



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

INPE-12308-TDI/988

**DINÂMICA E CONTROLE DE MOVIMENTO DE CORPO RÍGIDO  
DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO RÍGIDO FLEXÍVEL**

Cássio Fabian Sarquis de Campos

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle ETE/CMC, orientada pelo Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza, aprovada em 21 de setembro de 2001.

INPE  
São José dos Campos  
2005

629.7.062.2

CAMPOS, C. F. S.


Dinâmica e controle de movimento de corpo rígido de um manipulador robótico rígido/flexível / C. F. S. Campos. – São José dos Campos: INPE, 2001.

107p. (INPE-12308-TDI/988).

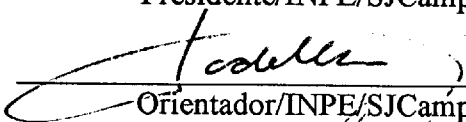
1.Braços robótico. 2.Manipulador. 3.Dinâmica.  
4.Sistema de controle. Equações de movimento. I.Título.

Aprovado pela Banca Examinadora em  
cumprimento a requisito exigido para a  
obtenção do Título de **Mestre em**  
**Engenharia e Tecnologia**  
**Espaciais/Mecânica Espacial e**  
**Controle.**

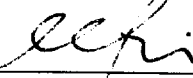
Dr. Ijar Milagre da Fonseca

  
\_\_\_\_\_  
Presidente/INPE/SJCampos-SP

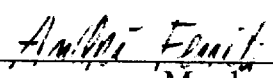
Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza

  
\_\_\_\_\_  
Orientador/INPE/SJCampos-SP

Dr. Mário César Ricci

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca/INPE/SJCampos-SP

Dr. André Fenili

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca  
Convidado ITA/SJCampos-SP

Candidato: Cássio Fabian Sarquis de Campos

São José dos Campos, 21 de setembro de 2001.



Dedico esta dissertação a meus pais Norival e Mari e a meus irmãos Marco  
Antonio e Mary Anne.



## **AGRADECIMENTOS**

À CAPES por ter financiado a pesquisa.

Ao orientador Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza pela orientação do trabalho.

Ao Dr. Ijar Milagre da Fonseca pela grande ajuda na parte analítica da dissertação, aos meus amigos Êlcio Alves, Mário Ricci e André Fenili pela ajuda durante a pesquisa.

Aos membros da banca que disponibilizaram tempo e estudo para avaliação desta dissertação.





## RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo da dinâmica e controle do movimento de corpo rígido de um manipulador robótico. O modelo do manipulador, constituído de um mecanismo com dois elos flexíveis conectados por juntas que não sofrem deformações, foi obtido através da Formulação de Lagrange e do Método dos Modos Admitidos. Para efeito de comparação, são desenvolvidos dois outros modelos para o manipulador sob as mesmas condições: um com dois elos rígidos e outro com apenas o segundo elo flexível. Ressalta-se o fato de que, durante este estudo nenhuma linearização foi usada, tratando assim o problema com suas não linearidades sujeito a pequenos movimentos elásticos. A lei de Controle aplicada constitui um Controlador PD (proporcional + derivativo) tendo como objetivo restabelecer o estado inicial do manipulador quanto à velocidade angular dos elos, isto é, dado uma perturbação ao sistema espera-se que o sistema de controle seja capaz de interromper o movimento dos elos do manipulador. Os resultados obtidos mostraram que o sistema de controle cumpriu seu objetivo quanto ao controle do movimento de corpo rígido para todos os modelos, mesmo quando as estruturas são flexíveis. Mostrou-se ainda que o modelo flexível pode ser considerado um modelo mais completo que o modelo rígido. A análise estrutural através dos autovalores mostrou que as posições relativas dos elos do manipulador influenciam os modos de vibração e suas respectivas frequências naturais, podendo ser considerado um dos grandes problemas que envolvem a dinâmica de manipuladores flexíveis.



# **DYNAMIC AND CONTROL OF RIGID BODY MOTION OF A RIGID/FLEXIBLE ROBOTIC MANIPULATOR**

## **ABSTRACT**

This work presents a study of the dynamics and control of the movement of rigid body of a robotic manipulator. The model of the manipulator, consisting of a mechanism with two flexible links hardwired by meetings that do not suffer deformations, was gotten through the Formularization of Lagrange and the Admitted Modes Method. For matching effect, two other models for the manipulator under the same conditions are developed: one with two rigid links and another one with only as the flexible link. The fact is standed out of that, during this study no linearização was used, thus treating the problem with its non linearly, however subject to small elastic movements. The law of applied Control constitutes a PD Controller (proportional + derivative) having as objective commit the initial state of the manipulator how much to the angular speed of the links, that is, given a disturbance to the system it expects that the control system is capable to interrupt the movement of the links of the manipulator. The gotten results had shown that the control system fulfilled to its objective how much to the control of the movement of rigid body for all the models, exactly in presence of flexible structures. One still revealed that the flexible model can be considered a model fuller than the rigid model. The structural analysis through the autovalores showed that the relative positions of the links of the manipulator influence the modes of vibration and its respective natural frequencies, being able to be considered one of the great problems that involve the dynamics of flexible manipulators.



## SUMÁRIO

	Pág.
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	
<b>LISTA DE TABELAS</b>	
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	
<b>CAPÍTULO 1 - APRESENTAÇÃO</b> .....	23
1.1 - Introdução .....	23
1.2 - Objetivos .....	25
1.3 - Justificativa.....	25
1.4 - Metodologia.....	26
1.4.1 - Modelagem .....	26
1.4.2 - Sistema de Controle.....	27
1.4.3 - Implementação Computacional.....	28
1.5 - Breve Revisão Bibliográfica .....	28
1.6 - Organização do Trabalho.....	31
<b>CAPÍTULO 2 - MODELAGEM DINÂMICA</b> .....	33
2.1 - Dinâmica do Manipulador.....	33
2.1.1 - Princípio de Hamilton e Equações de Lagrange .....	33
2.1.2 - Descrição Cinemática .....	36
2.1.2.1 - Vetor posição e vetor velocidade de um ponto no primeiro elo.....	36
2.1.2.2 - Vetor posição e vetor velocidade de um ponto no segundo elo.....	38
2.1.3 - Energia Cinética e Energia Potencial.....	40

2.1.3.1 - Energia Cinética.....	40
2.1.3.2 - Energia Potencial.....	41
2.2 - Método dos Modos Admitidos .....	42
2.2.1 - Função de Forma .....	43
2.2.1.1 - Forma para o primeiro modo do elo 1.....	44
2.2.1.2 - Forma para o primeiro modo do elo 2.....	45
2.3 - Equações de Movimento.....	46
2.3.1 - Manipulador Rígido/Rígido.....	47
2.3.2 - Manipulador Rígido/Flexível.....	49
2.3.3 - Manipulador Flexível/Flexível.....	53
2.4 - Estrutura das Equações de Movimento.....	59
2.4.1 - Modelo Rígido/Rígido.....	60
2.4.2 - Modelo Rígido/Flexível.....	61
2.4.3 - Modelo Flexível/Flexível.....	62
<b>CAPÍTULO 3 - SISTEMA DE CONTROLE.....</b>	<b>65</b>
3.1 - Introdução .....	65
3.2 - Sistema de Controle.....	66
3.2.1 - Ação do Controlador Proporcional + Derivativo .....	66
3.2.2 - Estabilidade.....	69
<b>CAPÍTULO 4 - SIMULAÇÕES E ANÁLISE DINÂMICA.....</b>	<b>71</b>
4.1 - Introdução .....	71
4.2 - Parâmetros do Manipulador .....	72
4.3 - Torques de Entrada .....	73

4.4 - Simulação Dinâmica dos Modelos e Ganhos do Controlador .....	73
4.4.1 - Modelo Rígido .....	74
4.4.2 - Modelo Rígido/Flexível .....	76
4.4.3 - Modelo Flexível/Flexível .....	79
4.5 - Influência da Flexibilidade .....	82
4.5.1 - Ganho $K_s = 0,5$ .....	83
4.5.2 - Ganho $K_s = 1,0$ .....	85
4.5.3 - Ganho $K_s = 2,0$ .....	88
<b>CAPÍTULO 5 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES</b> .....	93
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	95
<b>APENDICE A - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</b> .....	99
<b>APENDICE B - ANÁLISE ESTRUTURAL</b> .....	101





## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
1.1 - ISS e SRMS .....	25
2.1 - Modelo físico do manipulador .....	33
2.2 - Vetor posição de um ponto p sobre o elo 1.....	36
2.3 - Vetor posição de um ponto p sobre o elo 2.....	38
2.4 - Forma para o primeiro modo do elo 1 modelado como pinada-pinada ( $l = 7.5m$ ) .....	45
2.5 - Forma para o primeiro modo do elo 1 modelado como engastada-engastada ( $l = 7.5m$ ) .....	45
2.6 - Forma para o primeiro modo do elo 2 modelado como pinada-livre ( $l = 7.5m$ ) .....	46
2.7 - Forma para o primeiro modo do elo 2 modelado como engastada-livre ( $l = 7.5m$ ) .....	46
3.1 - Diagrama de blocos do controlador PD.....	69
4.1 - Torques aplicados nas juntas.....	73
4.2 - Gráfico da posição angular do elo 1 para ganhos diferentes.....	74
4.3 - Gráfico da velocidade angular do elo 1 para ganhos diferentes.....	74
4.4 - Gráfico da posição angular do elo 2 para ganhos diferentes.....	75
4.5 - Gráfico da velocidade angular do elo 2 para ganhos diferentes.....	75
4.6 - Gráfico da posição angular do elo 1 para ganhos diferentes.....	76

4.7 - Gráfico da velocidade angular do elo 1 para ganhos diferentes.....	76
4.8 - Gráfico da posição angular do elo 2 para ganhos diferentes. ....	77
4.9 - Gráfico da velocidade angular do elo 2 para ganhos diferentes.....	77
4.10 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 1.....	78
4.11 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 2.....	78
4.12 - Gráfico da coordenada generalizada associada à flexibilidade do elo 2. ....	79
4.13 - Gráfico da posição angular do elo 1 para ganhos diferentes. ....	79
4.14 - Gráfico da velocidade angular do elo 1 para ganhos diferentes.....	80
4.15 - Gráfico da posição angular do elo 2 para ganhos diferentes. ....	80
4.16 - Gráfico da velocidade angular do elo 2 para ganhos diferentes.....	80
4.17 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 1.....	81
4.18 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 2.....	81
4.19 - Gráfico da coordenada generalizada associada à flexibilidade do elo 1. ....	82
4.20 - Gráfico da coordenada generalizada associada à flexibilidade do elo 2. ....	82
4.21 - Gráfico da posição angular do elo 1, ganho $K_s = 0,5$ . ....	83
4.22 - Gráfico da velocidade angular do elo 1, ganho $K_s = 0,5$ . ....	83
4.23 - Gráfico da posição angular do elo 2, ganho $K_s = 0,5$ . ....	84
4.24 - Gráfico da velocidade angular do elo 2, Ganho $K_s = 0,5$ . ....	84
4.25 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 1, ganho $K_s = 0,5$ .....	85
4.26 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 2, ganho $K_s = 0,5$ .....	85

4.27 - Gráfico da posição angular do elo 1, ganho $K_s = 1,0$ . .....	86
4.28 - Gráfico da velocidade angular do elo 1, ganho $K_s = 1,0$ . .....	86
4.29 - Gráfico da posição angular do elo 2, ganho $K_s = 1,0$ . .....	86
4.30 - Gráfico da velocidade angular do elo 2, ganho $K_s = 1,0$ . .....	87
4.31 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 1, ganho $K_s = 1,0$ . .....	87
4.32 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 2, ganho $K_s = 1,0$ . .....	88
4.33 - Gráfico da posição angular do elo 1, ganho $K_s = 2,0$ . .....	88
4.34 - Gráfico da velocidade angular do elo 1, ganho $K_s = 2,0$ . .....	89
4.35 - Gráfico da posição angular do elo 2, ganho $K_s = 2,0$ . .....	89
4.36 - Gráfico da velocidade angular do elo 2, ganho $K_s = 2,0$ . .....	89
4.37 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 1, ganho $K_s = 2,0$ . .....	90
4.38 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 1, ganho $K_s = 2,0$ . .....	90
A.1 - Diagrama de blocos do simulink para o manipulador flexível. ....	99



## LISTA DE TABELAS

	Pág.
2.1 – FUNÇÕES DE FORMA PARA UMA VIGA ENGASTADA.....	44
2.2 – FUNÇÕES DE FORMA PARA UMA VIGA PINADA.....	44
2.3 - VALORES DAS INTEGRAIS ASSOCIADAS AO ELO 2. ....	53
2.4 – VALORES DAS INTEGRAIS ASSOCIADAS AO ELO 1. ....	59
4.1 – PARÂMETROS DO MANIPULADOR.....	72



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Latinos

$E$	Módulo de Elasticidade de Young
$I_i$	Momento de Inércia da seção transversal
$K_{p_i}$	Ganho Proporcional
$K_{d_i}$	Ganho Derivativo
$K_s$	Ganho do Controlador
$L$	Lagrangiana
$l_i$	Comprimento do elo do manipulador
$M$	Matriz Massa
$m_i$	Massa do elo
$Q^T$	Matriz força generalizada não conservativa
$q_{ij}(t)$	Coordenada generalizada (representa a amplitude do movimento flexível variando no tempo)
$T(t)$	Energia Cinética
$T_d$	Tempo Derivativo
$V(t)$	Energia Potencial do Sistema
$y_i(x_i, t)$	Deflexão transversal de um ponto $x_i$ no tempo $t$

$\dot{y}_i(x_i, t)$  Velocidade de deflexão dos elos em relação à posição de equilíbrio

### **Gregos**

$\beta_n$  Autovalor

$\delta$  Deslocamento virtual

$\delta w$  Trabalho Virtual

$\Phi_{ij}(x_i)$  Função admissível

$\theta_i(t)$  Posição angular

$\dot{\theta}_i(t)$  Velocidade angular

$\ddot{\theta}_i(t)$  Aceleração angular

$\rho_i(x_i)$  Densidade de massa

$\sigma_n$  Coeficiente constante de forma da viga

$\Gamma_{\text{total}}(t)$  Torque total

$\tau_{\text{entrada}}(t)$  Torque de entrada

$\tau_{\text{controle}}(t)$  Torque de controle

$\omega_p$  Freqüência natural do sistema.



