(2)} [4(1 - \mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2)(\mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2)(x^2 - h^2) + 16(1 - \mathbf{P}^2 - \mathbf{Q}^2)\mathbf{P}\mathbf{Q}xh] \} + \mathbf{a}^2 \mathbf{A}_{20}' \left(-\frac{1}{2} + 3 * \text{Cos}^2\left(\frac{i}{2}\right) - 3 * \text{Cos}^4\left(\frac{i}{2}\right)\right) \{ \mathbf{L}(g)_{21(-0)} \} \quad (6.36)$$

TABELA 6.3 - VALORES PARA $L_{pq}(g)$

| ℓ | p | q | ℓ | p | q | $L_{pq}(g)$ |
|--------|-----|-----|--------|-----|-----|-------------------------|
| 2 | 0 | -2 | 2 | 2 | 2 | 5/2 |
| 2 | 0 | -1 | 2 | 2 | 1 | -3+39e ² /24 |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 1-5e ² /2 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | -1 | 1-19e ² /8+ |
| 2 | 0 | 2 | 2 | 2 | -2 | 1-5e ² /2 |
| 2 | 1 | -2 | 2 | 1 | 2 | -1/4+e ² /12 |
| 2 | 1 | -1 | 2 | 1 | 1 | -1+e ² /8 |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1+3e ² /2 |

Adaptada de Giacaglia, 1977, página 211.

Os termos $L_{pq}(g)$ são funções de $g = \sqrt{1 - e^2}$. Da Tabela 6.3 temos:

$$L_{22(2)}(g) = \frac{5}{2} \quad (6.37)$$

$$L_{21(0)}(g) = 1 + \frac{3e^2}{2} = 1 + \frac{3(x^2 + h^2)}{2} \quad (6.38)$$

Levando as Equações 6.70 e 6.71 até 6.69 temos:

$$\begin{aligned} \langle R \rangle = & a^2 \left(-\frac{15}{2}\right) A_{20}' (1 - P^2 - Q^2) \{ (P^2 - Q^2)(x^2 - h^2) + 4PQxh \} + \\ & a^2 A_{20}' \left(-\frac{1}{2} + 3(1 - P^2 - Q^2) - 3(1 - P^2 - Q^2)^2\right) \left\{ 1 + \frac{3(x^2 + h^2)}{2} \right\} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Da Equação 6.19 temos que: $A'_{20} = m'n'^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) (3S\text{end}'^2 - 1)$,

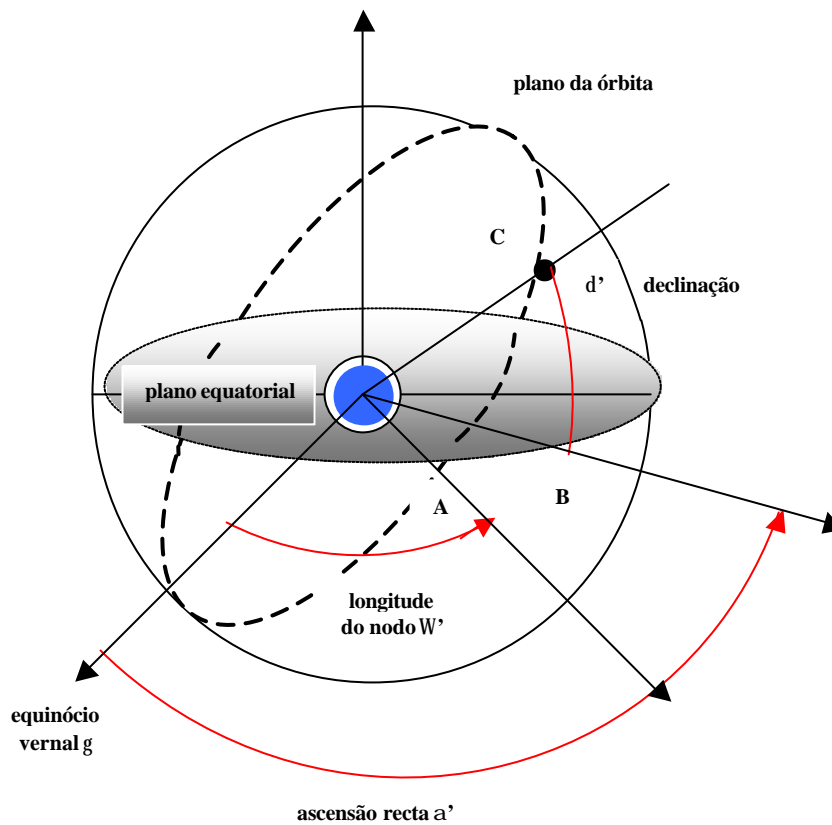


Fig. 6.1 – Posição do corpo perturbador na esfera celeste e sua relação com os elementos orbitais.

Considerando a Figura 6.1 nosso objetivo será encontrar uma relação entre as coordenadas geocêntricas equatoriais e os elementos orbitais. Para isso trabalharemos no triângulo esférico ABC cujos lados e ângulos são mostrados na Figura 6.1.

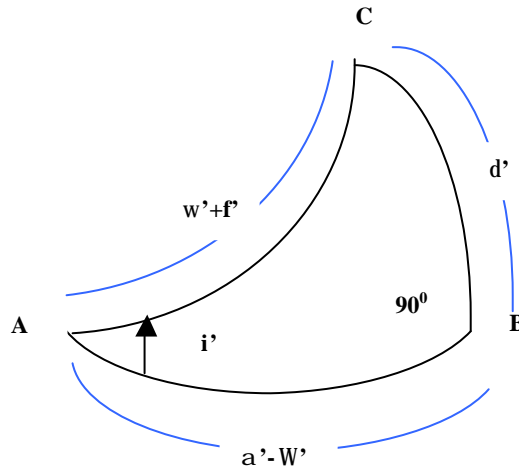


Fig. 6.2 – Triângulo esférico (relaciona as coordenadas equatoriais e os elementos orbitais).

Das Figuras 6.1 e 6.2 pode-se distinguir que o arco AB contém a longitude do nodo e a ascensão reta. Além disso, esse arco se encontra sob o plano equatorial ou equador celeste. O arco CB subtende a declinação e está sob o meridiano celeste que contém o corpo perturbador. Pela teoria de triângulos esféricos sabemos que o meridiano celeste é perpendicular ao equador celeste.

O segmento AB está sob o plano da órbita e dado que o ponto A está na interseção do plano orbital com o equador, é chamado de nodo ascendente (para uma órbita ascendente ou direta). Isso nos permite dizer que esse arco, que vai desde o nodo até a posição do corpo perturbador, está formado pelo argumento do perigeu e a anomalia verdadeira. Da lei de senos temos:

$$\frac{\text{Sen}(w'+f')}{\text{Sen}(90^\circ)} = \frac{\text{Sen}(d')}{\text{Sen}(i')} \quad (6.40)$$

Considerando que o corpo perturbador está numa órbita circular, temos que $\mathbf{f}' = \mathbf{M}' = \mathbf{E}'$. O argumento do perigeu não está determinado, sendo possível considerar um valor igual a zero sem perda de generalidade. Desta forma, a Equação 6.40 ficará:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Sen}(\mathbf{i}')\text{Sen}(\mathbf{M}')}{\text{Sen}(90^\circ)} &= \text{Sen}(\mathbf{d}') \\ \text{Sen}(\mathbf{i}')\text{Sen}(\mathbf{M}') &= \text{Sen}(\mathbf{d}') \\ \text{Sen}(\mathbf{i}')\text{Sen}(\mathbf{MOP} + \mathbf{n}'\mathbf{t}) &= \text{Sen}(\mathbf{d}') \end{aligned} \quad (6.41)$$

Levando a Equação 6.19 teremos finalmente:

$$\mathbf{A}'_{20} = \mathbf{m}'\mathbf{n}'^2 \left(\frac{\mathbf{a}'}{\mathbf{r}'}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) (3[\text{Sen}(\mathbf{i}')\text{Sen}(\mathbf{MOP} + \mathbf{n}'\mathbf{t})]^2 - 1) \quad (6.42)$$

6.3 SIMULAÇÕES

Considerando as equações encontradas nas variáveis não-singulares (expandidas até a segunda ordem na excentricidade), serão simulados diversos casos, especialmente para as órbitas chamadas equatoriais ($\mathbf{i} = \mathbf{0}$) e as chamadas órbitas circulares ($\mathbf{e} = \mathbf{0}$).

Assim sendo, faremos uma breve análise das órbitas quase circulares e quase equatoriais e das órbitas circulares e equatoriais. Seguindo as análises anteriores, estudaremos satélites posicionados com semi-eixo maior de 0.110 e de 0.070 unidades canônicas de comprimento. No desenvolvimento das equações foi considerado como corpo perturbador a Lua. É possível fazer um desenvolvimento para a perturbação do Sol, o qual não foi feito no presente trabalho.

6.3.1 ÓRBITAS EQUATORIAIS

6.3.1.1 Simulação da Perturbação da Lua para $a = 0.07$

No estudo da perturbação do terceiro corpo, para órbitas equatoriais, temos que a excentricidade permanece constante para a escala do tempo mostrada (Figura 6.3). Mesmo se realizarmos o estudo para as diversas excentricidades apresentadas, veremos que existe uma pequena variação, permanecendo a órbita quase circular. Pela escala de tempo utilizada só observamos uma reta na Figura 6.3.

Considerando as pequenas variações da excentricidade é possível fazer um estudo das variações dos raios do perigeu e do apogeu, os quais também permanecem constantes.

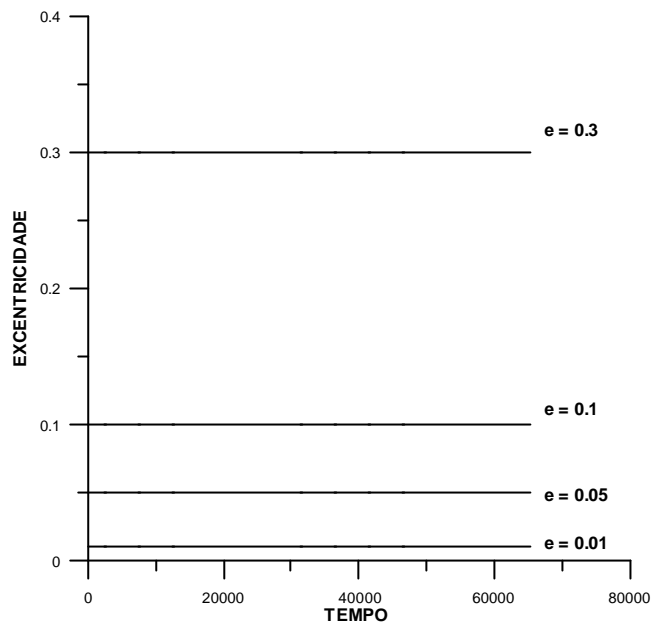


Fig. 6.3 – Evolução temporal da excentricidade para órbitas equatoriais com $a = 0.07$.

6.3.1.2 Simulação da Perturbação da Lua para $a = 0.110$

Na análise de órbitas com um semi-eixo maior de 0.110 unidades canônicas de comprimento, observamos que a Figura 6.4 apresenta o mesmo comportamento estudado anteriormente. Lembrando sempre que, pela escala de tempo utilizada, as variações ao longo do tempo são representadas por linhas retas.

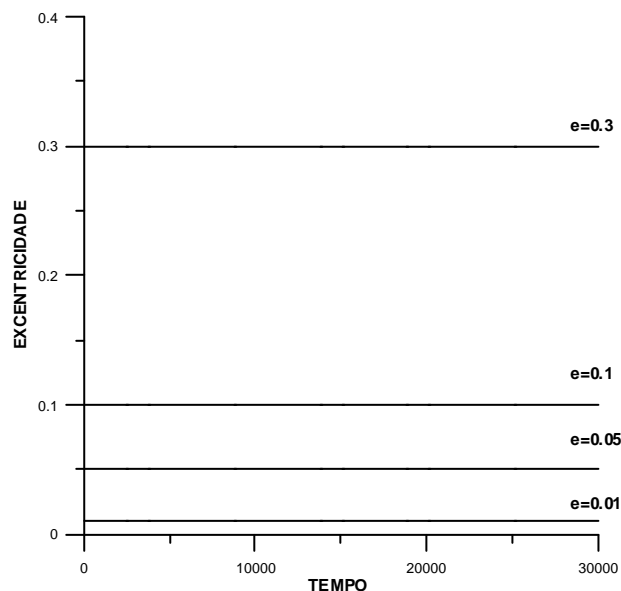


Fig. 6.4 – Evolução temporal da excentricidade para órbitas equatoriais com $a = 0.110$.

6.3.2 ÓRBITAS CIRCULARES

No estudo das órbitas circulares, as diversas figuras obtidas são apenas para referência. Este fato é devido a sensibilidade na inclinação, que é uma consequência da mudança de variáveis. Além disso, os valores encontrados para a inclinação são extremadamente pequenos, ou seja, dependendo da precisão desejada os gráficos experimentam certas mudanças. Desta forma os testes foram realizados para diversos valores da inclinação inicial.

6.3.2.1 Simulação da Perturbação da Lua para uma Órbita Circular com $a = 0.07$

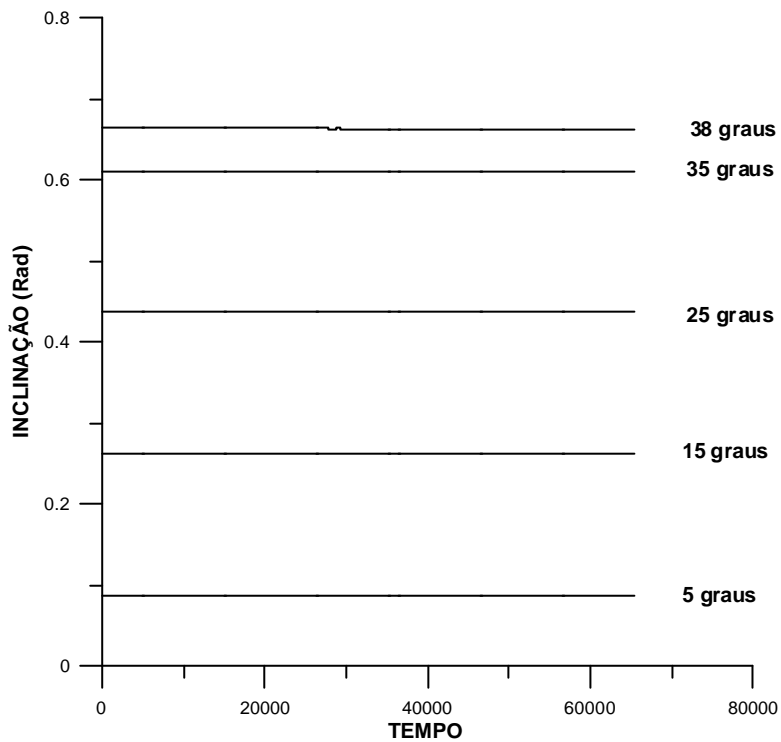


Fig. 6.5 - Evolução da inclinação para $a = 0.07$ e $i(0) \leq i_c$.

Estudando o caso de um satélite posicionado com um semi-eixo maior de 0,07 unidades canônicas de comprimento, a evolução da inclinação ao longo do tempo esta representada por linhas retas (Figura 6.5).

No caso de inclinações maiores, existe um comportamento constante ao longo do tempo (ver Figura 6.6 que é uma consequência da escala utilizada).

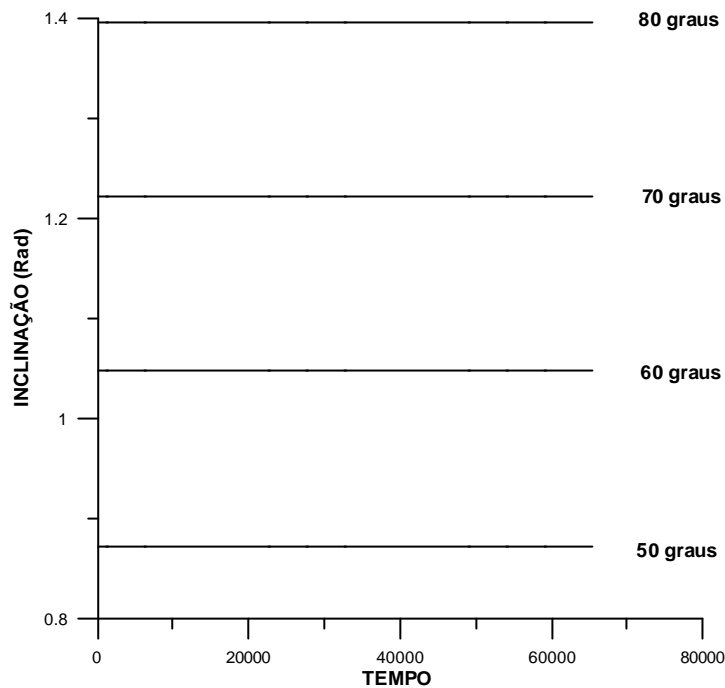


Fig. 6.6 - Evolução da inclinação para $a = 0.07$ e $i(0) > i_c$.

6.3.2.2 Simulação da Perturbação da Lua para uma Órbita Circular com $a = 0.110$

Para o caso de um satélite posicionado com um semi-eixo maior de 0.110, existe um comportamento similar ao analisado anteriormente. Desta forma, a evolução da inclinação ao longo do tempo permanece constante para a escala considerada, tanto para as órbitas em que $i(0) \leq i_c$ como também para o caso $i(0) > i_c$, (Figura 6.7).

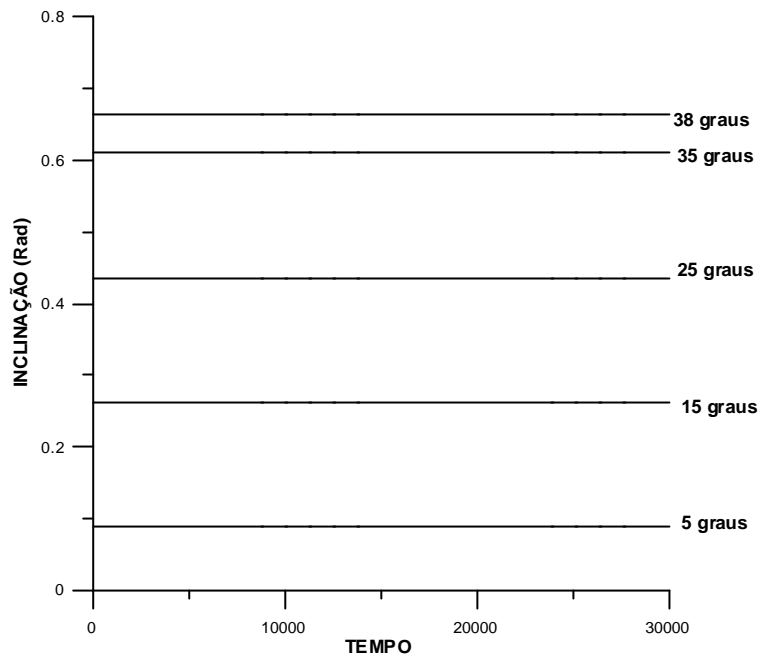


Fig. 6.7 - Evolução da inclinação para $a = 0.110$ e $i(0) \leq i_c$.

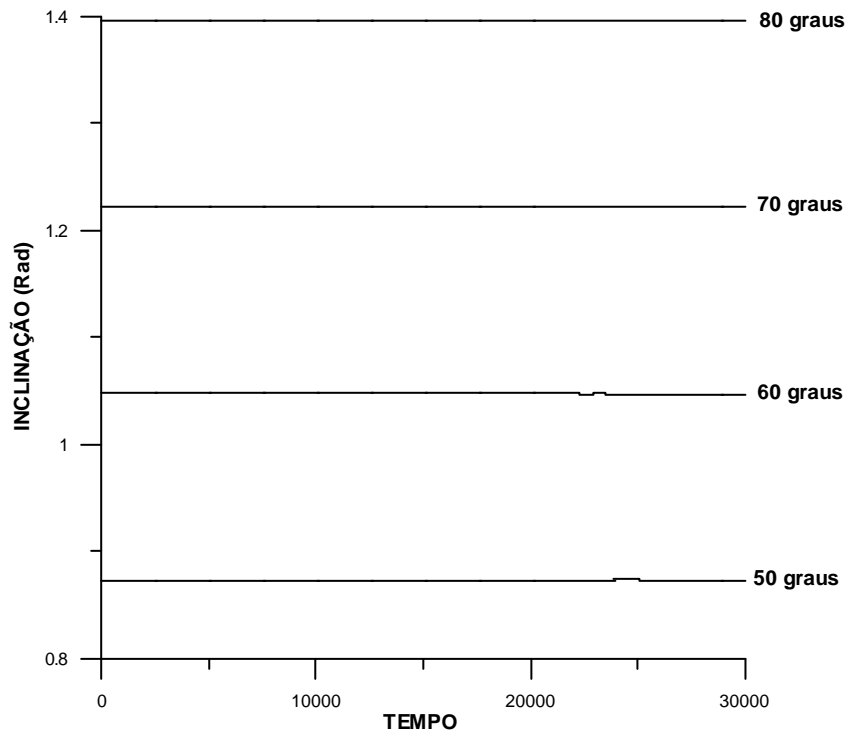


Fig. 6.8 - Evolução da inclinação para $a = 0.110$ e $i(0) > i_c$.

6.3.3 ÓRBITAS QUASE-EQUATORIAIS E QUASE-CIRCULARES

Para o caso das órbitas quase equatoriais e circulares realizamos os testes considerando $i(0) = 5$ graus e variando a excentricidade. As Figuras 6.17 e 6.18 são simulações feitas para um semi-eixo maior de 0.07 unidades canônicas de comprimento. Analisando a evolução da inclinação para diversos valores da excentricidade, observamos (Figura 6.9) que no intervalo de $0.01 \leq e \leq 0.1$ a inclinação apresenta uma pequena oscilação, embora conforme a excentricidade aumente o efeito na variação da inclinação também aumente. Assim sendo, no caso das órbitas elípticas $e(0) = 0.3$, a inclinação tem uma amplitude de 1.04679 graus.

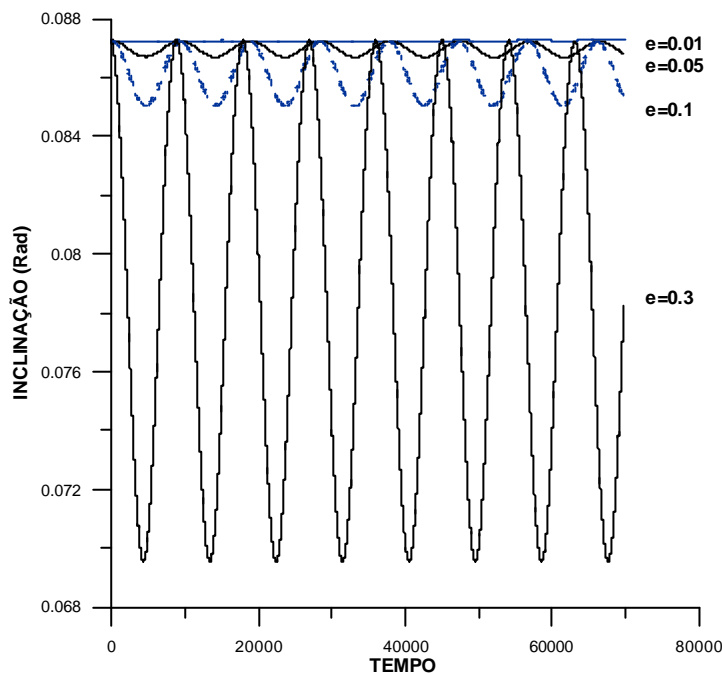


Fig. 6.9 - Evolução da inclinação com a variação da excentricidade para órbitas quase equatoriais $a = 0.07$.