## **CAPÍTULO 1**

### **APRESENTAÇÃO**

#### **1.1 - INTRODUÇÃO**

Na história da ciência e tecnologia, avanços teóricos e suas aplicações práticas possuem efeitos mutuamente estimulantes. A área da ciência espacial não é exceção. Como novos e mais avançados sistemas espaciais emergem, a exigência de melhor desempenho, alta eficiência e menores custos tornam-se mais severos, requerendo assim desenvolvimentos teóricos em muitas disciplinas. Das áreas da ciência espacial, uma muito importante é a de projetos, construção e operação de grandes estruturas flexíveis no espaço, como satélites, painéis solares e estações espaciais.

No que diz respeito a estas estruturas a serem colocadas em órbita, em sua forma final de operação, é que geralmente deve ser leves e seu comprimento estar associado a sua missão. Deste modo, sua configuração final depende de fases anteriores e/ou mesmo de sua construção no espaço por meio de robôs manipuladores. Os recentes avanços na área de robótica têm conduzido pesquisadores a dedicarem-se à modelagem e controle de estruturas mais leves e com acentuada flexibilidade, possuindo alta mobilidade e destreza.

Um manipulador é descrito por um conjunto de equações não lineares complexas, onde sofisticadas ferramentas analíticas são necessárias para entender a sua cinemática e dinâmica. Com a função de posicionar e orientar um determinado elemento terminal, que por sua vez, tem a função de manipular ferramentas apropriadas ao trabalho, os manipuladores descrevem comportamentos complexos tornando a modelagem de sua dinâmica difícil. Esta dificuldade reside em se deparar com problemas envolvendo acoplamentos de acelerações e velocidades entre os elos do manipulador e problemas envolvendo a flexibilidade estrutural. Quanto aos acoplamentos, a

princípio, diz-se que podem estar presentes na dinâmica do manipulador, uma vez que, o movimento de cada um de seus membros afeta os demais. Já quanto à flexibilidade, a sua não consideração durante o processo de modelagem do manipulador, pode fazer com que seja obtido um modelo imperfeito.

Em muitas aplicações industriais empregam-se manipuladores com elos rígidos. O aumento na rigidez minimiza a vibração estrutural, mas traz o inconveniente de aumentar o peso e conseqüentemente, potências mais elevadas são necessárias para efetuar as manobras. Com tudo, ao se comparar manipuladores com elos flexíveis e elos rígidos, fica claro que os primeiros necessitam de menos material para sua fabricação, são mais leves, rápidos, consomem menos energia e são geralmente mais fáceis de serem transportados.

Na área espacial, além das vantagens mencionadas acima, tem-se a limitação de peso por parte dos veículos espaciais e a necessidade de elos mais longos, o que torna o estudo e desenvolvimento de estruturas flexíveis preponderante. Por estas razões, o uso de manipuladores flexíveis está diretamente relacionado com otimização de custos e benefícios. Como exemplo da aplicação de robôs manipuladores na área espacial, cita-se o projeto da *International Space Station (ISS)* que depende da ação direta do manipulador *Shuttle Remote Manipulator System (SRMS)* para sua conclusão Figura (1.1).



Fig. 1.1 - ISS e SRMS.

## 1.2 - OBJETIVOS

Os objetivos desta pesquisa são:

- Modelagem da dinâmica do manipulador através de equações de movimento;
- Projeto de um sistema de controle capaz de controlar o movimento de corpo rígido do manipulador;
- Simulação da dinâmica do manipulador;
- Estudo da influência da flexibilidade no sistema de controle;
- Estudo das frequências naturais do sistema com relação ao posicionamento dos elos.

## 1.3 - JUSTIFICATIVA

O estudo da dinâmica e controle de estruturas revela-se importante devido as aplicações em robótica, satélites e veículos espaciais com elementos flexíveis.

Observa-se ainda que, a pesquisa da dinâmica e sistemas de controle de estruturas flexíveis é de grande importância e envolve centros de pesquisas

espaciais do mundo inteiro; haja visto o projeto da ISS atualmente responsável pelo grande avanço nesta área.

Especificamente, a realização desse trabalho visa dar continuidade ao acordo firmado entre o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, **INPE**, (Brasil), e o Deutsches Zentrum für Luft-und Raumfahrt, **DLR**, (Alemanha), na área de robótica somando pesquisas e produções de trabalhos científicos nesta área, além de constituir uma das formas de se inserir pesquisadores deste Instituto no cenário de tecnologia espacial mundial.

## **1.4 - METODOLOGIA**

### **1.4.1 - MODELAGEM**

O sistema modelado é composto por um manipulador com dois elos flexíveis e duas juntas acoplado a um veículo ou estação espacial. Em geral, um problema de controle consiste na utilização do modelo dinâmico do manipulador, utilizando-o para determinar as leis de controle que fornecem um desempenho desejado. O modelo dinâmico é descrito por um conjunto de equações diferenciais chamadas de equações de movimento, no qual o projeto do sistema de controle é baseado. O Formalismo de Lagrange e o Método dos Modos Admitidos são utilizados no desenvolvimento do modelo.

Para efeito de comparação e estudo da flexibilidade da estrutura foram feitos dois outros modelos além do modelo flexível/flexível: um rígido/rígido e outro rígido/flexível, mas ambos sujeitos às mesmas condições iniciais, de torque e controle.

Ressalta-se ainda o fato de que o problema é tratado com suas não linearidades, sem usar de nenhuma linearização, processo que é utilizado na área para simplificar as equações de movimento, como nos trabalhos de Tomei e Tornambè (1988). Assim, um dos desafios deste trabalho é tratar as equações de movimento sem linearizações.

Como complementação deste estudo, em anexo, faz-se uma análise estrutural com intuito de se obter as frequências de vibração do sistema em algumas configurações de posição dos elos do manipulador. Esta análise embora seja uma análise estática envolvendo a Teoria de Elementos Finitos, é prática no desenvolvimento de estruturas juntamente com a análise das frequências de vibração sujeito à variação de cargas.

Apresenta-se a seguir as considerações para o desenvolvimento deste trabalho:

- o veículo onde o manipulador está acoplado, chamado de corpo base, está considerado fixo no espaço; isto permite que sua dinâmica não seja considerada;
- o movimento do manipulador se dá no plano XY;
- os elos são tratados como vigas uniformes podendo sofrer deflexões transversais apenas no plano XY;
- as juntas não sofrem deflexões;
- as equações da dinâmica dos atuadores e motores das juntas não são consideradas neste trabalho;
- os torques aplicados ao sistema, chamados de torque de entrada, podem ser comandados;

#### **1.4.2 - SISTEMA DE CONTROLE**

Uma das formas de se minimizar as deflexões sofridas pela estrutura durante uma manobra é a movimentação em baixa velocidade dos elos do manipulador, evitando assim, uma maior excitação da parte flexível e conseqüentemente diminuindo os riscos à missão.

Porém, no que diz respeito a controle de robôs manipuladores, está-se referindo a assegurar que as forças aplicadas no sistema, o levarão a se deslocar sobre uma trajetória desejada. Neste trabalho, a Lei de Controle empregada está baseada em um controlador do tipo PD (Proporcional + Derivativo). Dado um torque de entrada no sistema é função deste controlador restabelecer o estado inicial do manipulador quanto à velocidade dos elos; controlando o movimento de corpo rígido.

A fim de verificar a eficiência da ação do controlador, faz-se algumas simulações variando os ganhos do controlador onde esta variação foi feita de forma manual e aleatória. Comprovada a eficiência do controlador, estuda-se a influência da flexibilidade no modelo através da comparação dos resultados obtidos para os modelos.

#### **1.4.3 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL**

A implementação computacional deste trabalho se realiza basicamente nos Softwares *Matlab*<sup>®</sup> e *Nastran*<sup>®</sup>.

Utiliza-se o *Matlab*<sup>®</sup> e o *Simulink*<sup>®</sup>, para simular a dinâmica do manipulador e o sistema de controle (SC).

No *Nastran*<sup>®</sup>, utilizando o *Femap*<sup>®</sup>, faz-se a análise estrutural do manipulador obtendo as frequências de vibração do sistema.

#### **1.5 - BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

O problema de estudar a dinâmica e controle de estruturas com elementos flexíveis como satélites, veículos espaciais e robôs manipuladores, constitui uma área de pesquisa onde diferentes metodologias para resolver este problema podem ser empregadas. O trabalho desenvolvido por Benati e Morro (1988), trata o problema de obter a dinâmica de um conjunto de elos flexíveis através do Formalismo de Lagrange. Cada elo é modelado como um sistema

com número finito de graus de liberdade onde, um destes descreve a rotação e os demais descrevem a flexibilidade. Embora estude sistemas com um número qualquer de elos, as equações dinâmicas são escritas para um sistema com dois elos e uma carga. Finalizando, uma curta discussão é feita sobre possíveis metodologias de linearização das equações dinâmicas.

Em Joshi *et al* (1995), foi desenvolvido um estudo da dinâmica de um manipulador flexível aplicado à área espacial controlado por um LQG (Linear Quadratic Gaussian). Nesse trabalho, a configuração do sistema consiste de um corpo central com dois elos flexíveis articulados. O modelo foi desenvolvido no Nastran, onde o primeiro elo foi modelado como uma viga pinada-pinada e a segunda como pinada-livre. Dado as condições iniciais e a perturbação no modelo, o sistema de controle desenvolvido tem a função de restituir o estado inicial do manipulador quanto à posição e velocidade.

O trabalho desenvolvido por David (1996) se refere à modelagem dinâmica de robôs manipuladores flexíveis. Neste trabalho, desenvolve-se a modelagem para um sistema que possui dois elos flexíveis e duas juntas e para efeito de comparação trabalha-se com uma estrutura rígida nas mesmas condições. Trata o problema sem nenhuma linearização mantendo as equações mais genéricas possível de modo que as simulações sejam realizadas mostrando a possibilidade de compensação de efeitos físicos num problema de controle robótico.

O modelo de robôs em elementos flexíveis é raramente obtido do ponto de vista de simulação e/ou controle. De fato, refletindo a natureza distribuída da flexibilidade do elemento, o modelo é representado através de equações diferenciais parciais não-lineares. O trabalho de Tomei e Tornambè (1988) apresenta um método para derivar modelos dinâmicos aproximados que consistem em um sistema de equações diferenciais ordinárias cuja ordem, para um determinado robô, é relacionado à ordem desejada de aproximação. Tal modelo é obtido usando o formalismo de Lagrange e um número limitado de

condições para as coordenadas generalizadas que descrevem a forma exata das vigas que constituem o robô. São incluídos testes de simulação para validar o modelo proposto. Estes testes revelam resultados satisfatórios em termos de comportamento dinâmico para o modelo proposto e são possíveis mesmo com uma ordem reduzida de aproximação.

O trabalho de Theodore e Ghosal (1995) trata de comparar dois modelos de discretização: o modelo por Modos Admitidos e o modelo de Elementos Finitos aplicados para representar os elos flexíveis de um robô manipulador. Apresenta uma modelagem sistemática para manipuladores flexíveis com juntas revolutas e prismáticas. A formulação de Lagrange é aplicada para obter as equações de movimento. Theodore mostra que poucas operações matemáticas são requeridas para calcular a matriz de inércia no modelo de elementos finitos quando comparado com a formulação através de modos Admitidos. Porém, o número de equações de espaço de estado é maior. Assim, o tempo de simulação pode ser maior para o modelo de elementos finitos. Os resultados são ilustrados por simulação numérica de um robô flexível. Como conclusão, recomenda o uso da formulação de modos admitidos para a discretização de manipuladores flexíveis com geometria de seção reta uniforme. Por outro lado, a formulação utilizando elementos finitos é particularmente recomendada para manipuladores com geometria de seção reta complexa e com vários elementos flexíveis.

Pade e Panja (1987) descrevem um controlador globalmente estável para robôs manipuladores. Uma das características atraentes deste controlador é sua semelhança ao controlador de torque computado e realimentação de velocidade. O controlador é decomposto em um PD (proporcional+derivativo) e uma compensação dinâmica. Esta estrutura permite simulações com o controlador PD a uma velocidade mais alta.