Outra característica é que a medida que a excentricidade aumenta, o tempo para atingir o ponto mínimo da oscilação é maior. No caso da evolução da excentricidade (Figura 6.10) para a escala de tempo utilizada não existem grandes oscilações.

Para um satélite posicionado num semi-eixo maior de 0.110 unidades canônicas de comprimento, a evolução da inclinação e a variação da excentricidade apresentam grandes oscilações para elevados valores da excentricidade. Assim sendo, o tempo para atingir o ponto mínimo da inclinação também diminui (Figura 6.11). Isto nos permite dizer que existem oscilações rápidas.

A evolução da excentricidade para diversos valores de $e(0)$ mostra pequenas oscilações para os pequenos valores da excentricidade, embora para as órbitas elípticas existam grandes amplitudes. Uma particularidade dessas órbitas (Figura 6.12) é o comportamento cíclico, ou seja, quando as excentricidades atingem seu valor mínimo a inclinação atinge seu valor máximo e vice-versa.

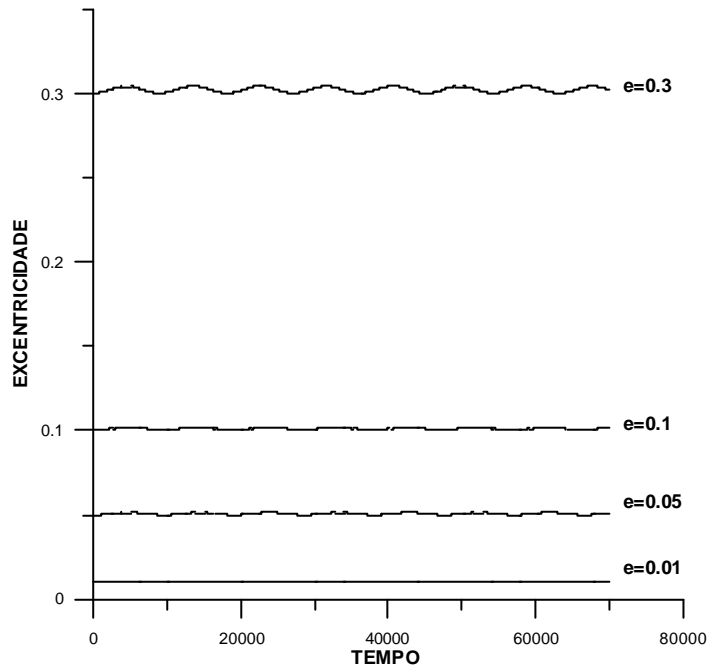


Fig. 6.10 - Evolução da excentricidade para uma órbita quase equatorial com $a = 0.07$.

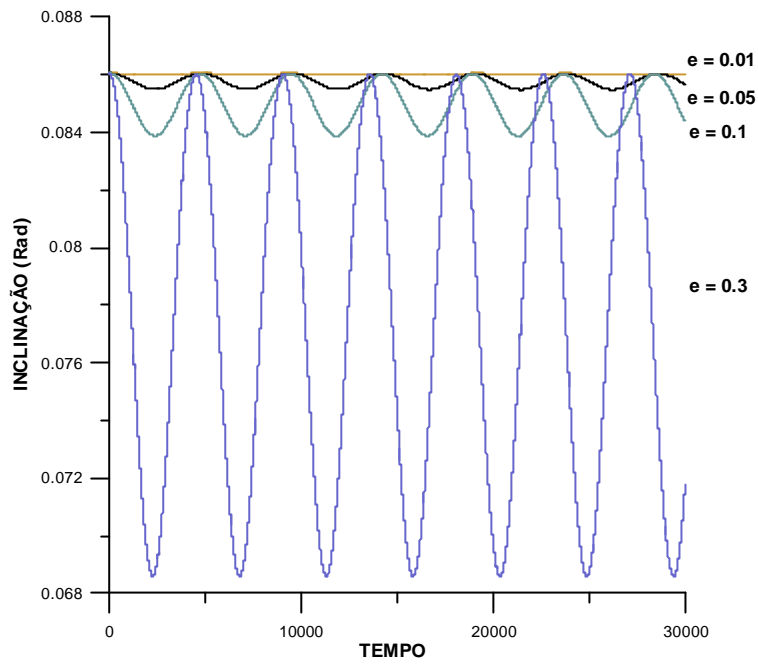


Fig. 6.11 - Evolução da inclinação com a variação da excentricidade para órbitas quase equatoriais com $a = 0.110$.

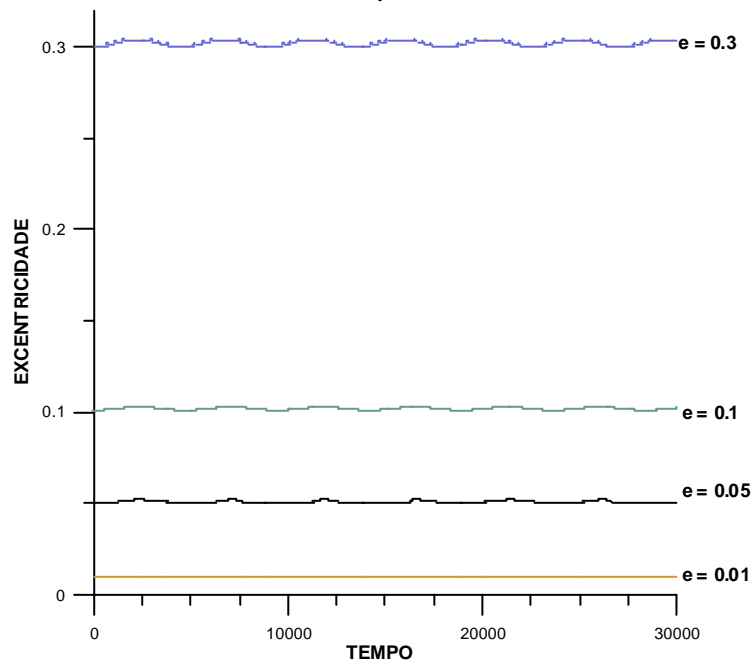


Fig. 6.12 - Evolução da excentricidade para uma órbita quase equatorial com $a = 0.110$.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

7.1 CONCLUSÕES GERAIS

Esta dissertação estuda o problema de perturbação do terceiro corpo com modelos de média simples. Com esse método estudamos a perturbação da Lua em um satélite artificial e posteriormente analisamos os efeitos do Sol num satélite artificial. Depois do estudo de forma separada, juntamos os efeitos da perturbação luni-solar e aplicamos em um veículo espacial. Devido à presença de certos valores singulares no desenvolvimento das equações de movimento representadas nas equações de Lagrange, fazemos uma mudança de variáveis chegando as chamadas variáveis não-singulares, com as quais estudamos alguns casos especiais, principalmente as chamadas órbitas equatoriais e as órbitas circulares.

A seguir faremos uma análise geral dos resultados obtidos neste trabalho.

O fato de trabalhar com a função perturbadora expandida em polinômios de Legendre até a quarta ordem, possibilita estudar os efeitos da perturbação para valores maiores do semi-eixo maior e da excentricidade. O modelo de médias simples mostra que a evolução ao longo do tempo da inclinação, para valores da inclinação inicial menores que a inclinação crítica, estão formados por linhas retas, embora quando simuladas em uma escala diferente, mostre diferentes curvas. Este mesmos gráficos, quando são representados no modelo de médias duplas, seriam formados apenas por linhas constantes.

Na análise de órbitas com inclinações iniciais maiores que o valor crítico, as curvas encontradas nos permitem dizer que, conforme o valor inicial da inclinação aumenta, mais rapidamente atingem o valor crítico. Além disso, realizando uma comparação com

outros gráficos, nota-se que para valores elevados do semi-eixo maior a inclinação atinge rapidamente o valor crítico, continuando numa evolução oscilatória sem fim.

A excentricidade para o modelo de médias simples mostra curvas oscilantes, as quais aumentam a amplitude conforme a inclinação inicial aumenta. De forma análoga ao comportamento da excentricidade, podemos representar essas evoluções numa escala de tempo menor, encontrando diferenças entre os modelos aplicados, notando que quando o semi-eixo maior apresenta valores elevados, a excentricidade sofre oscilações mais rápidas. Isso está relacionado ao comportamento da inclinação.

A evolução do argumento do perigeu é secular, mas conforme a inclinação inicial aumenta, ela apresenta um comportamento secular e oscilatório. Para os casos nos quais a inclinação inicial é maior que o valor crítico, além do comportamento secular e oscilatório elas evoluem rapidamente conforme o semi-eixo maior tem um valor maior. Além disso, para valores da inclinação inicial menores que o valor crítico, vai de um máximo a um mínimo e, quando a inclinação inicial é maior que o valor crítico, vai de um mínimo a um máximo.

Devido a evolução temporal da inclinação para valores iniciais maiores que o valor crítico, a evolução do argumento do perigeu mostra grandes oscilações, além do comportamento secular.

No caso da longitude do nodo, de forma análoga, para valores elevados do semi-eixo maior, mostra um rápido comportamento retrógrado. Devido à dependência das equações com a inclinação, as regiões oscilantes são representativas da situação na qual a inclinação inicial aumenta. A figura 4.36 é uma boa representação das diferenças entre os modelos de médias simples e duplas. Os resultados obtidos com médias duplas apresentam uma pequena oscilação, embora os resultados obtidos com médias simples mostrem uma região onde estão contidas as oscilações. Porém, quando são representadas numa escala de tempo menor, claramente se observam as diferenças.

As simulações efetuadas para as órbitas retrógradas nos permite encontrar o efeito espelho, ou inversão das figuras obtidas para as órbitas diretas. Desta forma, uma vez atingida a máxima amplitude da excentricidade para uma inclinação inicial de 90 graus, estas amplitudes começam a diminuir, até que para valores próximos de 180 graus sejam representadas por linhas constantes. Uma característica adicional é o comportamento da longitude do nodo, o qual apresenta uma variação positiva.

O argumento do perigeu vai mostrando seu comportamento secular e oscilatório desde os valores da inclinação inicial dados pelas órbitas polares até os valores próximos do suplemento do valor crítico. Na região acima dos valores críticos, eles evoluem de forma secular para longos períodos de tempo.

A longitude do nodo para as órbitas diretas sofrem um movimento de regressão, o qual vai de leste a oeste, embora para as órbitas retrógradas sofram uma variação que vai de oeste a leste (sentido positivo). De forma análoga, as órbitas polares até os valores próximos da inclinação crítica experimentam um comportamento secular e oscilatório. Desta forma, uma vez atingido o suplemento do valor crítico existe um comportamento secular. Isso tem relação com o comportamento da excentricidade e da inclinação ao longo do tempo. Observamos que a inclinação mostra grandes amplitudes desde os valores iniciais polares até os valores próximos do suplemento do valor crítico. Depois disso evolui de forma constante.

Neste ponto devemos dizer que as variações que experimentam as excentricidades das órbitas são estudadas simplesmente do ponto de vista matemático. Ao realizar uma análise física, encontramos que as grandes oscilações da excentricidade fazem que as órbitas inicialmente quase circulares cheguem a ser elípticas, assumindo valores próximos de 1. Isso indica que estas órbitas são parabólicas, o qual traz como consequência que o semi-eixo maior seja indefinido. Porém, as grandes oscilações que experimentam as excentricidades afetam o tempo de vida dos satélites. Um aspecto complementar relativo às grandes amplitudes que experimentam os elementos orbitais e de forma específica da excentricidade, está em Callegari e Yokoyama (2001), os quais

fazem o estudo de algumas regiões do espaço de fase onde a estabilidade para longos períodos dos satélites artificiais não é possível.

Fazendo uma comparação entre o modelo dado pela expansão da função perturbadora em termos dos polinômios de Legendre até a quarta ordem e o tratamento do problema do ponto de vista do problema restrito dos três corpos, encontramos que a precisão de nosso modelo decresce com o tempo. Assim sendo, para valores elevados do semi-eixo maior e da excentricidade estas diferenças sofrem acréscimos. Estas conclusões foram obtidas ao comparar a Figura 7.1 com os resultados obtidos para o problema restrito dos três corpos (Prado 2002a).

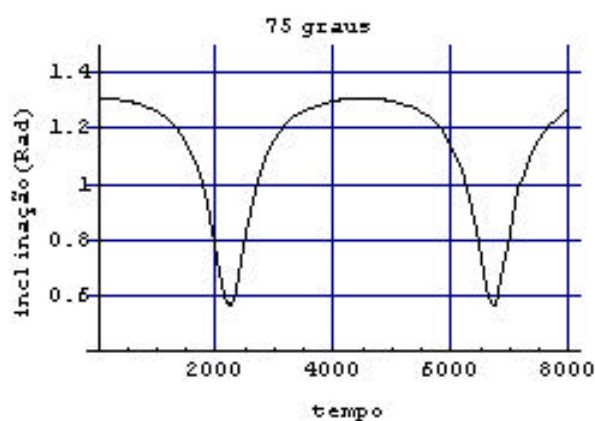


Fig. 7.1 – Evolução temporal da inclinação para $i(0) = 75$ graus.

No caso do estudo das singularidades, devido à expansão da função perturbadora em variáveis não-singulares até a segunda ordem na excentricidade, as simulações nos permitem obter ótimos resultados num certo intervalo. Porém, para valores elevados perde-se precisão no desenvolvimento.

Devido a perda de precisão para valores elevados da excentricidade, consideramos que o valor de 0.3 tem pouca precisão na evolução dos seus elementos orbitais.

Os resultados obtidos mediante o modelo de médias simples nos permitem verificar a sua precisão. Assim sendo o modelo de dupla média com expansão da função perturbadora em polinômios de Legendre até a segunda ordem diz que uma órbita equatorial deve permanecer com inclinação nula e excentricidade constante. O modelo sem truncamento dado pelo problema restrito dos três corpos mostra que as órbitas permanecem equatoriais, mas a excentricidade não fica constante (Prado, 2002a).

Além disso, no caso das órbitas circulares, o modelo de dupla média com expansão da função perturbadora em polinômios de Legendre até a quarta ordem afirma que as órbitas inicialmente circulares permanecem circulares e com inclinação constante. Porém, um modelo completo sem truncamento (problema restrito dos três corpos), mostra que tanto a inclinação como a excentricidade não permanecem constantes.

As integrações numéricas foram efetuadas utilizando o método de múltiplos passos e empregando o método do predictor-corrector, e de forma específica o método de Adams-Gear.

7.2 PROPOSTA PARA PESQUISAS FUTURAS

Considerando o trabalho desenvolvido na presente dissertação propomos as propostas de pesquisas mostradas abaixo:

- 1.) Considerando o modelo desenvolvido, fazer o desenvolvimento da função perturbadora considerando que o corpo perturbador está numa órbita elíptica.
- 2.) Com o objetivo de obter uma melhor estimativa do comportamento das órbitas equatoriais e circulares mediante o modelo de médias, realizar uma maior expansão da função perturbadora em termos da excentricidade, pelo menos até a quarta ordem, para pesquisar as contribuições dos termos de ordens maiores.
- 3.) Considerando os efeitos do corpo perturbador no satélite, podemos analisar o tempo de vida dos satélites para cada um dos casos estudados, considerando que a vida dos satélites termina quando sua altitude do perigeu entra na atmosfera terrestre.
- 4.) Nossa análise foi feita considerando o satélite com um corpo puntual. Ao considerar a massa como sendo distribuída podemos analisar a influência do corpo perturbador na estabilidade do satélite, ou seja ver os efeitos dos torques sobre a estabilidade do satélite isto do ponto de vista da atitude.
- 5.) Ampliar a análise ao estudo das órbitas ressonantes estudando, sua influência nos elementos orbitais.
- 6.) Determinar a possibilidade de encontrar a esfera de influência da Lua, na qual é possível a captura gravitacional de satélites posicionados a grandes altitudes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blitzer, L. Lunar-solar perturbations of Earth satellite. **American Journal of Physics**, v. 27, p. 634-645, 1959.

Breiter, S. Lunisolar apsidal resonances at low satellite orbits. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 74, p. 253-274, 1999.

Broucke, R. A. **The double averaging of the third body perturbations**. Austin–Texas University-USA 1992. Classnotes.

Callegari, N.; Yokoyoma, T. Some aspects of the dynamics of fictitious Earth's satellites. **Planetary and Space Science**, n. 49, p. 35-46, 2001.

Cok, D. On the perturbations of a close-earth satellite due to lunar inequalities. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 16, p. 459–479, 1978.

Cook, G. E. Luni-solar perturbations of the orbit of an earth satellite. **The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society**, v. 6, n. 3, p. 271–291, Apr. 1962.

Costa, I. V. **Efeitos da perturbação de terceiro corpo em um satélite artificial da Terra**. São José dos Campos. 158 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais)–Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1998.

Danby, J. M. A. **Fundamentals of celestial mechanics**. 2. ed. Virginia: Willmann-Bell, 1989, 467 p.

D'avanzo, P.; Teofilatto, P.; Ulivieri, C. Long-term effects on lunar orbiter. **Acta Astronautica**, v. 40, n. 1, p. 13-20, 1997.

Delhaise, F.; Morbidelli, A. Luni-solar effects of geosynchronous orbits at the critical inclination. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 57, p. 155-173, 1993.

Fernandes, S. D. **Teoría das perturbações**: notas de aula dadas no Instituto Tecnológico de Aeronáutica. São José dos Campos, 1999.

Frick, R. H.; Garber, T. B. **Perturbations of synchronous satellites.**, May. 1962. (Rand Corp. Rept. R-399 NASA).

Giacaglia, G. E. O. **Lunar perturbations on artificial satellites of the earth.** Smithsonian Astrophysical Observatory, Oct. 1973. 59 p.(Special Report 352)

Giacaglia, G. E. O.; Murphy, J. P.; Felsentreger, T. L. A semi-analytical theory for the motion of a lunar satellite. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 3, p. 3-66, 1970.

Giacaglia, G. E. O. The equations de motion of an artificial satellite in nonsingular variables. **Celestial Mechanics**, v. 15, n. 2, p. 191-215, Mar. 1977.

Hough, M. E. Lunisolar perturbations. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 25, p. 111-136, 1981.

Kammel, A.; Tibbitts, R. Some useful results on initial node locations for near-equatorial circular satellite orbits. **Celestial Mechanics**, v. 8, p. 45-73, 1973.

Kaufman, B.; Alfriend, K. T.; Dasenbrock, R. R. Lunisolar perturbations in the extended phase space representation of the Vinti problem. **Acta Astronautica**, v. 5, p. 727-744, 1978.

Kaula, W.M. Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite. **The Astronomical Journal**, v. 67, n. 5, p. 300-303, June. 1962.

Kozai, Y. **On the effects of the Sun and Moon upon the motion of a close Earth satellite**. Smithsonian Inst. Astrophysical Observatory, 1959. (Special Report. 22).

Kozai, Y. **A new method to compute lunisolar perturbations in satellite motions**. Smithsonian Astrophysical Observatory, 1973. 27 p. (Special Report 349).

Lane, M. T. On analytic modeling of lunar perturbations of artificial satellites of the earth. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 46, p. 287-305, 1989.

Martyenko, B. K. Luni-solar perturbations of a 24 hr Satellite. **Bulletin Institut Teoretishekoi Astronomii**, v. 11, p. 33-47, 1967.

Moe, M. M. Solar-Lunar Perturbation of the orbit of an Earth satellite. **ARS Journal**, v. 30, p. 485-487, May 1960.

Musen, P. On the long-period lunar and solar effect on the motion of an artificial satellite. **Journal of Geophysical Research**, v. 66, n. 6, p. 1659-1665, 1961.

Musen, P. A discussion of Halphen's method of secular perturbations and its application to the determination of long-range effects in the motion of celestial bodies. **Reviews of Geophysics**, v. 1, n. 1, p. 85 - 121, Feb 1963.

Murray, C. D.; Dermott, S. F. **Solar system dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999, 592p.

Prado, A. F. B. A. Third-body perturbation in orbits around natural satellites, To be published in the **Journal of Guidance Control and Dynamics**, 2002a.

Prado, A. F. B. A fourth-order method for the third-body perturbation: Application to retrograde orbits, To be published in the **Advances in Space Dynamics**, v. 2, 2002b.

Richardson, D. L. The motion of 24-hour Satellites. **AIAA, Paper 76 - 828**, San Diego, Calif, 1976.

Sehnal, L. The stability of the 24 hr satellite. **Acta Astronautica**, v. 7, p. 445-454, 1961.

Spitzer, L. The stability of the 24 hr satellite. **J. Brit. Interplanetary. Soc.**, v. 9, p. 131, 1950.

Steichen, D. An averaging method to study the motion of lunar artificial satellites—Disturbing Function. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 68, p. 205-224, 1998.

Taff, L. G. **Celestial Mechanics**. New York: A wiley-interscience, 1985, 520p.

Vashkovjak, M. A. An approximate description of the evolution of the orbit of a stationary artificial Earth satellite. **Cosmic Research**, v. 11, p. 305-316, Nov. 1973.

Zee, C. H. **Theory of geostationary satellites**. Dordrecht-Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1989, 267p.

Zee, C. H. Effects of the Sun and the Moon on a near – equatorial synchronous satellite. **Acta Astronautica**, v. 17, p. 891–906, 1972.

APÊNDICES

APÊNDICE A

EXPANSÃO DA FUNÇÃO PERTURBADORA (Murray-Dermott, 1999)

A.1) Introdução.- Ao considerar o problema mais geral do movimento de um terceiro corpo sob os efeitos gravitacionais dos outros dois corpos para condições iniciais arbitrárias, pode-se fazer alguns estudos analisando as acelerações experimentadas pelos três corpos. Seus movimentos são dominados pelo corpo primário ou corpo central. As órbitas dos corpos secundários são seções cônicas com pequenos desvios devidos as suas perturbações orbitais mútuas. Nós consideraremos uma massa m_s , orbitando a massa primária m_o , onde os elementos orbitais da massa m_s são constantes (numa primeira aproximação). Além disso, os efeitos gravitacionais do corpo central podem ser tratados como provenientes de massas puntuais.

Ao inserir uma terceira massa m' a interação gravitacional entre as massas m_s e m' proporcionam acelerações em adição as acelerações entre os dois corpos devidos a m_o . Estas acelerações adicionais das massas secundárias relativas ao primário podem ser obtidas a partir do gradiente do potencial perturbador, também chamada função perturbadora

A.2) Função Perturbadora.- Sejam $\vec{R}_o, \vec{R}_s, \vec{R}'$, vetores posição, com respeito a origem fixa O dos três corpos de massas m_o, m_s, m' . Além disso, seja \vec{r}, \vec{r}' vetores posição das massas secundárias relativas ao primário, onde:

$$\begin{aligned} |\vec{r}| &= (\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z})^{1/2} \\ |\vec{r}'| &= (\mathbf{x}' + \mathbf{y}' + \mathbf{z}')^{1/2} \end{aligned} \tag{A.1}$$

O primário encontra-se na origem do sistema de coordenadas. Das leis de Newton do movimento e da lei da gravitação nós obtemos as equações de movimento das três massas no referencial inercial:

$$\mathbf{m}_0 \ddot{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{Gm}_0 \mathbf{m}_s \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r^3} + \mathbf{Gm}_0 \mathbf{m}' \frac{\bar{\mathbf{r}}'}{r'^3} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{m}_s \ddot{\mathbf{R}}_s = \mathbf{Gm}' \mathbf{m}_s \frac{\bar{\mathbf{r}}' - \bar{\mathbf{r}}}{|\bar{\mathbf{r}}' - \bar{\mathbf{r}}|^3} - \mathbf{Gm}_0 \mathbf{m}_s \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r^3} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{m}' \ddot{\mathbf{R}}' = \mathbf{Gm}' \mathbf{m}_s \frac{\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|^3} - \mathbf{Gm}_0 \mathbf{m}' \frac{\bar{\mathbf{r}}'}{r'^3} \quad (\text{A.4})$$

As acelerações dos corpos secundários relativos ao primário são determinados por:

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}} = \ddot{\mathbf{R}}_s - \ddot{\mathbf{R}}_0 \quad (\text{A.5})$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}}' = \ddot{\mathbf{R}}' - \ddot{\mathbf{R}}_0 \quad (\text{A.6})$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}} + \mathbf{G}(\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_s) \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r^3} = \mathbf{Gm}' \left\{ \frac{\bar{\mathbf{r}}' - \bar{\mathbf{r}}}{|\bar{\mathbf{r}}' - \bar{\mathbf{r}}|^3} - \frac{\bar{\mathbf{r}}'}{r'^3} \right\} \quad (\text{A.7})$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}}' + \mathbf{G}(\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}') \frac{\bar{\mathbf{r}}'}{r'^3} = \mathbf{Gm}_s \left\{ \frac{\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|^3} - \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r^3} \right\} \quad (\text{A.8})$$

As acelerações relativas podem ser escritas como o gradiente da função escalar:

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}} = \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{U} + \mathbf{R}) \quad (\text{A.9})$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}}' = \tilde{\mathbf{N}}'(\mathbf{U}' + \mathbf{R}') \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{G} \frac{(\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_s)}{\mathbf{r}} \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{U}' = \mathbf{G} \frac{(\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}')}{\mathbf{r}'} \quad (\text{A.12})$$

\mathbf{R} e \mathbf{R}' representam as partes do potencial total central ou de dois corpos, o gradiente é calculado com respeito as coordenadas das massas \mathbf{m}_s ou \mathbf{m}' . O termo \mathbf{R} no potencial é a função perturbadora, a qual representa o potencial que provém dos outros corpos.