## **1.6 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

Esse trabalho está dividido em cinco capítulos os quais estão apresentados a seguir:

No Capítulo 1, apresenta-se uma introdução da pesquisa, os objetivos, as justificativas, a motivação para este estudo, a metodologia aplicada bem como a revisão bibliográfica de trabalhos que abordam o mesmo assunto e a organização geral desta dissertação.

O Capítulo 2 apresenta a modelagem do manipulador com todas as equações de movimento dos modelos empregados sem considerar o sistema de controle (malha aberta).

No Capítulo 3, apresenta-se a breve teoria do sistema de controle aplicado neste estudo e sua implementação aos modelos desenvolvidos no capítulo 2.

O Capítulo 4 apresenta as simulações realizadas e os resultados da dinâmica obtidos neste trabalho.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Apresenta-se ainda em anexo o diagrama de blocos para um dos modelos desenvolvido na implementação computacional (Anexo A) a fim de ilustrar a maneira com o qual se trabalhou no Simulink®; no Anexo B encontra-se a Análise Estrutural do sistema flexível, obtendo as frequências de vibração da estrutura em função do posicionamento dos elos do manipulador.



## CAPÍTULO 2

### MODELAGEM DINÂMICA

#### 2.1 - DINÂMICA DO MANIPULADOR

Neste capítulo é apresentado um modelo matemático para um mecanismo constituído de duas vigas uniformes conectadas por meio de juntas, o qual será utilizado para representar o manipulador proposto (Figura 2.1).

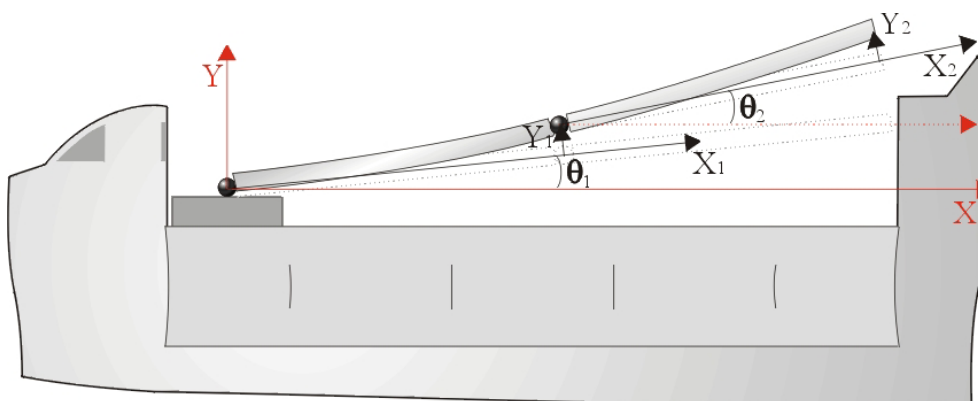


Fig. 2.1 - Modelo físico do manipulador.

O comportamento dinâmico de um manipulador é obtido em termos dos deslocamentos angulares de seus elos ao longo do tempo mediante a torques aplicados às juntas. Este comportamento pode ser descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias chamado de conjunto de equações dinâmicas de movimento. Estas equações são obtidas através do Formalismo de Lagrange (Greenwood, 1965) e do Método dos Modos Admitidos (Meirovitch, 1986).

##### 2.1.1 - PRINCÍPIO DE HAMILTON E EQUAÇÕES DE LAGRANGE

O Princípio de Hamilton, um princípio da mecânica variacional, diz que a variação da integral da energia cinética menos a potencial mais a integral do trabalho virtual feito por forças não conservativas durante qualquer intervalo de tempo  $t_1$  a  $t_2$  deve ser igual a zero. Assim:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (2.1)$$

Onde,  $T$  é a energia cinética do sistema, expressa em termos das coordenadas generalizadas e de suas primeiras derivadas no tempo,  $V$  é a energia potencial (gravitacional, elástica e energia potencial de forças externas conservativas), sendo expressa somente em termos das coordenadas generalizadas,  $\delta$  representa o operador deslocamento virtual e  $\delta W_{nc}$  é o trabalho virtual feito por forças não conservativas (incluindo forças de amortecimento e forças externas não determinadas em  $V$ ) atuando no sistema.

Definindo a seguinte quantidade,

$$L = T - V \quad (2.2)$$

conhecida como *Lagrangiana* e substituindo-a em (2.1), obtém-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (2.3)$$

Onde, o trabalho virtual  $\delta W_{nc}$  pode ser escrito na seguinte forma:

$$\delta W_{nc} = Q_{nc}^T \delta q \quad (2.4)$$

com,  $Q_{nc}^T$  sendo um vetor de forças generalizadas não conservativas e  $q$  coordenadas generalizadas definidas em qualquer conjunto de  $N$  variáveis independentes.

Logo,

$$\begin{aligned} T &= T(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \\ V &= V(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ \delta W_{nc} &= Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n \end{aligned} \quad (2.5)$$

Utilizando a técnica do cálculo das variações mostra-se que (Shabana, 1989):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial L}{\partial q} \right] \delta q dt \quad (2.6)$$

Das Equações (2.4) e (2.6) segue que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right] \delta q dt - \int_{t_1}^{t_2} Q_{nc}^T \delta q dt = 0 \quad (2.7)$$

ou

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_{nc}^T \right] \delta q dt = 0 \quad (2.8)$$

Se  $\delta q$  são linearmente independentes, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_{nc}^T = 0^T \quad (2.9)$$

A Equação (2.9) se resume a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_{nc}^T \quad (2.10)$$

Para sistemas discretos as coordenadas generalizadas  $q_i$  são funções do tempo somente, enquanto que para sistemas contínuos (sistema de parâmetros distribuídos) algumas ou todas as coordenadas generalizadas são funções de espaço e tempo. Assim, a energia cinética e energia potencial incluem derivadas e integrais sobre um domínio elástico (Junkins e Kim, 1993).

Do ponto de vista mais geral da mecânica as estruturas flexíveis são interpretadas como sistemas contínuos. Assim, aplicando os princípios da mecânica clássica a estes sistemas, estes são rigorosamente conduzidos a um

sistema de equações diferenciais parciais que governam seu movimento (Meirovitch, 1967).

Estas equações de movimento são usualmente híbridas no sentido de que o movimento completo é descrito pelo movimento de corpo rígido e movimento elástico. Sendo o movimento de corpo rígido descrito através de coordenadas variantes no tempo e o movimento elástico descrito no tempo e no espaço. Assim, o sistema resultante de equações diferenciais expressa acoplamentos entre movimento de corpo rígido e flexível (Meirovitch , 1990).

As seções seguintes descrevem a cinemática do manipulador, bem como as expressões para a energia cinética e energia potencial do sistema que posteriormente serão utilizadas para obter as equações de movimento.

### 2.1.2 - DESCRIÇÃO CINEMÁTICA

Visando obter as equações de movimento encontram-se primeiramente os vetores posição e velocidade de um ponto qualquer ao longo da estrutura.

#### 2.1.2.1 - VETOR POSIÇÃO E VETOR VELOCIDADE DE UM PONTO NO PRIMEIRO ELO

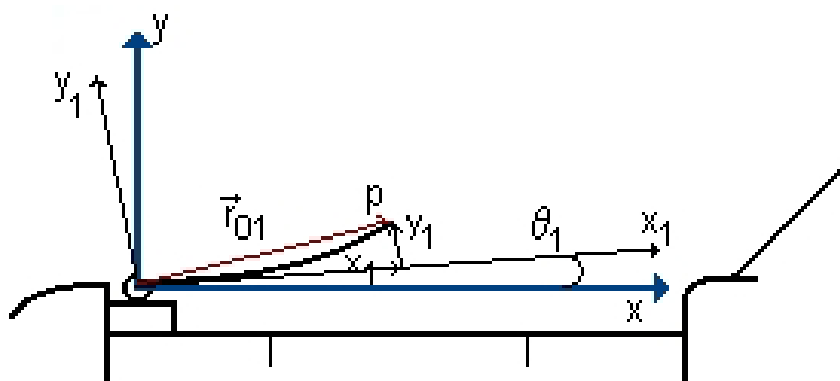


Fig. 2.2 - Vetor posição de um ponto p sobre o elo 1.

O vetor posição de um ponto p qualquer sobre o primeiro elo pode ser escrito na seguinte forma:

$$\vec{r}_{O1} = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} \quad (2.11)$$

O vetor velocidade deste ponto no primeiro elo é:

$$\dot{\vec{r}}_{01} = \dot{x}_1 \hat{i} + \dot{y}_1 \hat{j} + x_1 \dot{\hat{i}} + y_1 \dot{\hat{j}} \quad (2.12)$$

Neste trabalho  $\dot{x}_1 \hat{i}$  é descartado, pois não considera-se a flexibilidade longitudinal e sim somente a flexibilidade transversal. Assim, a Equação (2.12) se resume a:

$$\dot{\vec{r}}_{01} = \dot{y}_1 \hat{j} + x_1 \dot{\hat{i}} + y_1 \dot{\hat{j}} \quad (2.13)$$

Pode-se ainda escrever a Equação (2.13) como:

$$\dot{\vec{r}}_{01} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{01} + \dot{y}_1 \hat{j} \quad (2.14)$$

Onde,  $\dot{y}_1 \hat{j}$  é referente ao corpo deformado e

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{01} = x_1 \dot{\hat{i}} + y_1 \dot{\hat{j}} \quad (2.15)$$

Fazendo  $\vec{\omega}_1 = \dot{\theta}_1$ , pode-se escrever a Equação (2.14) da seguinte forma:

$$\dot{\vec{r}}_{01} = \dot{\theta}_1 \times \vec{r}_{01} + \dot{y}_1 \hat{j} \quad (2.16)$$

$$\dot{\vec{r}}_{01} = \dot{\theta}_1 \times (x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j}) + \dot{y}_1 \hat{j} \quad (2.17)$$

O produto vetorial da Equação (2.17) pode ser obtido como:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ x_1 & y_1 & 0 \end{vmatrix} = x_1 \dot{\theta}_1 \hat{j} - y_1 \dot{\theta}_1 \hat{i} \quad (2.18)$$

Logo,

$$\dot{\vec{r}}_{01} = x_1 \dot{\theta}_1 \hat{j} + \dot{y}_1 \hat{j} - y_1 \dot{\theta}_1 \hat{i} \quad (2.19)$$

A Equação (2.19) pode ser escrita como:

$$\dot{\vec{r}}_{01} = (x_1\dot{\theta}_1 + \dot{y}_1)\hat{j} - y_1\dot{\theta}_1\hat{i} \quad (2.20)$$

### 2.1.2.2 - VETOR POSIÇÃO E VETOR VELOCIDADE DE UM PONTO NO SEGUNDO ELO

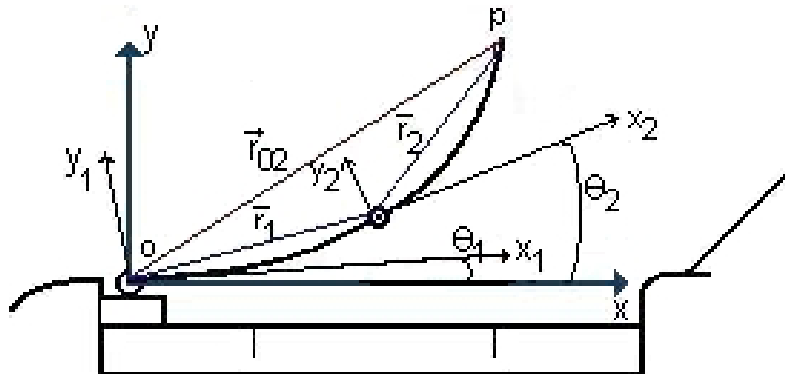


Fig. 2.3 - Vetor posição de um ponto p sobre o elo 2.

Pode-se escrever o vetor posição de um ponto p qualquer sobre o segundo elo da seguinte forma:

$$\vec{r}_{02} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \quad (2.21)$$

O vetor velocidade deste ponto no segundo elo é:

$$\dot{\vec{r}}_{02} = \dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2 \quad (2.22)$$

Onde,

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_{01}(l_1) \quad (2.23)$$

Assim,

$$\dot{\vec{r}}_1 = (l_1\dot{\theta}_1 + \dot{y}_1(l_1, t))\hat{j} \quad (2.24)$$

Procedendo de forma análoga a seção anterior, obtém-se:



$$\dot{\vec{r}}_2 = \vec{\omega} \times \vec{r}_2 + \dot{y}_2 \hat{j}' \quad (2.25)$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \dot{\theta}_2 \times \vec{r}_2 + \dot{y}_2 \hat{j}' \quad (2.26)$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \dot{\theta}_2 \times (x_2 \hat{i}' + y_2 \hat{j}') + \dot{y}_2 \hat{j}' \quad (2.27)$$

O produto vetorial da Equação (2.27) pode ser escrito como:

$$\begin{vmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = x_2 \dot{\theta}_2 \hat{j}' - y_2 \dot{\theta}_2 \hat{i}' \quad (2.28)$$

Logo,

$$\dot{\vec{r}}_2 = (x_2 \dot{\theta}_2 + \dot{y}_2) \hat{j}' - y_2 \dot{\theta}_2 \hat{i}' \quad (2.29)$$

Assim pode-se escrever a Equação (2.22), como:

$$\dot{\vec{r}}_{02} = (l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{y}_1(l_1, t)) \hat{j} - y_1 \dot{\theta}_1 \hat{i} + (x_2 \dot{\theta}_2 + \dot{y}_2) \hat{j}' - y_2 \dot{\theta}_2 \hat{i}' \quad (2.30)$$

Assumindo pequenos deslocamentos elásticos a contribuição das componentes de velocidade  $y_1 \dot{\theta}_1 \hat{i}$  e  $y_2 \dot{\theta}_2 \hat{i}'$  perpendiculares as direções  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente, são muito pequenas sendo portanto negligenciadas neste estudo. Assim, as Equações (2.20) e (2.30) tornam-se:

$$\dot{\vec{r}}_{01} = (x_1 \dot{\theta}_1 + \dot{y}_1) \hat{j} \quad (2.31)$$

$$\dot{\vec{r}}_{02} = (l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{y}_1(l_1, t)) \hat{j} + (x_2 \dot{\theta}_2 + \dot{y}_2(l_2, t)) \hat{j}' \quad (2.32)$$

## 2.1.3 - ENERGIA CINÉTICA E ENERGIA POTENCIAL

### 2.1.3.1 - ENERGIA CINÉTICA

A energia cinética do sistema é dada por:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i \quad (2.33)$$

Onde,  $i = 1, 2$  e

$$T_i = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \rho_i \dot{\vec{r}}_{0i} \cdot \dot{\vec{r}}_{0i} dx_i \quad (2.34)$$

Desta forma, escreve-se a expressão para energia cinética do elo 1 como:

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \rho_1 (\dot{x}_1 \dot{\theta}_1(t) + \dot{y}_1(x_1, t))^2 dx_1 \quad (2.35)$$

A fim de escrever a expressão da energia cinética para o segundo elo, calcula-se o produto escalar  $\dot{\vec{r}}_{02} \cdot \dot{\vec{r}}_{02}$  a partir da Equação (2.32) obtendo:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_{02} \cdot \dot{\vec{r}}_{02} = & (l_1 \dot{\theta}_1(t) + \dot{y}_1(l_1, t))^2 + (x_2 \dot{\theta}_2(t) + \dot{y}_2(x_2, t))^2 + \\ & 2(l_1 \dot{\theta}_1(t) + \dot{y}_1(l_1, t))(x_2 \dot{\theta}_2(t) + \dot{y}_2(x_2, t)) \cos(\theta_2(t) - \theta_1(t)) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Logo, a energia cinética para o segundo elo é:

$$\begin{aligned} T_2 = & \frac{1}{2} \rho_2 l_2 (l_1 \dot{\theta}_1(t) + \dot{y}_1(l_1, t))^2 + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \rho_2 (x_2 \dot{\theta}_2(t) + \dot{y}_2(x_2, t))^2 dx_2 + \\ & (l_1 \dot{\theta}_1(t) + \dot{y}_1(l_1, t)) \cos(\theta_2(t) - \theta_1(t)) \int_0^{l_2} \rho_2 (x_2 \dot{\theta}_2(t) + \dot{y}_2(x_2, t)) dx_2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Substituindo as Equações (2.37) e (2.35) em (2.33) a Energia Cinética Total do sistema pode ser expressa por (Junkins e Kim, 1993):

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \rho_1 (\dot{x}_1 \dot{\theta}_1(t) + \dot{y}_1(x_1, t))^2 dx_1 + \frac{1}{2} \rho_2 l_2 (\dot{l}_1 \dot{\theta}_1(t) + \dot{y}_1(l_1, t))^2 + \\
& \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \rho_2 (\dot{x}_2 \dot{\theta}_2(t) + \dot{y}_2(x_2, t))^2 dx_2 + \\
& (\dot{l}_1 \dot{\theta}_1(t) + \dot{y}_1(l_1, t)) \cos(\theta_2(t) - \theta_1(t)) \int_0^{l_2} \rho_2 (\dot{x}_2 \dot{\theta}_2(t) + \dot{y}_2(x_2, t)) dx_2
\end{aligned} \tag{2.38}$$

### 2.1.3.2 - ENERGIA POTENCIAL

A energia potencial do sistema é dada por:

$$V = \sum_{i=1}^n (V_{\text{gravitacional}_i} + V_{\text{elastica}_i}) \tag{2.39}$$

Visando a aplicação na área espacial, assume-se neste trabalho que a influência da gravidade não possui um papel relevante, sendo portanto sua contribuição desconsiderada na expressão da energia potencial do sistema. Assim, a Equação (2.39), se reduz a:

$$V = \sum_{i=1}^n V_{\text{elastica}_i} \tag{2.40}$$

Especificamente a Equação (2.40) pode ser escrita como (David, 1996):

$$V = + \frac{1}{2} \int_0^{l_1} EI_1 \left( \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} EI_2 \left( \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2 \tag{2.41}$$

onde,

$\rho_i(x)$  - massa/unidade de comprimento da i-ésima viga, assumida constante ao longo da estrutura.

$EI_i$  - rigidez da i-ésima viga, assumida constante ao longo da estrutura.

$l_i$  - comprimento da  $i$ -ésima viga.

$y_i(x_i, t)$ - deflexão elástica da  $i$ -ésima viga.

No entanto, antes de substituir as Equações (2.38) e (2.41) em (2.10) e obter o conjunto de equações diferenciais que descrevem o movimento do manipulador, apresenta-se na próxima seção um estudo sobre os deslocamentos flexíveis presentes no sistema e o método com o qual são estudados.

## 2.2 - MÉTODO DOS MODOS ADMITIDOS

No método dos modos Admitidos a deflexão de estruturas elásticas é modelada por uma série finita de funções, dependentes do espaço, multiplicadas por funções dependentes do tempo (Meirovitch e Quinn, 1986). Estas últimas tornam-se um conjunto de coordenadas generalizadas na interpretação lagrangiana. As funções dependentes do espaço constituem um conjunto de funções linearmente independentes selecionadas para satisfazer as condições geométricas, sendo chamadas de funções admissíveis. Se a formulação do problema exigir que além das condições geométricas todas ou algumas das condições físicas sejam atendidas, novas funções devem ser tomadas e estas passam a ser chamadas de funções comparação. As condições geométricas estão relacionadas com a geometria da viga nas extremidades, enquanto que, as condições físicas consideram a presença de Tensões de Cisalhamento e Momento Fletor na viga.

Assim, pode-se matematicamente escrever a solução dos movimentos flexíveis na seguinte forma (Junkins e Kim, 1993):

$$y_i(x_i, t) = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij}(x_i) q_{ij}(t) \quad (2.41)$$

onde,  $i$  indica o elo flexível considerado,  $j$  o número de termos retidos na aproximação,  $q_{ij}(t)$  indica as coordenadas generalizadas relacionada aos deslocamentos flexíveis e  $\Phi_{ij}(x)$  denota as funções de forma escolhidas para descrever as deflexões das vigas ao longo de seu comprimento (Meirovitch, 1990).

Especificamente, neste trabalho apenas o primeiro modo de vibração é estudado. Assim trunca-se o modelo em  $j$  igual a 1 resultando num problema de 4 graus de liberdade  $(2n + 2)$ . Deste modo, os deslocamentos flexíveis dos elos 1 e 2 ficam representados respectivamente por:

$$y_1(x_1, t) = \Phi_{11}(x_1)q_{11}(t) \quad (2.42)$$

$$y_2(x_2, t) = \Phi_{21}(x_2)q_{21}(t) \quad (2.43)$$

### 2.2.1 - FUNÇÃO DE FORMA

Nesta seção, as funções de formas utilizadas para representar os deslocamentos flexíveis dos elos do manipulador, bem como suas formas ao longo da estrutura são graficamente apresentadas.

As tabelas a seguir fornecem algumas funções de forma, comumente utilizadas em trabalhos da área encontradas na literatura. A exemplo de Joshi *et al* (1995), as funções pinada-pinada e pinada-livre (Bernhard, 1943) são utilizadas para representar os deslocamentos flexíveis do sistema. Estas funções satisfazem as condições de contorno geométricas da viga considerada.

TABELA. 2.1 – FUNÇÕES DE FORMA PARA UMA VIGA ENGASTADA

Configuração	$\beta$	$\Phi_{ij}(x_i)$	$\sigma_n$
Engastada-Engastada	4.7300	$\cosh(\beta l) - \cos(\beta l) - \sigma_n(\sinh(\beta l) - \sin(\beta l))$	0.9825
Engastada-livre	1.8751	$\cosh(\beta l) - \cos(\beta l) - \sigma_n(\sinh(\beta l) - \sin(\beta l))$	0.7341

FONTE: Tables of Characteristics Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam (Young e Felgar Jr., 1949).

TABELA 2.2 – FUNÇÕES DE FORMA PARA UMA VIGA PINADA

Configuração	$\beta$	$\Phi_{ij}(x_i)$	$\sigma_n$
Pinada-pinada	$j\pi$	$\text{sen}\left(\frac{j\pi x}{l}\right)$	Nulo
Pinada-livre	3.9266	$\cosh\left(\frac{(l-x)}{l}\beta\right) + \cos\left(\frac{(l-x)}{l}\beta\right) - \sigma_n\left(\sinh\left(\frac{(l-x)}{l}\beta\right) + \text{sen}\left(\frac{(l-x)}{l}\beta\right)\right)$	1.0008

FONTE: Bernhard (1943).

Onde,  $l$  é o comprimento do elo considerado e  $\sigma_n$  são valores característicos do tipo de viga considerada na modelagem.

A seguir apresenta-se a forma para os modos Admitidos neste trabalho segundo as Tabelas (2.1) e (2.2).

### 2.2.1.1 - FORMA PARA O PRIMEIRO MODO DO ELO 1

O primeiro elo pode ser modelado como uma viga pinada-pinada ou engastada-engastada, onde suas formas para o primeiro modo são respectivamente pelas Figuras (2.4) e (2.5).

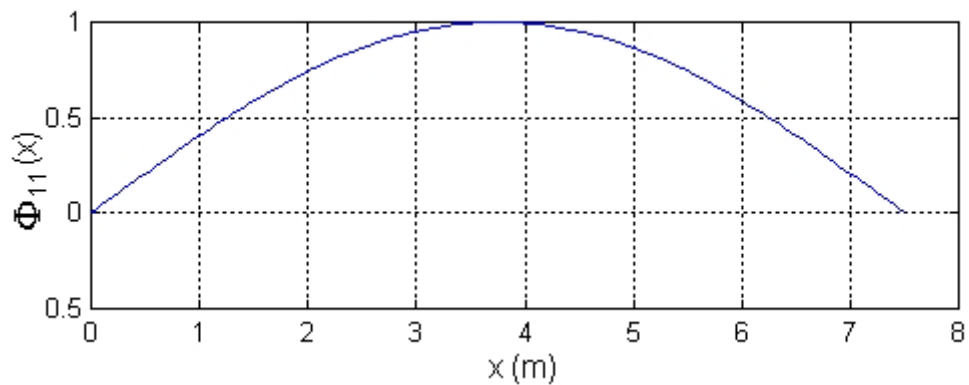


Fig. 2.4 - Forma para o primeiro modo do elo 1 modelado como pinada-pinada ( $l = 7.5m$ ).

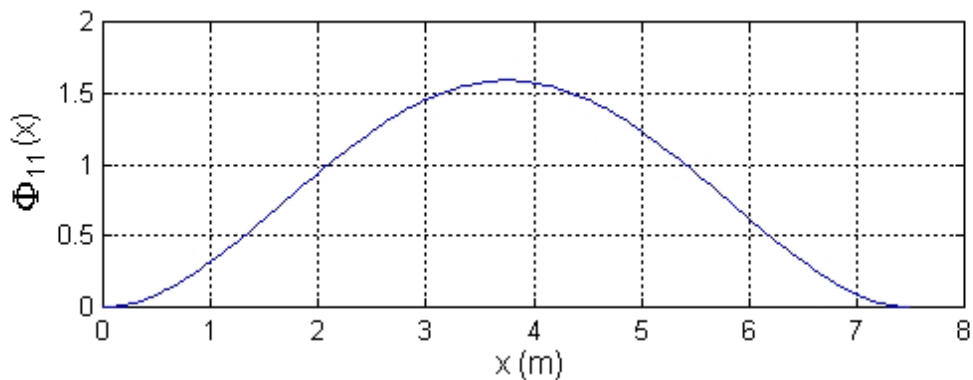


Fig. 2.5 - Forma para o primeiro modo do elo 1 modelado como engastada-engastada ( $l = 7.5m$ ).

### 2.2.1.2 - FORMA PARA O PRIMEIRO MODO DO ELO 2

O segundo elo do manipulador pode ser modelado como uma viga pinada-livre ou uma viga engastada-livre. Assim, as formas para o primeiro modo são dadas pelas Figuras (2.6) e (2.7).