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{Gm}'}{|\bar{\mathbf{r}}' - \bar{\mathbf{r}}|} - \mathbf{Gm}' \frac{\bar{\mathbf{r}}' \cdot \bar{\mathbf{r}}}{r'^3} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{R}' = \frac{\mathbf{Gm}_s}{|\bar{\mathbf{r}}' - \bar{\mathbf{r}}|} - \mathbf{Gm}_s \frac{\bar{\mathbf{r}}' \cdot \bar{\mathbf{r}}}{r'^3} \quad (\text{A.14})$$

Os termos dominantes nestas expressões são chamados de termos diretos, e os outros termos que provém da escolha da origem do sistema de coordenadas são chamados termos indiretos. Se a origem do sistema de coordenadas está no centro de massa, então estes termos indiretos desaparecem.

A análise anterior pode ser estendida para qualquer número de corpos, porém as acelerações associadas com a função perturbadora podem provir de qualquer outra fonte, não somente de forças gravitacionais de massas puntuais. Por exemplo, pode ser o potencial associado com o achatamento do corpo central. No presente trabalho o interesse é com o caso particular da interação de duas massas puntuais secundárias de massas \mathbf{m} e \mathbf{m}' e vetores posição $\bar{\mathbf{r}}$, $\bar{\mathbf{r}}'$, relativas a massa central, onde tem-se que $r' > r$. Desta forma, a equação de movimento do secundário interno é:

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}} + \mathbf{G}(\mathbf{m}_o + \mathbf{m}_s) \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r^3} = \mathbf{Gm}' \left\{ \frac{\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'}{|\bar{\mathbf{r}}' - \bar{\mathbf{r}}|^3} - \frac{\bar{\mathbf{r}}'}{r'^3} \right\} \quad (\text{A.15})$$

Sendo a função perturbadora dada por:

$$\mathbf{R} = m' \left\{ \frac{1}{|\bar{\mathbf{r}}' - \bar{\mathbf{r}}|} - \frac{\bar{\mathbf{r}}' \cdot \bar{\mathbf{r}}}{r'^3} \right\} \quad (\text{A.16})$$

Podemos encontrar expressões para o secundário externo:

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}}' + \mathbf{G}(\mathbf{m}_o + \mathbf{m}') \frac{\bar{\mathbf{r}}'}{r'^3} = \mathbf{Gm}_s \left\{ \frac{\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|^3} - \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r^3} \right\} \quad (\text{A.17})$$

Além da correspondente função perturbadora para o outro secundário.

$$\mathbf{R}' = m \left\{ \frac{1}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|} - \frac{\bar{\mathbf{r}}' \cdot \bar{\mathbf{r}}}{r^3} \right\} \quad (\text{A.18})$$

Embora esta não seja a forma mais direta de obter as expressões para \mathbf{R} e \mathbf{R}' , é uma forma importante e as expressões resultantes não são únicas.

A.3) Expansão utilizando os Polinômios de Legendre.- Considerando a configuração mostrada na Figura B.1, onde $\bar{\mathbf{r}}$, $\bar{\mathbf{r}}'$ denotam os vetores posição das massas \mathbf{m}_s e \mathbf{m}' , e S denota o ângulo entre os dois vetores posição. Da lei dos cosenos temos:

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2r r' \cos(S) \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r'} [1 - 2 \frac{r}{r'} \cos(S) + (\frac{r}{r'})^2]^{-1/2}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = \frac{1}{r'} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\frac{r}{r'})^{\ell} P_{\ell}(\cos(S)) \quad (\text{A.20})$$

Onde:

$$P_0(\cos(S)) = 1, P_1(\cos(S)) = \cos(S), \text{ etc.}$$

Também tem-se que $\vec{r}' \cdot \vec{r} = r' r \cos(S) = r' r P_1(\cos(S))$. A função perturbadora para o secundário interno pode ser escrita como:

$$\mathbf{R} = m' \left(\frac{1}{r'} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\frac{r}{r'})^{\ell} P_{\ell}(\cos(S)) \right) - m' \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r'^3} \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{R} = m' \left[\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'} (\frac{r}{r'}) \cos(S) + \frac{1}{r'} \sum_{\ell=2}^{\infty} (\frac{r}{r'})^{\ell} P_{\ell}(\cos(S)) \right] - m' \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r'^3}$$

$$\mathbf{R} = m' \frac{1}{r'} + \frac{m'}{r'} (\frac{r}{r'}) \cos(S) + \frac{m'}{r'} \sum_{\ell=2}^{\infty} (\frac{r}{r'})^{\ell} P_{\ell}(\cos(S)) - \frac{m'}{r'} (\frac{r}{r'}) \cos(S)$$

$$\mathbf{R} = m' \frac{1}{r'} + \frac{m'}{r'} \sum_{\ell=2}^{\infty} (\frac{r}{r'})^{\ell} P_{\ell}(\cos(S))$$

$$\mathbf{R} @ \frac{m'}{r'} \sum_{\ell=2}^{\infty} (\frac{r}{r'})^{\ell} P_{\ell}(\cos(S)) \quad (\text{A.22})$$

Onde esta aproximação final é possível porque o primeiro termo da função perturbadora não tem dependência com respeito a r . Estamos interessados nos termos da função perturbadora para o secundário interno. É possível obter uma relação final se consideramos a massa m_s pequena e $m_0 > m'$. Considerando o problema restrito dos três corpos e a utilização de unidades canônicas é possível considerar que $\mathbf{G}(m_0 + m') = 1$ e

que $m' = \frac{m'}{m_0 + m} = \mathbf{G}m'$ e das leis de Kepler cumpre-se que $n^2 a^3 = \mathbf{G}(m_0 + m')$. A

Equação A.22 pode então ser escrita como:

$$\mathbf{R} = \frac{m' \mathbf{G}(m_0 + m')}{r'} \sum_{\ell=2}^{\infty} (\frac{r}{r'})^{\ell} P_{\ell} \cos(S) \quad (\text{A.23})$$

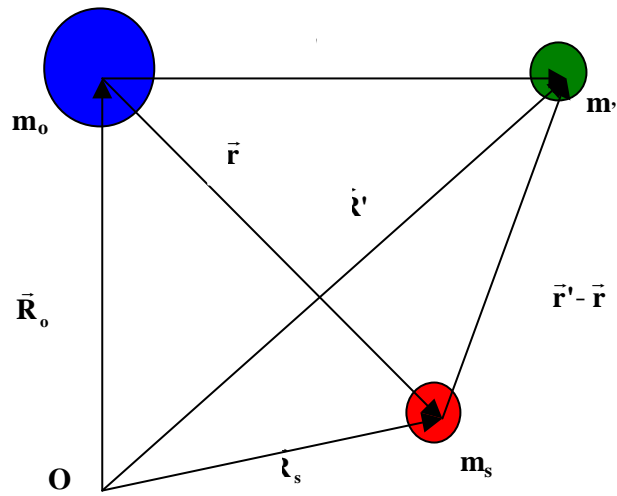


Fig. A.1 - Vetores posição \vec{r} , \vec{r}' das massas m_s e m' com respeito a massa central m_0 , as três massas tem vetores posição \vec{R}_0 , \vec{R}_i e \vec{R}_j com respeito a uma origem arbitrária fixa O .

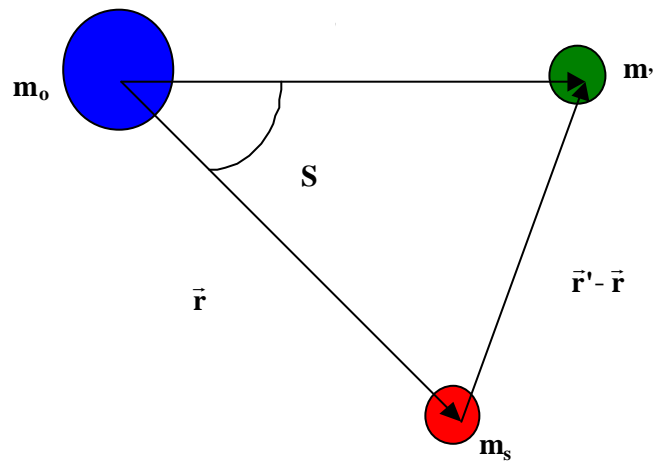


Fig. A.2 - Vetores \vec{r} , \vec{r}' das duas massas m e m' com respeito a massa central m_0 .

APÊNDICE B

RELAÇÕES ENTRE a E b

Seja o vetor posição unitário do corpo perturbador em função dos vetores $\hat{P}', \hat{Q}', \hat{R}'$

$$\hat{r}' = \cos f' \hat{P}' + \sin f' \hat{Q}' \quad (B.1)$$

Essa expressão é encontrada pela decomposição do vetor unitário da posição do corpo perturbador no plano da órbita.

As componentes de $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}$ no sistema equatorial estão representadas pelas seguintes transformações de coordenadas (Musen, 1961):

$A_3(\Omega)$: Rotação em torno do eixo R de um ângulo Ω .

$A_1(i)$: Rotação em torno do eixo P de um ângulo i .

$A_3(\omega)$: Rotação em torno do eixo R de um ângulo ω .

Desta forma obteremos a seguinte matriz de transformação:

$$[\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}] = A_3(\omega) A_1(i) A_3(\Omega) \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{matrix} \quad (B.2)$$

$$[\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}] = \begin{matrix} \cos W & -\sin W & 0 \\ \sin W & \cos W & 0 \\ \hat{e} & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} \cos i & -\sin i \\ \sin i & \cos i \\ \hat{e} & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ \hat{e} & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{matrix}$$

$$[\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}] = [R] \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{matrix} \quad (B.3)$$

$$[\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}] = \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{matrix} \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{matrix}$$

Onde os termos da matriz R são:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \text{Cos}W\text{Cos}w - \text{Sen}W\text{CosiSen}w \\
R_{12} &= -\text{Cos}W\text{Sen}w - \text{Sen}W\text{CosiCos}w \\
R_{13} &= \text{SeniSen}W \\
R_{21} &= \text{Sen}W\text{Cos}w + \text{Cos}W\text{CosiSen}w \\
R_{22} &= -\text{Sen}W\text{Sen}w + \text{Cos}W\text{CosiCos}w \\
R_{23} &= -\text{Cos}W\text{Seni} \\
R_{31} &= \text{SeniSen}W \\
R_{32} &= \text{SeniCos}w \\
R_{33} &= \text{Cosi}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Onde as componentes dos vetores unitários $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}$ são:

$$\begin{aligned}
\hat{P} &= (\text{Cos}W\text{Cos}w - \text{Sen}W\text{CosiSen}w)\hat{i} + (-\text{Cos}W\text{Sen}w - \text{Sen}W\text{CosiCos}w)\hat{j} + \\
&(\text{SeniSen}W)\hat{k} \\
\hat{Q} &= (\text{Sen}W\text{Cos}w + \text{Cos}W\text{CosiSen}w)\hat{i} + (-\text{Sen}W\text{Sen}w + \text{Cos}W\text{CosiCos}w)\hat{j} - \\
&(\text{Cos}W\text{Seni})\hat{k} \\
\hat{R} &= (\text{SeniSen}W)\hat{i} + (\text{SeniCos}w)\hat{j} + (\text{Cosi})\hat{k}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Lembremos que o corpo perturbador está em uma órbita circular, e isto implica que $f' = M' = E'$.