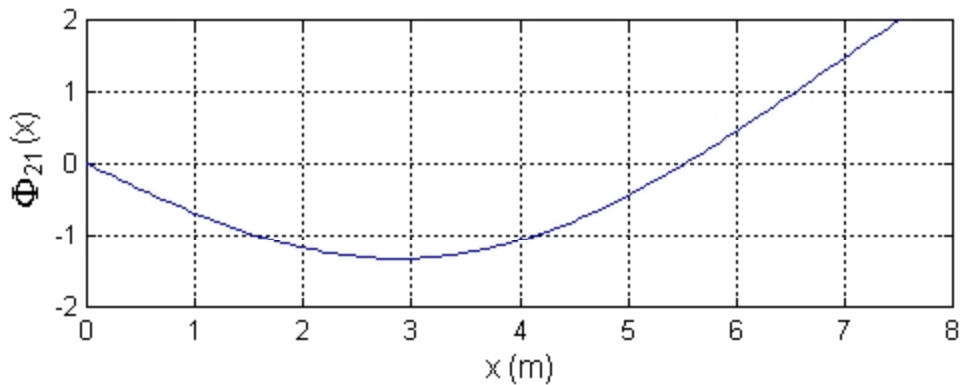


Fig. 2.6 - Forma para o primeiro modo do elo 2 modelado como pinada-livre ( $l = 7.5\text{m}$ ).

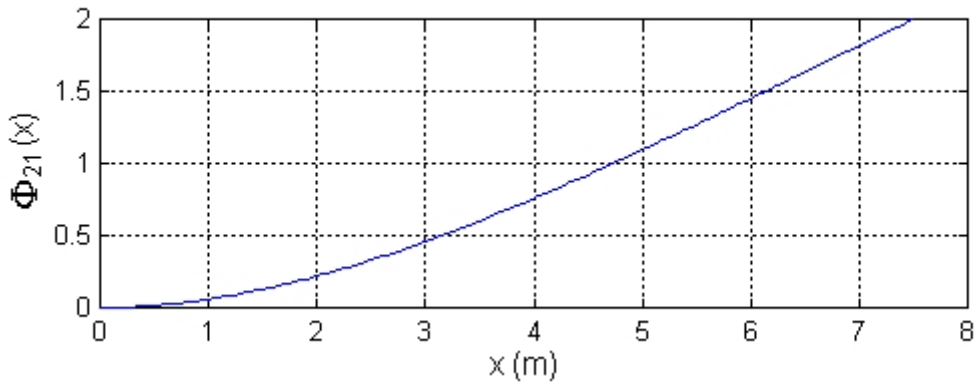


Fig. 2.7 - Forma para o primeiro modo do elo 2 modelado como engastada-livre ( $l = 7.5\text{m}$ ).

### 2.3 - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Nesta seção, obtém-se as equações de movimento para o manipulador proposto. Inicialmente, desenvolve-se um modelo assumindo que os elos são rígidos. A partir daí considera-se o segundo elo flexível obtendo um novo modelo. Finalizando este capítulo obtém-se as equações de movimento para o manipulador com dois elos flexíveis.



### 2.3.1 - MANIPULADOR RÍGIDO/RÍGIDO

As equações de movimento para o manipulador com elos rígidos são obtidas eliminando os termos associados à flexibilidade das Equações (2.30) e (2.31). Assim, pode-se escrever:

$$\dot{\vec{r}}_{01} = (\dot{x}_1 \dot{\theta}_1) \vec{j} \quad (2.44)$$

$$\dot{\vec{r}}_{02} = (l_1 \dot{\theta}_1) \vec{j} + (\dot{x}_2 \dot{\theta}_2) \vec{j}' \quad (2.45)$$

Substituindo as Equações (2.44) e (2.45) em (2.32) obtém-se a seguinte expressão para energia cinética.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \rho_1 (\dot{x}_1 \dot{\theta}_1(t))^2 dx_1 + \frac{1}{2} \rho_2 l_2 (l_1 \dot{\theta}_1(t))^2 + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \rho_2 (\dot{x}_2 \dot{\theta}_2(t))^2 dx_2 + (l_1 \dot{\theta}_1(t)) \cos(\theta_2 - \theta_1) \int_0^{l_2} \rho_2 (\dot{x}_2 \dot{\theta}_2(t)) dx_2 \quad (2.46)$$

Tratando-se de elos rígidos a energia potencial do sistema torna-se nula,  $V = 0$ . Assim, a Equação (2.10) se resume a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q^T \quad (2.47)$$

Onde, o conjunto de coordenadas generalizadas e os torques para o modelo rígido/rígido são dados por:

$$q_i = [\theta_1(t) \quad \theta_2(t)]^T \quad (2.48)$$

$$Q^T = [\tau_1(t) \quad \tau_2(t)] \quad (2.49)$$

Substituindo a Equação (2.46) na Equação (2.47) e resolvendo no conjunto dado pela Expressão (2.48) obtém-se as seguintes equações de movimento para o manipulador rígido.

Equação para  $\theta_1(t)$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} = \tau_1(t) \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = \left( \frac{1}{3} \rho_1 l_1^3 + \rho_2 l_2 l_1^2 \right) \dot{\theta}_1(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2(t) \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \left( \frac{1}{3} \rho_1 l_1^3 + \rho_2 l_2 l_1^2 \right) \ddot{\theta}_1(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2(t) + \\ &- \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2^2(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) \quad (2.53)$$

Substituindo (2.52) e (2.53) em (2.50) obtém-se a equação de movimento para  $\theta_1(t)$ .

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{3} \rho_1 l_1^3 + \rho_2 l_2 l_1^2 \right) \ddot{\theta}_1(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2 l_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2(t) - \frac{1}{2} \rho_2 l_2 l_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2^2(t) \\ &= \tau_1(t) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Equação para  $\theta_2(t)$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = \tau_2(t) \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{1}{3} \rho_2 l_2^3 \dot{\theta}_2(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \quad (2.56)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \frac{1}{3} \rho_2 l_2^3 \ddot{\theta}_2(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2(t) - \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) \quad (2.58)$$

Substituindo (2.57) e (2.58) em (2.55) obtém-se a equação de movimento para  $\theta_2(t)$ .

$$\frac{1}{3} \rho_2 l_2^3 \ddot{\theta}_2(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_1 l_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_1 l_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2(t) = \tau_2(t) \quad (2.59)$$

### 2.3.2 - MANIPULADOR RÍGIDO/FLEXÍVEL

Obtém-se nesta seção as equações de movimento para o manipulador rígido/flexível.

De forma análoga à seção anterior, pode-se escrever Equações (2.30) e (2.31), eliminando o termo relacionado à flexibilidade do primeiro elo, da seguinte forma:

$$\dot{\vec{r}}_{01} = (\dot{x}_1 \dot{\theta}_1) \vec{j} \quad (2.60)$$

$$\dot{\vec{r}}_{02} = (l_1 \dot{\theta}_1) \vec{j} + (\dot{x}_2 \dot{\theta}_2 + \dot{y}_2(l_2, t)) \vec{j}' \quad (2.61)$$

Substituindo as Equações (2.60) e (2.61) em (2.32) obtém-se a seguinte expressão para energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \rho_1 (\dot{x}_1 \dot{\theta}_1(t))^2 dx_1 + \frac{1}{2} \rho_2 l_2 (l_1 \dot{\theta}_1(t))^2 + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \rho_2 (\dot{x}_2 \dot{\theta}_2(t) + \dot{y}_2(x_2, t))^2 dx_2 + (l_1 \dot{\theta}_1(t)) \cos(\theta_2 - \theta_1) \int_0^{l_2} \rho_2 (\dot{x}_2 \dot{\theta}_2(t) + \dot{y}_2(x_2, t)) dx_2 \quad (2.62)$$

A energia potencial para este caso é dada por:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} E I_2 \left( \frac{\partial^2 y_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2 \quad (2.63)$$

Substituindo a Equação (2.43) em (2.62) e (2.63) tem-se:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \rho_1 (x_1 \dot{\theta}_1(t))^2 dx_1 + \frac{1}{2} \rho_2 l_2 (l_1 \dot{\theta}_1(t))^2 + \\ & \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \rho_2 (x_2 \dot{\theta}_2(t) + \dot{q}_{21}(t) \Phi_{21}(x_2))^2 dx_2 + \\ & l_1 \dot{\theta}_1(t) \cos(\theta_2 - \theta_1) \int_0^{l_2} \rho_2 (x_2 \dot{\theta}_2(t) + \dot{q}_{21}(t) \Phi_{21}(x_2)) dx_2 \end{aligned} \quad (2.64)$$

e,

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} E I_2 q_{21}^2(t) \left( \frac{\partial^2 \Phi_{21}(x_2)}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2 \quad (2.65)$$

A Equação (2.10) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q^T \quad (2.66)$$

Onde as coordenadas generalizadas e os torques para este caso são:

$$q_i = [\theta_1(t) \quad \theta_2(t) \quad q_{21}(t)]^T \quad (2.67)$$

$$Q^T = [\tau_1(t) \quad \tau_2(t) \quad 0] \quad (2.68)$$

Substituindo as Equações (2.64) e (2.65) na Equação (2.66) e resolvendo obtém-se o conjunto de equações de movimento para o manipulador com o segundo elo flexível.

Equação para  $\theta_1(t)$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = \tau_1(t) \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = \left( \frac{1}{3} \rho_1 l_1^3 + \rho_2 l_2 l_1^2 \right) \dot{\theta}_1(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2(t) + k_{21} \rho_2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{21}(t) \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \left( \frac{1}{3} \rho_1 l_1^3 + \rho_2 l_2 l_1^2 \right) \ddot{\theta}_1(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2(t) + \\ &- \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2^2(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) + \\ &k_{21} \rho_2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{q}_{21}(t) - k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2(t) \dot{q}_{21}(t) + \\ &k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{q}_{21}(t) \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) + k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{q}_{21}(t) \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = 0 \quad (2.73)$$

Substituindo as Equações (2.71), (2.72) e (2.73) em (2.69), obtém-se a seguinte equação de movimento para  $\theta_1(t)$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{3} \rho_1 l_1^3 + \rho_2 l_2 l_1^2 \right) \ddot{\theta}_1(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2^2 + \\ k_{21} \rho_2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{q}_{21}(t) - k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{21}(t) \dot{\theta}_2(t) = \tau_1(t) \end{aligned} \quad (2.74)$$

Equação para  $\theta_2(t)$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = \tau_2(t) \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{1}{3} \rho_2 l_2^3 \dot{\theta}_2(t) + k_{22} \rho_2 \dot{q}_{21}(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= \frac{1}{3} \rho_2 l_2^3 \ddot{\theta}_2(t) + k_{22} \rho_2 \ddot{q}_{21}(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1(t) + \\ &- \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2(t) \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) - k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{q}_{21}(t) \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = 0 \quad (2.79)$$

Substituindo as Equações (2.77), (2.78) e (2.79) em (2.75), obtém-se a seguinte equação de movimento para  $\theta_2(t)$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \rho_2 l_2^3 \ddot{\theta}_2(t) + k_{22} \rho_2 \ddot{q}_{21}(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1(t) + \\ \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2(t) + k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{21}(t) \dot{\theta}_1(t) = \tau_2(t) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Equação para  $q_{21}(t)$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{21}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{21}} + \frac{\partial V}{\partial q_{21}} = 0 \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{21}} = k_{23} \rho_2 \dot{q}_{21}(t) + k_{22} \rho_2 \dot{\theta}_2(t) + k_{21} \rho_2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{21}} \right) &= k_{23} \rho_2 \ddot{q}_{21}(t) + k_{22} \rho_2 \ddot{\theta}_2(t) + k_{21} \rho_2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1(t) + \\ &- k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) + k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2(t) \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_{21}} = 0 \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_{21}} = k_{24} E I_2 q_{21}(t) \quad (2.85)$$

Substituindo as Equações (2.83), (2.84) e (2.85) em (2.81), obtém-se a seguinte equação de movimento para  $q_{21}(t)$ .

$$k_{23} \rho_2 \ddot{q}_{21}(t) + k_{22} \rho_2 \ddot{\theta}_2(t) + k_{21} \rho_2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1(t) + k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) + k_{21} \rho_2 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2(t) + k_{24} E I_2 q_{21}(t) = 0 \quad (2.86)$$

Onde os termos  $k_{ij}$  representam as integrais associadas à flexibilidade do sistema cujos valores são distintos de acordo com a forma com que o segundo elo é modelado, Tabela 2.3.

TABELA 2.3 - VALORES DAS INTEGRAIS ASSOCIADAS AO ELO 2

Integrais	Pinada-livre	Engastada-livre
$k_{21} = \int_0^{7.5} \Phi_{21}(x_2) dx_2$	- 2.7787	5.8724
$k_{22} = \int_0^{7.5} x_2 \Phi_{21}(x_2) dx_2$	- 0.0021	31.9962
$k_{23} = \int_0^{7.5} \Phi_{21}^2(x_2) dx_2$	7.5015	7.4999
$k_{24} = \int_0^{7.5} \left( \frac{\partial^2 \Phi_{21}(x_2)}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2$	0.5633	0.0293

### 2.3.3 - MANIPULADOR FLEXÍVEL/FLEXÍVEL

Desenvolvendo a Equação (2.37) obtém-se a seguinte expressão para a energia cinética do manipulador com dois elos flexíveis.

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \rho_1 (\dot{x}_1(t))^2 dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \rho_1 (\dot{y}_1(x_1, t))^2 dx_1 + \int_0^{l_1} \rho_1 x_1 \dot{\theta}_1(t) \dot{y}_1(x_1, t) dx_1 + \\
& \frac{1}{2} \rho_2 l_2 (\dot{\theta}_1(t))^2 + \frac{1}{2} \rho_2 l_2 (\dot{y}_1(l_1, t))^2 + \rho_2 l_2 l_1 \dot{\theta}_1(t) \dot{y}_1(l_1, t) + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \rho_2 (\dot{x}_2(t))^2 dx_2 + \\
& \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \rho_2 (\dot{y}_2(x_2, t))^2 dx_2 + \int_0^{l_2} \rho_2 x_2 \dot{\theta}_2(t) \dot{y}_2(x_2, t) dx_2 + \\
& l_1 \dot{\theta}_1(t) \cos(\theta_2(t) - \theta_1(t)) \int_0^{l_2} \rho_2 x_2 \dot{\theta}_2(t) dx_2 + l_1 \dot{\theta}_1(t) \cos(\theta_2(t) - \theta_1(t)) \int_0^{l_2} \rho_2 \dot{y}_2(x_2, t) dx_2 + \\
& \dot{y}_1(l_1, t) \cos(\theta_2(t) - \theta_1(t)) \int_0^{l_2} \rho_2 x_2 \dot{\theta}_2(t) dx_2 + \dot{y}_1(l_1, t) \cos(\theta_2(t) - \theta_1(t)) \int_0^{l_2} \rho_2 \dot{y}_2(x_2, t) dx_2
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Conforme visto anteriormente, a expressão para a energia potencial é dada como:

$$V = + \frac{1}{2} \int_0^{l_1} EI_1 \left( \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} EI_2 \left( \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2 \tag{2.88}$$

A Equação (2.3) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q^T \tag{2.89}$$

Onde,  $q_i$  constitui o conjunto de coordenadas generalizadas do sistema:

$$q_i = [\theta_1(t) \quad \theta_2(t) \quad q_{11}(t) \quad q_{21}(t)]^T \tag{2.90}$$

E  $Q^T$  constitui os torques de entrada do sistema sendo representados por:

$$Q^T = [\tau_1(t) \quad \tau_2(t) \quad 0 \quad 0] \tag{2.91}$$

Assim, substituindo as Equações (2.87) e (2.88) em (2.89) e resolvendo de acordo com a expressão (2.90) obtém-se um conjunto de quatro equações



diferenciais fortemente não lineares acopladas que representam a dinâmica do manipulador com dois elos flexíveis.

Equação para  $\theta_1(t)$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = \tau_1(t) \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = \left( \frac{1}{3} \rho_1 l_1^3 + \rho_2 l_2 l_1^2 \right) \dot{\theta}_1(t) + k_{11} \rho_1 \dot{q}_{11}(t) + \rho_2 l_2 l_1 \Phi_{11}(l_1) \dot{q}_{11}(t) + \quad (2.93)$$

$$\frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2(t) + k_{21} \rho_2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{21}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left( \frac{1}{3} \rho_1 l_1^3 + \rho_2 l_2 l_1^2 \right) \ddot{\theta}_1(t) + k_{11} \rho_1 \ddot{q}_{11}(t) + \rho_2 l_2 l_1 \Phi_{11}(l_1) \ddot{q}_{11}(t) + \quad (2.94)$$

$$\frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2(t) - \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2^2(t) +$$

$$\frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) + k_{21} \rho_2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{q}_{21}(t) +$$

$$- k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2(t) \dot{q}_{21}(t) + k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{q}_{21}(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{11}(t) \dot{\theta}_2(t) + \quad (2.95)$$

$$k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{q}_{21}(t) + k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{11}(t) \dot{q}_{21}(t)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = 0 \quad (2.96)$$

Substituindo as Equações (2.94), (2.95) e (2.96) em (2.92), obtém-se a seguinte equação de movimento para  $\theta_1(t)$ .

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{3} \rho_1 l_1^3 + \rho_2 l_2 l_1^2 \right) \ddot{\theta}_1(t) + k_{11} \rho_1 \dot{q}_{11}(t) + \rho_2 l_2 l_1 \Phi_{11}(l_1) \ddot{q}_{11}(t) + \\
& \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2^2 + k_{21} \rho_2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{q}_{21}(t) + \\
& - k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{21}(t) \dot{\theta}_2(t) - \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2(t) \dot{q}_{11}(t) + \\
& - k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{11}(t) \dot{q}_{21}(t) = \tau_1(t)
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Equação para  $\theta_2(t)$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = \tau_2(t) \tag{2.98}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} &= \frac{1}{3} \rho_2 l_2^3 \dot{\theta}_2(t) + k_{22} \rho_2 \dot{q}_{21}(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) + \\
& \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{11}(t)
\end{aligned} \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= \frac{1}{3} \rho_2 l_2^3 \ddot{\theta}_2(t) + k_{22} \rho_2 \ddot{q}_{21}(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1(t) + \\
& \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{q}_{11}(t) - \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) + \\
& \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{q}_{11}(t) + \\
& - \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2(t) \dot{q}_{11}(t)
\end{aligned} \tag{2.100}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \theta_2} &= -\frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) \\
& - \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{11}(t) \dot{\theta}_2(t) \\
& - k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{q}_{21}(t) - k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{11}(t) \dot{q}_{21}(t)
\end{aligned} \tag{2.101}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = 0 \quad (2.102)$$

Substituindo as Equações (2.100), (2.101) e (2.102) em (2.98), obtém-se a seguinte equação de movimento para  $\theta_2(t)$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \rho_2 l_2^3 \ddot{\theta}_2(t) + k_{22} \rho_2 \ddot{q}_{21}(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{q}_{11}(t) + \\ & \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{11}(t) \dot{\theta}_1(t) + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1(t) + \\ & \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2(t) + k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{21}(t) \dot{\theta}_1(t) + \\ & k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{11}(t) \dot{q}_{21}(t) = \tau_2(t) \end{aligned} \quad (2.103)$$

Equação para  $q_{11}(t)$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{11}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{11}} + \frac{\partial V}{\partial q_{11}} = 0 \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{11}} &= (k_{12} \rho_1 + \rho_2 l_2 \Phi_{11}^2(l_1)) \dot{q}_{11}(t) + k_{11} \rho_1 \dot{\theta}_1(t) + \rho_2 l_2 l_1 \Phi_{11}(l_1) \dot{\theta}_1(t) + \\ & \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2(t) + k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{21}(t) \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{11}} \right) &= (k_{12} \rho_1 + \rho_2 l_2 \Phi_{11}^2(l_1)) \ddot{q}_{11}(t) + k_{11} \rho_1 \ddot{\theta}_1(t) + \rho_2 l_2 l_1 \Phi_{11}(l_1) \ddot{\theta}_1(t) + \\ & \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2(t) - \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2^2(t) + \\ & \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2(t) \dot{\theta}_1(t) + k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{q}_{21}(t) + \\ & k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{21}(t) \dot{\theta}_1(t) - k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{21}(t) \dot{\theta}_2(t) \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_{11}} = 0 \quad (2.107)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_{11}} = k_{13} E l_1 q_{11}(t) \quad (2.108)$$

Substituindo as Equações (2.106), (2.107) e (2.108) em (2.104), obtém-se a seguinte equação de movimento para  $q_{11}(t)$ .

$$\begin{aligned} & k_{12} \rho_1 \ddot{q}_{11}(t) + k_{11} \rho_1 \ddot{\theta}_1(t) + \rho_2 l_2 \Phi_{11}^2(l_1) \ddot{q}_{11}(t) + \rho_2 l_2 l_1 \Phi_{11}(l_1) \ddot{\theta}_1(t) + \\ & \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2(t) - \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2^2(t) + \\ & \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) + k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{q}_{21}(t) + \\ & - k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{21}(t) \dot{\theta}_2(t) \\ & + k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{q}_{21}(t) + k_{13} E l_1 q_{11}(t) = 0 \end{aligned} \quad (2.109)$$

Equação para  $q_{21}(t)$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{21}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{21}} + \frac{\partial V}{\partial q_{21}} = 0 \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{21}} &= k_{23} \rho_2 \dot{q}_{21}(t) + k_{22} \rho_2 \dot{\theta}_2(t) + k_{21} \rho_2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) + \\ & + k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{11}(t) \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{21}} \right) &= k_{23} \rho_2 \ddot{q}_{21}(t) + k_{22} \rho_2 \ddot{\theta}_2(t) + k_{21} \rho_2 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1(t) + \\ & - k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) + k_{21} \rho_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2(t) + \\ & k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{q}_{11}(t) + k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{11}(t) \dot{\theta}_1(t) + \\ & - k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{q}_{11}(t) \dot{\theta}_2(t) \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_{21}} = 0 \quad (2.113)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_{21}} = k_{24}EI_2q_{21}(t) \quad (2.114)$$

Substituindo as Equações (2.112), (2.113) e (2.114) em (2.110), obtém-se a seguinte equação de movimento para  $q_{21}(t)$ .

$$\begin{aligned} & k_{23}\rho_2\ddot{q}_{21}(t) + k_{22}\rho_2\ddot{\theta}_2(t) + k_{21}\rho_2l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1)\ddot{\theta}_1(t) + \\ & - k_{21}\rho_2l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1(t)\dot{\theta}_2(t) + k_{21}\rho_2l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2(t) + \\ & k_{21}\rho_2\Phi_{11}(l_1)\cos(\theta_2 - \theta_1)\ddot{q}_{11}(t) + k_{21}\rho_2\Phi_{11}(l_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1(t)\dot{q}_{11}(t) + \\ & - k_{21}\rho_2\Phi_{11}(l_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2(t)\dot{q}_{11}(t) + k_{24}EI_2q_{21}(t) = 0 \end{aligned} \quad (2.115)$$

Onde, os valores das integrais encontram-se nas Tabelas (2.3) e (2.4).

TABELA 2.4 – VALORES DAS INTEGRAIS ASSOCIADAS AO ELO 1

Integrais	Pinada-Pinada	Engastada-Engastada
$k_{11} = \int_0^{7.5} x_1\Phi_{11}(x_2)dx_2$	17.9048	23.3695
$k_{12} = \int_0^{7.5} \Phi_{11}^2(x_1)dx_2$	3.7499	7.5002
$k_{13} = \int_0^{7.5} \left( \frac{\partial^2 \Phi_{11}(x_1)}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1$	0.1154	1.1864

## 2.4 - ESTRUTURA DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações dinâmicas derivadas anteriormente podem ser convenientemente expressa na forma de uma única equação matricial. Para isto, utiliza-se neste trabalho a metodologia apresentada por John J. Craig em “*Introduction to Robotics*” (1955). Esta metodologia assume escrever o conjunto de equações diferenciais do sistema na forma:

$$M(q)\ddot{q}(t) + V(q, \dot{q}) + K(q) = \tau(t) \quad (2.116)$$

Onde,  $M(q)$  é a  $n \times n$  *matriz massa* do manipulador,  $V(q, \dot{q})$  é um vetor  $n \times 1$  contendo termos de acoplamentos existentes no sistema,  $K(q)$  é a  $n \times n$  *matriz rigidez*, e  $\tau(t)$  representa os torques aplicados nas juntas do manipulador.

Cada elemento de  $M(q)$  é uma função complexa dependente da coordenada generalizada  $q$ ,  $V(q, \dot{q})$  possui funções complexas dependentes tanto de  $q$  quanto de  $\dot{q}$  e  $K(q)$  é uma matriz contendo funções relacionadas a energia potencial do sistema.

Assim a partir da Equação (2.116) escreve-se nas seções (2.4.1), (2.4.2) e (2.4.3) as equações de movimento na forma matricial para os modelos desenvolvidos.

#### 2.4.1 - MODELO RÍGIDO/RÍGIDO

Lembrando que para este caso, tem-se o conjunto de coordenadas generalizadas dado por:

$$q = [\theta_1 \quad \theta_2]^T \quad (2.117)$$

Tomando as equações para  $\theta_1(t)$  e  $\theta_2(t)$  obtidas na seção (2.3.1) pode-se escrevê-las segundo a Equação (2.116) da seguinte forma:

$$M(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \rho_1 l_1^3 + \rho_2 l_2 l_1^2 & \frac{1}{2} \rho_2 l_1 l_2^2 c_{21} \\ \frac{1}{2} \rho_2 l_1 l_2^2 c_{21} & \frac{1}{3} \rho_2 l_2^3 \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \rho_2 l_1 l_2^2 s_{21} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 \\ \frac{1}{2} \rho_2 l_1 l_2^2 s_{21} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

$$K(q) = [0] \quad (2.120)$$

$$\tau(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

Para simplificar a notação e compactar as equações faz-se as seguintes substituições  $c_{21} = \cos(\theta_2 - \theta_1)$  e  $s_{21} = \sin(\theta_2 - \theta_1)$ .