Considerando a Equação B.4, de forma análoga podemos encontrar as componentes do vetor \hat{r}' em função das componentes ortogonais \hat{P}', \hat{Q}' e logo fazer uma transformação de coordenadas levando ao sistema formado pelos vetores unitários $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

$$\begin{aligned}
\hat{r}' &= \text{Cos}M'[(\text{Cos}W'\text{Cos}w' - \text{Sen}W'\text{Cosi}'\text{Sen}w')\hat{i} + (-\text{Cos}W'\text{Sen}w' - \\
&\text{Sen}W'\text{Cosi}'\text{Cos}w')\hat{j} + (\text{Seni}'\text{Sen}W')\hat{k}] + \text{Sen}M'[(\text{Sen}W'\text{Cos}w' + \\
&\text{Cos}W'\text{Cosi}'\text{Sen}w')\hat{i} + (-\text{Sen}W'\text{Sen}w' + \text{Cos}W'\text{Cosi}'\text{Cos}w')\hat{j} + \\
&(-\text{Cos}W'\text{Seni}')\hat{k}]
\end{aligned} \tag{B.6}$$

A seguir, para simplificar a Equação B.5, faremos algumas suposições. Assim consideraremos que o corpo perturbador encontra-se numa órbita circular, além disso que está posicionado no plano de referência. Então a Equação B.5 terá a forma seguinte:

$$\hat{r}' = \text{cos}f'\hat{i} + \text{sen}f'\hat{j} \tag{B.6}$$

A seguir empregaremos a relação para a e b dadas por:

$$\begin{aligned} a &= \hat{r}' \cdot \hat{P} \\ b &= \hat{r}' \cdot \hat{Q} \end{aligned} \tag{B.7}$$

Levando a Equação B.6 à Equação B.4 e à Equação B.7, temos finalmente:

$$\begin{aligned} a &= \text{Cos}w \text{Cos}(W - M') - \text{Cosi} \text{Sen}w \text{Sen}(W - M') \\ b &= -\text{Sen}w \text{Cos}(W - M') - \text{Cos}w \text{Cosi} \text{Sen}(W - M') \end{aligned} \tag{B.8}$$

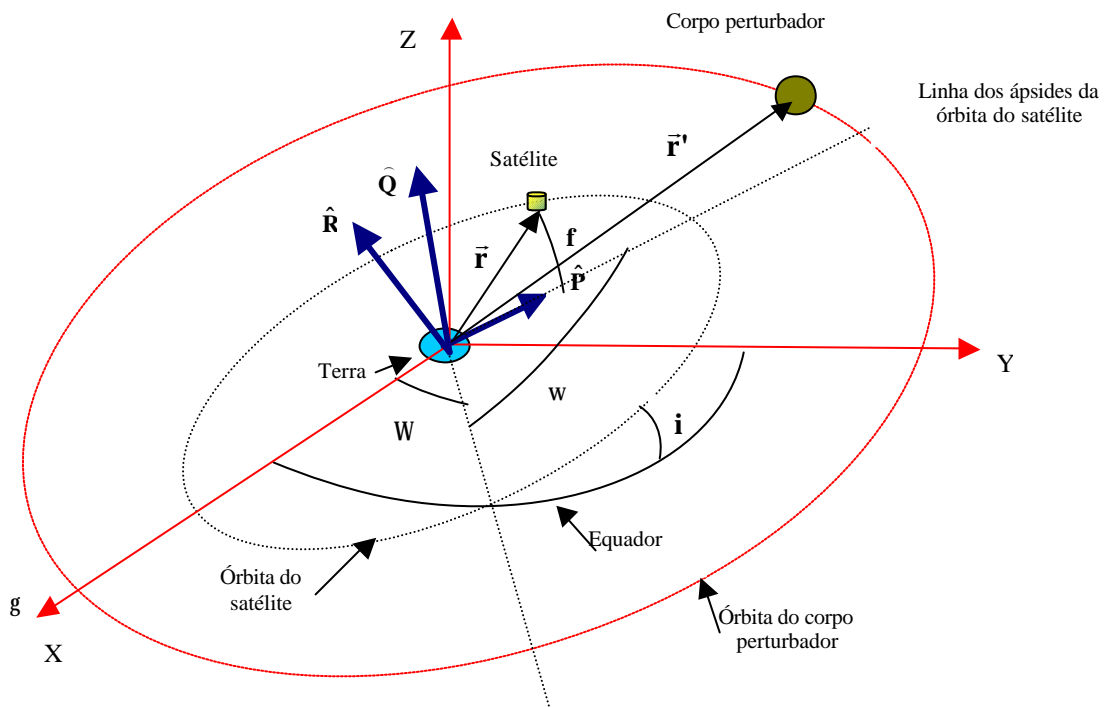


Fig. B.1 – Vetores da base do sistema perifocal.

APÊNDICE C

CÁLCULO DAS MÉDIAS

Para o cálculo das médias dividiremos a função R_2 em 4 partes básicas, já sem as constantes. Assim procedendo vamos usar a nomenclatura (Costa, 1998), e o software Mathematica, após dos cálculos, teremos:

$$\begin{aligned} \langle P_{21} \rangle &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^2 \text{Cos}^2(f) \right\rangle = [(1 + 4e^2)/2] \\ \langle P_{22} \rangle &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^2 \text{Cos}(f)\text{Sen}(f) \right\rangle = 0 \\ \langle P_{23} \rangle &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^2 \text{Sen}^2(f) \right\rangle = (1 - e^2)/2 \\ \langle P_{24} \rangle &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right\rangle = [(2 + 3e^2)/2] \end{aligned} \tag{C.1}$$

Os termos correspondentes a expansão da função perturbadora até a terceira ordem em polinômios de Legendre que sofreram médias são:

$$\begin{aligned} P_{31} &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^3 \text{Cos}^3(f) \right\rangle = -[5e(3 + 4e^2)/8] \\ P_{32} &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^3 \text{Cos}^2(f)\text{Sen}(f) \right\rangle = 0 \\ P_{33} &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^3 \text{Sen}^2(f)\text{Cos}(f) \right\rangle = 5e(e^2 - 1)/8 \\ P_{34} &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^3 \text{Cos}(f) \right\rangle = -[5e(4 + 3e^2)/8] \\ P_{35} &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^3 \text{Sen}(f) \right\rangle = 0 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Fazendo o cálculo das médias sobre os termos da expansão da função perturbadora em polinômios de Legendre até a quarta ordem temos:

$$\begin{aligned}
P_{41} &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^4 \text{Cos}^4(f) \right\rangle = 3[(1 + 12e^2 + 8e^4)/8] \\
P_{42} &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^4 \text{Cos}^3(f) \text{Sen}(f) \right\rangle = 0 \\
P_{43} &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^4 \text{Sen}^2(f) \text{Cos}^2(f) \right\rangle = (1 + 5e^2 - 6e^4)/8 \\
P_{44} &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^4 \text{Cos}(f) \text{Sen}^3(f) \right\rangle = 0 \\
P_{45} &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^4 \text{Sen}^4(f) \right\rangle = [3(e^2 - 1)^2 / 8] \\
P_{46} &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^4 \text{Cos}^2(f) \right\rangle = (4 + 41e^2 + 18e^4)/8 \\
P_{47} &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^4 \text{Cos}(f) \text{Sen}(f) \right\rangle = 0 \\
P_{48} &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^4 \text{Sen}^2(f) \right\rangle = (4 - e^2 - 3e^4)/8 \\
P_{49} &= \left\langle \left(\frac{r}{a}\right)^4 \right\rangle = (8 + 40e^2 + 15e^4)/8 \tag{C.3}
\end{aligned}$$

Levando em conta as derivadas da função perturbadora com respeito aos elementos orbitais temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle R_2 \rangle}{\partial a} &= \left\{ \frac{(a')^3 m'}{16(r')^3} (a(2 + 6\text{Cos}[2i] + 6\text{Cos}[2(t - W)] - \right. \\
& 3\text{Cos}[2(t - i - W)] - 3\text{Cos}[2(t + i - W)] + 12e^2(-2 + \text{Cos}[t - W])^2 * \\
& (3 + 5\text{Cos}[2w]) - \text{Cos}[i]^2(-3 + 5\text{Cos}[2w]) * \text{Sen}[t - W]^2 + 5\text{Cos}[i] \\
& \left. \text{Sen}[2(t - W)]\text{Sen}[2w])) \right\} \tag{C.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle R_2 \rangle}{\partial i} &= \left\{ \frac{(a')^3 m'}{4(r')^3} (3a^2 \text{Sen}[i] \text{Sen}[t - W](-2\text{Cos}[i] * \right. \\
& \text{Sen}[t - W]e^2(\text{Cos}[i](-3 + 5\text{Cos}[2w])\text{Sen}[t - W] - 5\text{Cos}[t - W] * \\
& \left. \text{Sen}[2w])) \right\} \tag{C.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle R_2 \rangle}{\partial w} &= \left\{ \frac{(a')^3 m'}{4(r')^3} (15a^2 e^2 (\text{Cos}[i] \text{Cos}[2w] \text{Sen}[2(t - W)] \right. \\
& \left. - \text{Cos}[t - W]^2 \text{Sen}[2w] + \text{Cos}[i]^2 \text{Sen}[t - W]^2 \text{Sen}[2w])) \right\} \tag{C.6}
\end{aligned}$$

$$\frac{\langle R_2 \rangle}{W} = \left\{ \frac{(a')^3 m'}{8(r')^3} (3a^2 (2\text{Sen}[i]^2 \text{Sen}[2(t-W)] + e^2 * \right. \\ \left. ((9 + \text{Cos}[2i]) \text{Cos}[w]^2 \text{Sen}[2(t-W)] - 2((3 + 2\text{Cos}[2i]) * \right. \\ \left. \text{Sen}[2(t-W)] \text{Sen}[w]^2 + 5\text{Cos}[i] \text{Cos}[2(t-W)] \text{Sen}[2w]))) \right\} \quad (C.7)$$

$$\frac{\langle R_2 \rangle}{e} = \left\{ \frac{1}{4(r')^3} (3a^2 e (-2 + \text{Cos}[t-W])^2 (3 + 5\text{Cos}[2w]) - \right. \\ \left. \text{Cos}[i]^2 (-3 + 5\text{Cos}[2w]) \text{Sen}[t-W]^2 + 5\text{Cos}[i] \text{Sen}[2(t-W)] * \right. \\ \left. \text{Sen}[2w]) (a')^3 m' \right\} \quad (C.8)$$

$$\frac{\langle R_3 \rangle}{a} = \left\{ \frac{(a')^3 m'}{16(r')^4} (15a^3 e \text{Cos}[t-W] \text{Cos}[w] + \text{Cos}[i] \text{Sen}[t-W] * \right. \\ \left. \text{Sen}[w]) (3(4 + 3e^2) 15(-1 + e^2) (\text{Cos}[i] \text{Cos}[w] \text{Sen}[t-W] - \text{Cos}[t-W] * \right. \\ \left. \text{Sen}[w])^2 - 5(3 + 4e^2) (\text{Cos}[t-W] \text{Cos}[w] + \text{Cos}[i] \text{Sen}[t-W] \text{Sen}[w])^2) \right\} \quad (C.9)$$