#### 2.4.2 - MODELO RÍGIDO/FLEXÍVEL

Para este caso, tem-se o seguinte conjunto de coordenadas generalizadas:

$$q = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad q_{21}]^T \quad (2.122)$$

De forma análoga à seção anterior, tomando as equações obtidas para  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  e  $q_{21}(t)$  na seção (2.3.2) pode-se escrevê-las segundo a Equação (2.116) com:

$$M(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \rho_1 l_1^3 + \rho_2 l_2 l_1^2 & \frac{1}{2} \rho_2 l_1 l_2^2 c_{21} & k_{21} \rho_2 l_1 c_{21} \\ \frac{1}{2} \rho_2 l_1 l_2^2 c_{21} & \frac{1}{3} \rho_2 l_2^3 & k_{22} \rho_2 \\ k_{21} \rho_2 l_1 c_{21} & k_{22} \rho_2 & k_{23} \rho_2 \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \rho_2 l_1 l_2^2 s_{21} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 - k_{21} \rho_2 l_1 s_{21} \dot{q}_{21} \dot{\theta}_2 \\ \frac{1}{2} \rho_2 l_1 l_2^2 s_{21} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + k_{21} \rho_2 l_1 s_{21} \dot{q}_{21} \dot{\theta}_1 \\ -k_{21} \rho_2 l_1 s_{21} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + k_{21} \rho_2 l_2 s_{21} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

$$K(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{24} E I_2 q_{21} \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

$$\tau(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

### 2.4.3 - MODELO FLEXÍVEL/FLEXÍVEL

O conjunto de coordenadas generalizadas para este caso é dado por:

$$q = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad q_{11} \quad q_{21}]^T \quad (2.127)$$

As equações obtidas para  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ ,  $q_{11}(t)$  e  $q_{21}(t)$  na seção (2.3.3) podem ser escritas segundo a Equação (2.116) da seguinte forma:

$$M(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \rho_1 l_1^3 + \rho_2 l_2 l_1^2 & \frac{1}{2} \rho_2 l_1 l_2^2 c_{21} & k_{11} \rho_1 + k_{21} l_2 l_1 \Phi_{11}(l_1) & k_{21} \rho_2 l_1 c_{21} \\ \frac{1}{2} \rho_2 l_1 l_2^2 c_{21} & \frac{1}{3} \rho_2 l_2^3 & \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) c_{21} & k_{22} \rho_2 \\ k_{11} \rho_1 + k_{21} l_2 l_1 \Phi_{11}(l_1) & \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11}(l_1) c_{21} & k_{12} \rho_1 + \rho_2 l_2 \Phi_{11}^2(l_1) & k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) c_{21} \\ k_{21} \rho_2 l_1 c_{21} & k_{22} \rho_2 & k_{21} \rho_2 \Phi_{11}(l_1) c_{21} & k_{23} \rho_2 \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 s_{21} \dot{\theta}_2^2 - k_{21} \rho_2 l_1 s_{21} \dot{q}_{21} \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11} s_{21} \dot{\theta}_2 \dot{q}_{11} - k_{21} \rho_2 \Phi_{11} s_{21} \dot{q}_{21} \dot{q}_{11} \\ \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 s_{21} \dot{\theta}_1^2 + k_{21} \rho_2 l_1 s_{21} \dot{q}_{21} \dot{\theta}_1 + k_{21} \rho_2 \Phi_{11} s_{21} \dot{q}_{21} \dot{q}_{11} + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11} s_{21} \dot{\theta}_1 \dot{q}_{11} \\ -k_{21} \rho_2 \Phi_{11} s_{21} \dot{\theta}_2 \dot{q}_{21} + k_{21} \rho_2 \Phi_{11} s_{21} \dot{q}_{21} \dot{\theta}_1 - \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11} s_{21} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \rho_2 l_2^2 \Phi_{11} s_{21} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ -k_{21} \rho_2 l_1 s_{21} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + k_{21} \rho_2 l_1 s_{21} \dot{\theta}_1^2 + k_{21} \rho_2 \Phi_{11} s_{21} \dot{\theta}_1 \dot{q}_{11} - k_{21} \rho_2 \Phi_{11} s_{21} \dot{q}_{11} \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

A fim de simplificar as equações faz-se  $\Phi_{11} = \Phi_{11}(l_1)$  na Equação (2.126).



$$K(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{13}EI_1q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{24}EI_2q_{21} \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

$$\tau(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

Neste capítulo foram obtidos os conjuntos de equações de movimento dos sistemas estudados, sem considerar o controle. As Equações (2.121), (2.126) e (2.131) constituem os *torques de entrada* que serão considerados uma perturbação ao sistema. Essa situação será simulada no Capítulo 4.

No próximo capítulo estuda-se o sistema de controle empregado para controlar o manipulador.



## CAPÍTULO 3

### SISTEMA DE CONTROLE

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, o problema de controle de posição do manipulador é abordado. Um importante aspecto do sistema de controle de robôs manipuladores é que a seqüência de movimento (trajetória a ser seguida pelos elos) e a magnitude dos torques aplicados devem ser tal que os levem a seguir trajetórias corretamente (Asada e Slotine, 1986).

Desvios e erros nas trajetórias são indesejáveis em sistemas mecânicos, principalmente, em robôs manipuladores onde a precisão nas manobras é de vital importância. Os ajustes necessários na trajetória podem ser função da lei de controle e dos ajustes nos parâmetros do sistema. Este último pode ser obtido usando o método de identificação (Silva *et al*, 2000) no sentido de melhorar o desempenho do sistema de controle. No entanto, neste trabalho, o desempenho do sistema de controle é obtido através de ajustes e reajustes dos ganhos do controlador implementado garantindo assim que o comportamento do manipulador é modificado com intuito de buscar sempre um melhor desempenho para uma dada aplicação.

Os parâmetros ajustáveis, também chamados de *ganhos* do sistema de controle, estão relacionados com a agressividade do controlador. Altos ganhos faz com que o controlador atue com mudanças rápidas no sistema, enquanto que ganhos menores, faz com que as saídas pouco se alterem e não haja perturbações e ruídos se propagando através do sistema, o que caracteriza assim um comportamento passivo do controlador (Ogata, 1993). Desta forma, deve haver um compromisso entre desempenho (ganho alto) e instabilidade ou pouca precisão (ganho baixo).

### 3.2 - SISTEMA DE CONTROLE

No capítulo anterior a dinâmica do manipulador foi estudada sem considerar nenhum detalhe de controle. No presente capítulo estudam-se as equações de movimento considerando a lei de controle.

O objetivo do sistema de controle empregado neste trabalho é atuar sobre o movimento de corpo rígido do manipulador, isto é, atuar nos deslocamentos angulares das juntas do manipulador, de modo a tornar possível observar a influência da flexibilidade e os efeitos causados por esta ao sistema.

O sistema de controle é o sistema dinâmico propositalmente adicionado à malha aberta para melhorar as características do sistema em malha fechada. Neste trabalho, o sistema de controle empregado constitui um controlador PD (proporcional+derivativo). A ação deste controlador pode ser considerada como uma combinação da ação do controlador proporcional e da ação do controlador derivativo.

#### 3.2.1 - AÇÃO DO CONTROLADOR PROPORCIONAL + DERIVATIVO

A ação de controle é definida pela Equação (3.1):

$$u(t) = -K_p e(t) - K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.1)$$

Onde,  $K_p$  representa o ganho proporcional e  $T_d$  é uma constante chamada *tempo derivativo*. Tanto  $K_p$  como  $T_d$  são ajustáveis. Especificamente, o tempo derivativo  $T_d$  ajusta a ação de controle derivativa, enquanto uma mudança no valor de  $K_p$  afeta tanto a parte proporcional quanto a derivativa.

A ação de controle derivativa, algumas vezes denominada controle de taxa, indica que a magnitude da saída do controlador é proporcional à taxa de variação do sinal de erro. Essa ação de controle tem a vantagem de fornecer a

resposta rápida pois é proporcional ao erro e também é utilizada para amortecimento de oscilações, pois leva em consideração a velocidade. Tem a desvantagem de amplificar os sinais de ruído e causa um efeito de saturação no atuador.

Na Equação (3.1), os termos  $e(t)$  e  $\frac{de(t)}{dt}$  constituem os erros de posição e velocidade entre os estados atual e desejado, sendo dados por:

$$e(t) = \theta(t) - \theta_{\text{desejado}}(t) \quad (3.2)$$

e

$$\frac{de(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}_{\text{desejado}}(t) \quad (3.3)$$

No que diz respeito a controle de manipuladores espera-se que  $\theta(0)$  seja igual a  $\theta_{\text{desejado}}(0)$  e  $\dot{\theta}(0)$  seja igual a  $\dot{\theta}_{\text{desejado}}(0)$ . Assim, se  $\theta(t)$  e  $\theta_{\text{desejado}}(t)$  satisfazem a mesma equação diferencial e possuem as mesmas condições de contorno, segue da unicidade das soluções de equações diferenciais que  $\theta(t) = \theta_d(t)$  para todo  $t \geq 0$ .

Se  $\theta(t) \neq \theta_d(t)$  então, não se pode garantir que o manipulador seguirá a trajetória desejada ao longo de todo o tempo e, isto é claramente indesejável. Por esta razão, a introdução de uma realimentação na lei de controle é uma maneira de se aliviar problemas de trajetórias (Murray, *et al* , 1993).

A fim de implementar a lei de controle dada pela Equação (3.1) escreve-se a Equação (2.116) da seguinte forma:

$$M(q)\ddot{q}(t) + V(q, \dot{q}) + K(q) = \Gamma_{\text{total}}(t) \quad (3.4)$$

Na Equação (3.4), o termo  $\Gamma_{\text{total}}(t)$  representa os torques aplicados nas juntas do manipulador dado pela Equação (3.5):

$$\Gamma_{\text{total}}(t) = \tau_{\text{entrada}}(t) + \tau_{\text{controle}}(t) \quad (3.5)$$

onde  $\tau_{\text{entrada}}(t)$  representa o torque de entrada do sistema já demonstrado no Capítulo 2, sendo dado pelas Equações (2.121), (2.126) e (2.131) para cada modelo desenvolvido.

O termo  $\tau_{\text{controle}}(t)$  da Equação (3.5) representa a lei de controle adicionada ao sistema como realimentação atuando sobre cada junta do manipulador. Assim, para os modelos desenvolvidos pode-se escrever os torques de controle da seguinte forma.

Modelo Rígido/Rígido.

$$\tau_{\text{controle}}(t) = [-K_{p1}e_1 - K_{p1}T_{d2}\dot{e}_1 \quad -K_{p2}e_2 - K_{p2}T_{d2}\dot{e}_2]^T \quad (3.6)$$

Modelo Rígido/Flexível.

$$\tau_{\text{controle}}(t) = [-K_{p1}e_1 - K_{p1}T_{d2}\dot{e}_1 \quad -K_{p2}e_2 - K_{p2}T_{d2}\dot{e}_2 \quad 0]^T \quad (3.7)$$

Modelo Flexível/Flexível.

$$\tau_{\text{controle}}(t) = [-K_{p1}e_1 - K_{p1}T_{d2}\dot{e}_1 \quad -K_{p2}e_2 - K_{p2}T_{d2}\dot{e}_2 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.8)$$

Nas Equações (3.6), (3.7) e (3.8),  $K_{p1}$  e  $K_{p2}$  constituem os ganhos proporcionais do controlador nas juntas 1 e 2, respectivamente e  $T_{d1}$  e  $T_{d2}$  constituem o tempo derivativo do controlador das juntas 1 e 2, respectivamente.

Neste trabalho por simplicidade assume-se que:

$$K_{p1} = K_{p2} = K_s \quad (3.9)$$

e

$$T_{d1} = T_{d2} = T_d \quad (3.10)$$

onde,  $K_s$  representa a sensibilidade (ganho) do controlador e  $T_d$  constitui uma constante. Tanto  $K_s$  quanto  $T_d$  são ajustáveis (Ogata, 1993). A Figura (3.1) ilustra o diagrama de um controlador PD aplicado ao manipulador.

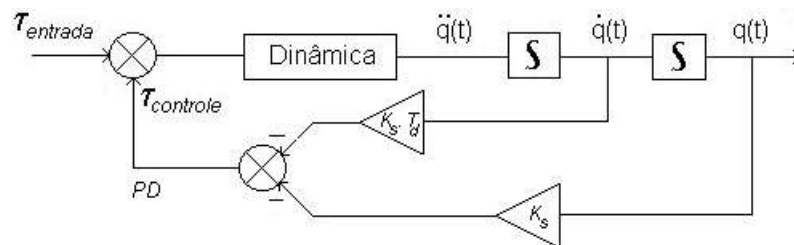


Fig. 3.1 - Diagrama de blocos do controlador PD.

### 3.2.2 - ESTABILIDADE

A característica mais importante do comportamento dinâmico de um sistema de controle é a estabilidade, ou seja, se o sistema é estável ou instável. Um sistema de controle está em equilíbrio se, na ausência de qualquer perturbação ou entrada, a saída permanecer no mesmo estado. Um sistema de controle invariante no tempo e linear é estável se a saída volta ao seu estado de equilíbrio quando o sistema é sujeito a uma perturbação. Um sistema de controle, invariante no tempo e linear é instável se uma oscilação da saída continua indefinidamente ou a saída diverge sem limite de seu estado de equilíbrio quando o sistema é sujeito a uma perturbação.





## CAPÍTULO 4

### SIMULAÇÕES E ANÁLISE DINÂMICA

#### 4.1 - INTRODUÇÃO

O presente capítulo apresenta o comportamento dinâmico do manipulador através da resolução dos sistemas de equações diferenciais por meio de integrações numéricas (Craig, 1955). Estas equações diferenciais representam a dinâmica do manipulador e a lei de controle empregada, obtidas nos Capítulos 2 e 3.