$$\frac{\langle R_3 \rangle}{e} = - \frac{(a')^3 m'}{128(r')^4} (15a^3 (\text{Cos}[t-W] \text{Cos}[w] + \text{Cos}[i] \text{Sen}[t-W] * \right. \\ \left. \text{Sen}[w]) (-2 + 10\text{Cos}[2i] + 10\text{Cos}[2(t-W)] - 5 * \text{Cos}[2(t-i-W)] - \right. \\ \left. 5\text{Cos}[2(t+i-W)] + 4e^2 (-18 + 5\text{Cos}[t-W])^2 (1 + 7\text{Cos}[2w]) - 5\text{Cos}[i]^2 * \right. \\ \left. (-1 + 7\text{Cos}[2w]) \text{Sen}[t-W]^2 + 35\text{Cos}[i] * \text{Sen}[2(t-W)] \text{Sen}[2w])) \right\} \quad (C.10)$$

$$\frac{\langle R_3 \rangle}{i} = \frac{(a')^3 m'}{16(r')^4} \{ 15a^3 e \text{Sen}[i] \text{Sen}[t-W] (20\text{Cos}[i] * \right. \\ \left. \text{Cos}[w] \text{Sen}[2(t-W)] + 2(-3 + 5\text{Cos}[2(t-W)]) \text{Sen}[w] + 60\text{Cos}[i]^2 * \right. \\ \left. \text{Sen}[t-W]^2 \text{Sen}[w] + e^2 (5\text{Cos}[i] (3\text{Cos}[w] - 7\text{Cos}[3w]) * \right. \\ \left. \text{Sen}[2(t-W)] + 2(-6 + 5\text{Cos}[t-W])^2 (5 + 7\text{Cos}[2w]) \text{Sen}[w] + \right. \\ \left. 5\text{Cos}[i]^2 \text{Sen}[t-W]^2 (9\text{Sen}[w] - 7\text{Sen}[3w])) \right\} \quad (C.11)$$

$$\frac{\langle R_3 \rangle}{w} = - \frac{(a')^3 m'}{128(r')^4} (15a[t]^3 e (\text{Cos}[i] \text{Cos}[w] \text{Sen}[t-W] - \text{Cos}[t-W] * \right. \\ \left. \text{Sen}[w]) (2 - 10\text{Cos}[2i] - 10\text{Cos}[2(t-W)] + 5 * \text{Cos}[2(t-i-W)] + \right. \\ \left. 5\text{Cos}[2(t+i-W)] 4e^2 (6 - 5\text{Cos}[t-W])^2 (5 + 7\text{Cos}[2w]) + 5\text{Cos}[i]^2 (-5 + \right. \\ \left. 7\text{Cos}[2w]) \text{Sen}[t-W]^2 - 35\text{Cos}[i] \text{Sen}[2(t-W)] \text{Sen}[2w])) \right\} \quad (C.12)$$

$$\frac{\langle R_3 \rangle}{W} = \frac{(a')^3 m'}{16(r')^4} (15a^3 e((4 + 3e^2)(\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[i] * \text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w]) + 5(-1 + e^2)(\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[t - W] * \text{Sen}[w]^2(\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[i]\text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])10(-1 + e^2) * (\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])(\text{Cos}[i]\text{Cos}[t - W]\text{Cos}[w] + \text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w]\text{Cos}[t - W]\text{Cos}[w] + \text{Cos}[i]\text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w])5(3 + 4e^2) * (\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[i]\text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])(\text{Cos}[t - W]\text{Cos}[w] + \text{Cos}[i]\text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w])^2)) \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{\langle R_4 \rangle}{a} = \frac{1}{16(r')^5} (3a^3(8 + 40e^2 + 15e^4 + 10(-4 + e^2 + 3e^4)(\text{Cos}[i] * \text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])^2 + 35(-1 + e^2)^2(\text{Cos}[i]\text{Cos}[w] * \text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])^4 - 10(4 + 41e^2 + 18e^4)(\text{Cos}[w] * \text{Cos}[t - W] + \text{Cos}[i]\text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w])^2 + 70(1 + 5e^2 - 6e^4)(\text{Cos}[i] * \text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])^2(\text{Cos}[w]\text{Cos}[t - W] + \text{Cos}[i] * \text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w])^2 + 35(1 + 12e^2 + 8e^4)(\text{Cos}[w]\text{Cos}[t - W] + \text{Cos}[i] * \text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w])^4)(a')^3 m') \quad (\text{C.14})$$

$$\frac{\langle R_4 \rangle}{i} = \frac{1}{16(r')^5} (15a^4 \text{Sen}[i]\text{Sen}[t - W](-\text{Cos}[w](-4 + e^2 + 3e^4) (\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w]) + 7\text{Cos}[w](-1 + e^2)^2 * (\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])^3 + (4 + 41e^2 + 18e^4) * \text{Sen}[w](\text{Cos}[w]\text{Cos}[t - W] + \text{Cos}[i]\text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w]) + 7(-1 - 5e^2 + 6e^4)\text{Sen}[w](\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])^2(\text{Cos}[w] * \text{Cos}[t - W] + \text{Cos}[i]\text{Sen}[t - W] * \text{Sen}[w]) + 7\text{Cos}[w](-1 - 5e^2 + 6e^4) * (\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])(\text{Cos}[w]\text{Cos}[t - W] + \text{Cos}[i]\text{Sen}[t - W] * \text{Sen}[w])^2 - 7(1 + 12e^2 + 8e^4)\text{Sen}[w](\text{Cos}[w] * \text{Cos}[t - W] + \text{Cos}[i]\text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w])^3)(a')^3 m') \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{\langle R_4 \rangle}{w} = \frac{(a')^3 m'}{128(r')^5} (105a^4 e^2(\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])(\text{Cos}[w]\text{Cos}[t - W] + \text{Cos}[i]\text{Sen}[t - W] * \text{Sen}[w])(-6 + 14\text{Cos}[2i] + 14 - 7\text{Cos}[2(t - i - W)] - 7\text{Cos}[2(t + i - W)] + 4e^2(-6 + 7\text{Cos}[t - W])^2(1 + 3\text{Cos}[2w]) - 7\text{Cos}[i]^2 * (-1 + 3\text{Cos}[2w])\text{Sen}[t - W]^2 + 21\text{Cos}[i]\text{Sen}[2(t - W)]\text{Sen}[2w])) \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{1} \langle \mathbf{R}_4 \rangle}{\mathbb{1}W} &= \frac{1}{16(r')^5} (15a^4(-(-4 + e^2 + 3e^4)(\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]*\text{Sen}[t - W] - \\
&\text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])(\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]\text{Cos}[t - W] + \text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w]) - 7(-1 + \\
&e^2)^2(\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])^3(\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]* \\
&\text{Cos}[t - W] + \text{Sen}[t - W]*\text{Sen}[w]) - (4 + 41e^2 + 18e^4)(\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \\
&\text{Cos}[i]\text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])(\text{Cos}[w]\text{Cos}[t - W] + \text{Cos}[i]\text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w]) + \\
&7(-1 + 5e^2 - 6e^4)(\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])^2(\text{Cos}[w]* \\
&\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[i]\text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])(\text{Cos}[w]\text{Cos}[t - W] + \text{Cos}[i]* \\
&\text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w]) + 7(-1 - 5e^2 + 6e^4)(\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[t - W]* \\
&\text{Sen}[w])(\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]\text{Cos}[t - W] + \text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w])(\text{Cos}[w]\text{Cos}[t - W] + \\
&\text{Cos}[i]\text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w])^2 + 7(1 + 12e^2 + 8e^4)(\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[i]* \\
&\text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])(\text{Cos}[w]\text{Cos}[t - W] + \text{Cos}[i]\text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w])^3)(a')^3 * \\
&m')
\end{aligned} \tag{C.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{1} \langle \mathbf{R}_4 \rangle}{\mathbb{1}e} &= \frac{(a')^3 m'}{16(r')^5} (15a^4(4e + 3e^3 + (e + 6e^3)(\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]* \\
&\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])^2 + 7e(-1 + e^2)(\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \\
&\text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])^4 - e(41 + 36e^2)(\text{Cos}[w]\text{Cos}[t - W] + \text{Cos}[i]\text{Sen}[t - W]* \\
&\text{Sen}[w])^2 - 7e(-5 + 12e^2)(\text{Cos}[i]\text{Cos}[w]\text{Sen}[t - W] - \text{Cos}[t - W]\text{Sen}[w])^2 * \\
&(\text{Cos}[w]\text{Cos}[t - W] + \text{Cos}[i]\text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w])^2 + 14e(3 + 4e^2)(\text{Cos}[w]* \\
&\text{Cos}[t - W] + \text{Cos}[i]\text{Sen}[t - W]\text{Sen}[w])^4))
\end{aligned} \tag{C.18}$$

Nos cálculos realizados anteriormente consideramos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}' &= \mathbf{MOP} + \mathbf{n}' \mathbf{t} \\
\mathbf{MOP} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{n}' &= \mathbf{1}
\end{aligned} \tag{C.19}$$

O conjunto de Equações C.4–C.18 devem ser levadas às Equações 3.20–3.25 para obter às equações de movimento do satélite a partir das equações planetárias de Lagrange, na forma que dependem das derivadas da função perturbadora R com respeito aos elementos keplerianos.

APÊNDICE D

ELEMENTOS ORBITAIS EM VARIÁVEIS NÃO-SINGULARES

A seguir representaremos a Equação 6.32 em variáveis não-singulares. Para isso utilizamos os seguintes termos:

$$\begin{aligned} \mathbf{T1} &: e \mathbf{Cos}(M) \\ \mathbf{T2} &: e^2 \mathbf{Cos}(2M) \\ \mathbf{T3} &: e^2 \mathbf{Sen}^2(i) \mathbf{Cos}(2w) \\ \mathbf{T4} &: e \mathbf{Sen}^2(i) \mathbf{Cos}(M + 2w) \\ \mathbf{T5} &: \mathbf{Sen}^2(i) \mathbf{Cos}(2M + 2w) \\ \mathbf{T6} &: e \mathbf{Sen}^2(i) \mathbf{Cos}(3M + 2w) \\ \mathbf{T7} &: e^2 \mathbf{Sen}^2(i) \mathbf{Cos}(4M + 2w) \end{aligned} \tag{D.1}$$

A seguir, considerando como referência o desenvolvimento de alguns termos feitos em Fernandes (1999), desenvolveremos os termos T1 até T3.

Do sistema de equações 6.1:

$$\begin{aligned} l - (w + W) &= M \\ \mathbf{Cos}(l - v) &= \mathbf{Cos}(M) \\ e * \mathbf{Cos}(l) \mathbf{Cos}(v) + e * \mathbf{Sen}(l) \mathbf{Sen}(v) &= e * \mathbf{Cos}(M) \\ x \mathbf{Cos}(l) + h \mathbf{Sen}(l) &= e * \mathbf{Cos}(M) \end{aligned} \tag{D.2}$$

De forma análoga:

$$\begin{aligned} l - (w + W) &= M \\ \mathbf{Sen}(l - v) &= \mathbf{Sen}(M) \\ x \mathbf{Sen}(l) - h \mathbf{Cos}(l) &= e * \mathbf{Sen}(M) \end{aligned} \tag{D.3}$$

Da trigonometria:

$$\begin{aligned} \mathbf{Cos}(2M) &= \mathbf{Cos}^2(M) - \mathbf{Sen}^2(M) \\ e^2 \mathbf{Cos}(2M) &= e^2 \mathbf{Cos}^2(M) - e^2 \mathbf{Sen}^2(M) \end{aligned}$$

Das Equações D.2 e D.3 temos:

$$e^2 \text{Cos}(2M) = (x \text{Cos}(l) + h \text{Sen}(l))^2 - (x \text{Sen}(l) - h \text{Cos}(l))^2$$

Após algumas operações algébricas chegamos a:

$$e^2 \text{Cos}(2M) = (x^2 - h^2)(\text{Cos}^2(l) - \text{Sen}^2(l)) + 4xh \text{Cos}(l) \text{Sen}(l) \quad (\text{D.4})$$

Agora calcularemos o termo T3 em variáveis não-singulares. Para isso utilizamos:

$$e^2 \text{Cos}(2w) = e^2 \text{Cos}^2(w) - e^2 \text{Sen}^2(w) \quad (\text{D.5})$$

$$w = l - (M + W)$$

$$\text{Cos}(l - (M + W)) = \text{Cos}(w)$$

Desenvolvendo a relação anterior e multiplicando ambos os lados por e:

$$\begin{aligned} e \text{Cos}(w) &= \text{Cos}(W)[e \text{Cos}(l) \text{Cos}(M) + e \text{Sen}(l) \text{Sen}(M)] + \text{Sen}(W)[e \text{Sen}(l) \\ &\text{Cos}(M) - e \text{Cos}(l) \text{Sen}(M)] \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

De forma análoga, fazendo o desenvolvimento para o seno do argumento do perigeu:

$$\begin{aligned} e \text{Sen}(w) &= \text{Cos}(W)[e \text{Sen}(l) \text{Cos}(M) - e \text{Cos}(l) \text{Sen}(M)] - \text{Sen}(W)[e \text{Sen}(l) \\ &\text{Sen}(M) + e \text{Cos}(l) \text{Cos}(M)] \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Fazendo uma mudança de variáveis, sejam:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= e \text{Cos}(l) \text{Cos}(M) + e \text{Sen}(l) \text{Sen}(M) \\ \mathbf{B} &= e \text{Sen}(l) \text{Cos}(M) - e \text{Cos}(l) \text{Sen}(M) \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Utilizando a Equação D.8, elevando ao quadrado as Equações D.7 e D.6 e levando os resultados para a Equação D.5 temos:

$$e^2 \text{Cos}(2w) = (\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2) \text{Cos}^2(W) - (\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2) \text{Sen}^2(W) + 4\mathbf{A}\mathbf{B} \text{Cos}(W) \text{Sen}(W) \quad (\text{D.9})$$

Multiplicando ambos os lados da Equação D.9 pela relação:

$$4 * \text{Sen}^2\left(\frac{i}{2}\right) * \text{Cos}^2\left(\frac{i}{2}\right) = \text{Sen}^2(i)$$

Utilizando as relações para **P** e **Q** obtemos:

$$e^2 \text{Sen}^2(i) \text{Cos}(2w) = 4(A^2 - B^2) \text{Cos}^2\left(\frac{i}{2}\right)(P^2 - Q^2) + 16 \text{Cos}^2\left(\frac{i}{2}\right) ABPQ \quad (\text{D.10})$$

Após efetuar algumas operações algébricas, temos:

$$\begin{aligned} (A^2 - B^2) = & \text{Cos}^2(l) [(x^2 - h^2) \text{Cos}^2(l) + (h^2 - x^2) \text{Sen}^2(l) + 4xh \\ & \text{Cos}(l) \text{Sen}(l)] + \text{Sen}^2(l) [(-x^2 + h^2) \text{Cos}^2(l) + (-h^2 + x^2) \text{Sen}^2(l) - \\ & 4xh \text{Cos}(l) \text{Sen}(l)] + 4 \text{Sen}(l) \text{Cos}(l) [(x^2 - h^2) \text{Cos}(l) \text{Sen}(l) - xh \\ & \text{Cos}^2(l) + xh \text{Sen}^2(l)] \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Assim sendo:

$$\begin{aligned} AB = & (x^2 - h^2) \text{Cos}^3(l) \text{Sen}(l) - (x^2 - h^2) \text{Sen}^3(l) \text{Cos}(l) + 4xh \text{Cos}^3(l) \\ & \text{Sen}^3(l) + \text{Sen}^2(l) [(x^2 - h^2) \text{Cos}(l) \text{Sen}(l) + xh \text{Sen}^2(l) - xh \text{Cos}^2(l)] - \\ & \text{Cos}^2(l) [(x^2 - h^2) \text{Cos}^3(l) \text{Sen}(l) + xh \text{Sen}^2(l) - xh \text{Cos}^2(l)] \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Considerando as Equações D.12, D.11 e D.10 obtemos:

$$\begin{aligned} e^2 \text{Sen}^2(i) \text{Cos}(2w) = & 4(1 - P^2 - Q^2)(P^2 - Q^2) [\text{Cos}^2(l) [(x^2 - h^2) \\ & \text{Cos}^2(l) + (h^2 - x^2) \text{Sen}^2(l) + 4xh \text{Cos}(l) \text{Sen}(l)] + \text{Sen}^2(l) [(-x^2 + \\ & h^2) \text{Cos}^2(l) + (-h^2 + x^2) \text{Sen}^2(l) - 4xh \text{Cos}(l) \text{Sen}(l)] + 4 \text{Sen}(l) \\ & \text{Cos}(l) [(x^2 - h^2) \text{Cos}(l) \text{Sen}(l) - xh \text{Cos}^2(l) + xh \text{Sen}^2(l)]] + 16(1 - \\ & P^2 - Q^2) PQ [(x^2 - h^2) \text{Cos}^3(l) \text{Sen}(l) - (x^2 - h^2) \text{Sen}^3(l) \text{Cos}(l) + \\ & 4xh \text{Cos}^2(l) \text{Sen}^2(l) + \text{Sen}^2(l) [(x^2 - h^2) \text{Cos}(l) \text{Sen}(l) + xh \\ & \text{Sen}^2(l) - xh \text{Cos}^2(l)] - \text{Cos}^2(l) [(x^2 - h^2) \text{Cos}^3(l) \text{Sen}(l) + xh \\ & \text{Sen}^2(l) - xh \text{Cos}^2(l)]] \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Daqui para a frente faremos a comprovação das equações apresentadas em Fernandes (1999). Das relações anteriores:

$$\begin{aligned} l &= M + W + w \\ l - 2W + v &= M + 2w \\ \text{Cos}([l + v] - 2W) &= \text{Cos}(M + 2w) \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Considerando a relação dos ângulos duplos:

$$\text{Sen}(2W) = 2\text{Sen}(W)\text{Cos}(W)$$

$$\text{Cos}(2W) = \text{Cos}^2(W) - \text{Sen}^2(W)$$

Além disso temos a relação seguinte:

$$\begin{aligned} e\text{Sen}(l + v) &= e\text{Sen}(l)\text{Cos}(v) + e\text{Cos}(l)\text{Sen}(v) = x\text{Sen}(l) + h\text{Cos}(l) \\ e\text{Cos}(l + v) &= e\text{Cos}(l)\text{Cos}(v) - e\text{Sen}(l)\text{Sen}(v) = x\text{Cos}(l) - h\text{Sen}(l) \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Levando a Equação D.15 a D.14, e multiplicando a Equação D.14 por $e\text{Sen}^2(i)$, temos:

$$\begin{aligned} e\text{Sen}^2(i)\text{Cos}(M + 2w) &= 4(1 - P^2 - Q^2)(P^2 - Q^2)(x\text{Cos}(l) - h\text{Sen}(l)) + \\ &8(1 - P^2 - Q^2)PQ(x\text{Sen}(l) + h\text{Cos}(l)) \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

A seguir encontraremos uma representação para T5 em variáveis não-singulares.

$$l = M + W + w$$

$$2l - 2W = 2M + 2w$$

$$\text{Cos}(2l - 2W) = \text{Cos}(2M + 2w) \quad (\text{D.17})$$

Efetuada as operações algébricas temos:

$$\begin{aligned} \text{Cos}(2M + 2w) &= [\text{Cos}^2(l) - \text{Sen}^2(l)][\text{Cos}^2(W) - \text{Sen}^2(W)] + 2\text{Cos}(l) \\ &\text{Sen}(l)2\text{Cos}(W)\text{Sen}(W) \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Multiplicando ambos lados da Equação (D.17) por $4 * \text{Sen}^2(\frac{i}{2}) * \text{Cos}^2(\frac{i}{2}) = \text{Sen}^2(i)$,

temos:

$$\begin{aligned} \text{Sen}^2(i)\text{Cos}(2M + 2w) &= 4\text{Cos}^2(\frac{i}{2})(P^2 - Q^2)(\text{Cos}^2(l) - \text{Sen}^2(l)) + 16\text{Cos}(l) \\ &\text{Sen}(l)PQ\text{Cos}^2(\frac{i}{2}) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \text{Sen}^2(i)\text{Cos}(2M + 2w) &= 4(1 - P^2 - Q^2)(P^2 - Q^2)(\text{Cos}^2(l) - \text{Sen}^2(l)) + \\ &16\text{Cos}(l)\text{Sen}(l)PQ(1 - P^2 - Q^2) \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Achando a representação do termo T6 em variáveis não-singulares:

$$\begin{aligned}
l &= M + W + w \\
3l - v - 2W &= 3M + 2w \\
\cos((3l - v) - 2W) &= \cos(3M + 2w)
\end{aligned} \tag{D.20}$$

Efetuando:

$$\begin{aligned}
\cos(3M + 2w) &= \cos(3l - v)[\cos^2(W) - \sin^2(W)] + 2\sin(3l - v) \\
&\cos(W)\sin(W)
\end{aligned}$$

Expandindo a relação anterior e multiplicando por $e\sin^2(i)$, temos:

$$\begin{aligned}
\cos(3M + 2w) &= 4\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)\cos^2\left(\frac{i}{2}\right)\cos^2(W)[e\sin(l)\sin(v) + e\cos(l)\cos(v)] \\
&- 4\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)\cos^2\left(\frac{i}{2}\right)\sin^2(W)[e\sin(l)\sin(v) + e\cos(l)\cos(v)] + 2e\sin(3l) \\
&\cos(v)\cos(W)\sin(W) - 2e\cos(W)\sin(W)\cos(3l)\sin(v)
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
e\sin^2(i)\cos(3M + 2w) &= 4(h\sin(3l) + x\cos(3l))(1 - P^2 - Q^2)(P^2 - Q^2) \\
&+ 8(1 - P^2 - Q^2)PQ(x\sin(3l) - h\cos(3l))
\end{aligned} \tag{D.21}$$

Para o termo T7:

$$\begin{aligned}
l &= M + W + w \\
4l - 2v - 2W &= 4M + 2w \\
\cos((4l - 2v) - 2W) &= \cos(4M + 2w)
\end{aligned} \tag{D.22}$$

Efetuando:

$$\begin{aligned}
\cos(4M + 2w) &= (\cos(4l)\cos(2v) + \sin(4l)\sin(2v))(\cos^2(W) - \sin^2(W)) \\
&(\sin(4l)\cos(2v) - \cos(4l)\sin(2v))(2\sin(W)\cos(W))
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por $e^2\sin^2(i)$, temos:

$$\begin{aligned}
e^2\sin^2(i)\cos(4M + 2w) &= 4(1 - P^2 - Q^2)(P^2 - Q^2)(\cos(4l)e^2\cos(2v) + \\
&\sin(4l)e^2\sin(2v)) + 8PQ(1 - P^2 - Q^2)(\sin(4l)e^2\cos(2v) - \cos(4l) \\
&e^2\sin(2v))
\end{aligned} \tag{D.23}$$

Assim sendo, temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} e^2 \text{Sen}(2v) &= 2e^2 \text{Sen}(v) \text{Cos}(v) \\ e^2 \text{Sen}(2v) &= 2xh \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

$$\begin{aligned} e^2 \text{Cos}(2v) &= e^2 \text{Cos}^2(v) - e^2 \text{Sen}^2(v) \\ e^2 \text{Cos}(2v) &= x^2 - h^2 \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Considerando as Equações D.23, D.24 e D.25 temos:

$$\begin{aligned} e^2 \text{Sen}^2(i) \text{Cos}(4M + 2w) &= 4(1 - P^2 - Q^2)(P^2 - Q^2)[(x^2 - h^2) \text{Cos}(4l) + \\ &2hx \text{Sen}(4l)] + 8PQ(1 - P^2 - Q^2)[(x^2 - h^2) \text{Sen}(4l) - 2hx \text{Cos}(4l)] \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$