Tomando a Equação (3.1):

$$M(q)\ddot{q}(t) + V(q, \dot{q}) + K(q) = \Gamma_{\text{total}}(t) \quad (4.1)$$

E isolando o primeiro termo do lado esquerdo, obtém-se:

$$M(q)\ddot{q}(t) = (\Gamma_{\text{total}}(t) - V(q, \dot{q}) - K(q)), \quad (4.2)$$

A Equação (4.2) pode ser escrita como:

$$\ddot{q}(t) = M^{-1}(q)(\Gamma_{\text{total}}(t) - V(q, \dot{q}) - K(q)) \quad (4.3)$$

Integrando no tempo a Equação (4.3) com passo  $\Delta t$ , obtém-se a descrição do movimento do manipulador em termos dos deslocamentos angulares, das velocidades angulares das juntas e das coordenadas generalizadas associadas a flexibilidade, dadas as condições iniciais do sistemas:

$$q(0) = q_0 \quad (4.4)$$

$$\dot{q}(0) = 0 \quad (4.5)$$

Neste trabalho, o integrador utilizado para resolver os sistemas de equações diferenciais obtidos no Capítulo 2 encontra-se no Matlab®. Como resultado obtém-se a posição e velocidade do manipulador mediante aos torques aplicados às juntas (Shampine e Reichelt, 1997). Outros métodos de integração numérica comumente utilizados para se resolver sistemas de equações diferenciais podem ser encontrados em Conte e DeBoor (1972).

Os resultados das simulações são apresentados separadamente, baseados na seguinte metodologia:

- Estuda-se o desempenho do sistema de controle nos modelos desenvolvidos assumindo 3 valores de ganhos diferentes.
- Com intuito de estudar a influência da flexibilidade no sistema, faz-se comparações entre os modelos a partir dos resultados obtidos anteriormente.

#### 4.2 - PARÂMETROS DO MANIPULADOR

Os parâmetros do manipulador utilizado foram pesquisados e retirados do sitio [www.nasa.org/shuttle](http://www.nasa.org/shuttle) e encontram-se listados na seguinte tabela.

TABELA 4.1 – PARÂMETROS DO MANIPULADOR

Parâmetros do Manipulador		Valor	Unidades
Propriedades Geométricas dos elos			
- comprimento	$l_i$	7,5	m
- diâmetro	$d_i$	0,33	m
- área da seção-reta	$A_i$	$8,5 \cdot 10^{-2}$	$m^2$
- momento de Inércia	$I_i$	$5,8 \cdot 10^{-4}$	$m^4$
Propriedade do Material (Carbono-Epoxy)			
- módulo de Young	$E_i$	$7,1 \cdot 10^{10}$	$N/m^2$
Propriedade Estrutural			
- massa/unid. comp.	$\rho_i$	27.36	Kg/m
- massa do elo i	$m_i$	205,25	Kg
- rigidez à flexão	$E_i I_i$	$4,12 \cdot 10^7$	$N.m^2$

### 4.3 - TORQUES DE ENTRADA

Neste trabalho os *torques de entrada*  $\tau_1$  e  $\tau_2$  aplicados nas juntas 1 e 2 do manipulador constituem uma função degrau, dados por:

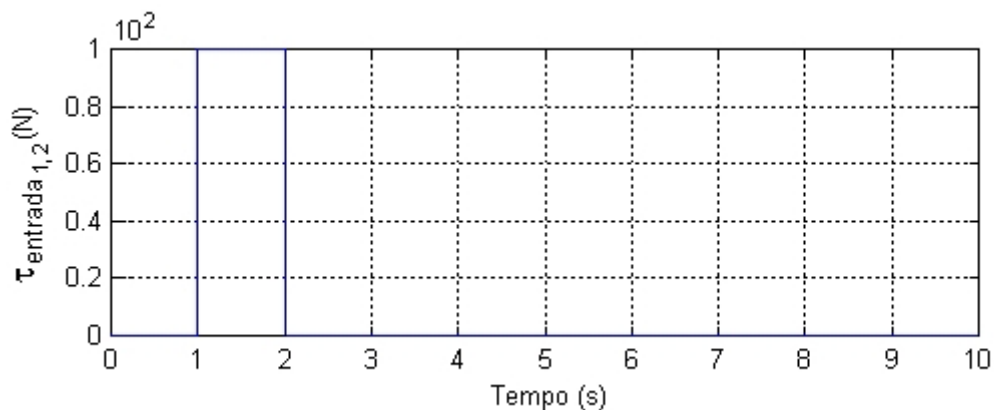


Fig. 4.1 - Torques aplicados nas juntas.

Consideram-se os torques de entrada uma perturbação aplicada ao sistema de modo a movimentar os elos do manipulador excitando também a parte flexível do sistema. Isto permite observar o desempenho do sistema de controle e a influência da flexibilidade na estrutura.

### 4.4 - SIMULAÇÃO DINÂMICA DOS MODELOS E GANHOS DO CONTROLADOR

Conforme já mencionado, este trabalho não tem a intenção de apresentar um sistema de controle ótimo; porém, dado uma perturbação no sistema é função do controlador conduzi-lo a um regime permanente.

Assim, nas seções seguintes são apresentados os resultados das simulações realizadas para os modelos desenvolvidos com 3 valores de ganhos ( $K_s = 0.5$ ;  $K_s = 1.0$ ;  $K_s = 2.0$  e  $T_d = 2.0$ ). Estes valores são tomados à fim de verificar a eficiência do sistema de controle e com propósito de simulação.

#### 4.4.1 - MODELO RÍGIDO

Segue nesta seção o comportamento dinâmico do manipulador com elos rígidos em termos de deslocamentos angulares e velocidades das juntas.

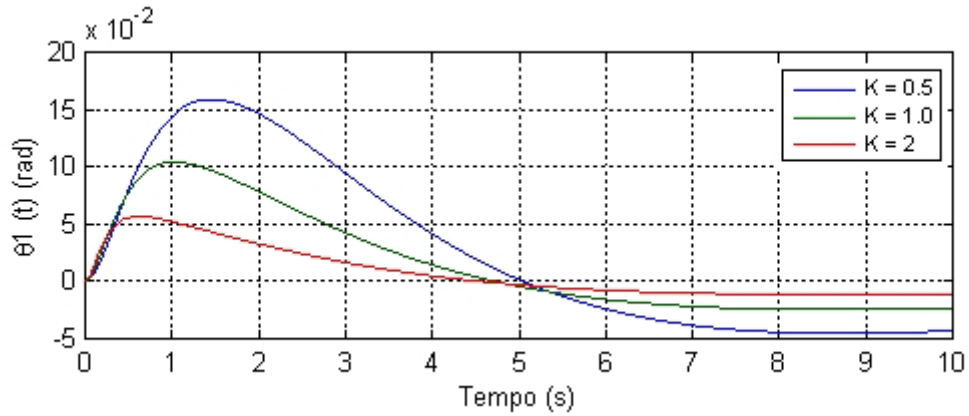


Fig. 4.2 - Gráfico da posição angular do elo 1 para ganhos diferentes.

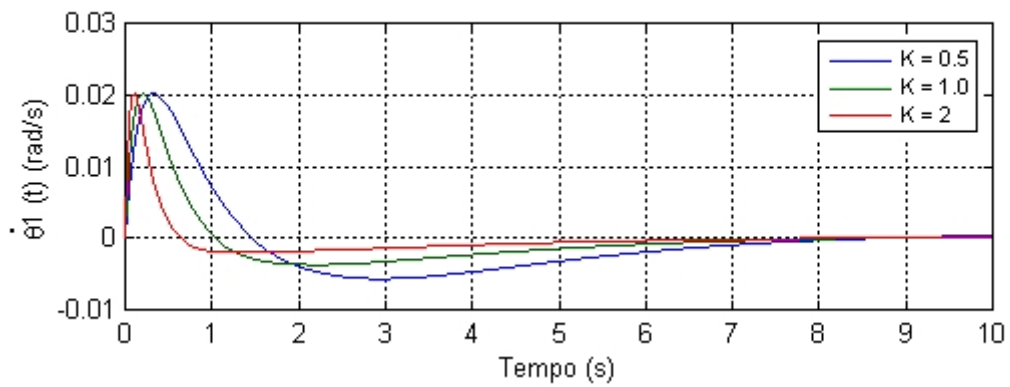


Fig. 4.3 - Gráfico da velocidade angular do elo 1 para ganhos diferentes.

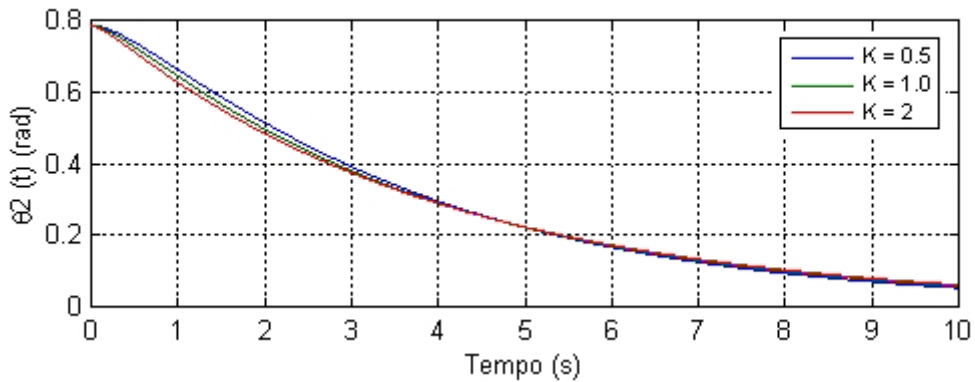


Fig. 4.4 - Gráfico da posição angular do elo 2 para ganhos diferentes.

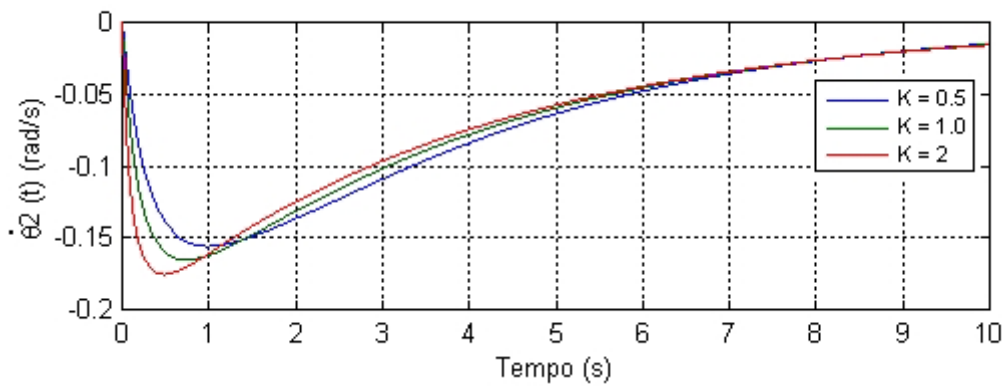


Fig. 4.5 - Gráfico da velocidade angular do elo 2 para ganhos diferentes.

As Figuras (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5) mostram a ação do controlador implementado no sistema rígido para 3 valores de ganhos. Ao analisar os resultados observa-se que um melhor desempenho do controlador é obtido quando  $K_s = 2,0$ , sugerindo que ao aumentar o ganho do controlador, este conduz o sistema ao regime permanente mais rapidamente. No entanto, ressalta-se o fato de que vários outros ganhos foram empregados e como resposta aos valores mais altos, o sistema apresentou uma saturação no sentido de que, com a variação dos ganhos o sistema apresenta a mesma resposta.

#### 4.4.2 - MODELO RÍGIDO/FLEXÍVEL

Nesta seção, apresenta-se o comportamento dinâmico do manipulador com um elo rígido e um flexível em termos de deslocamentos angulares e velocidades das juntas.

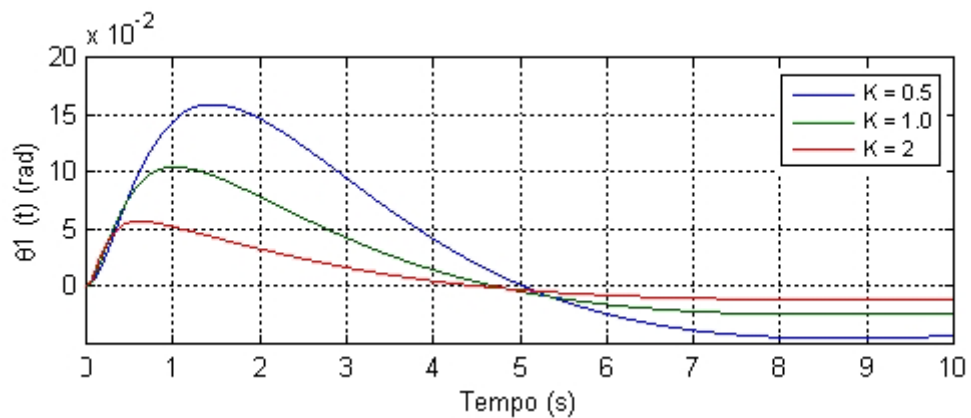


Fig. 4.6 - Gráfico da posição angular do elo 1 para ganhos diferentes.

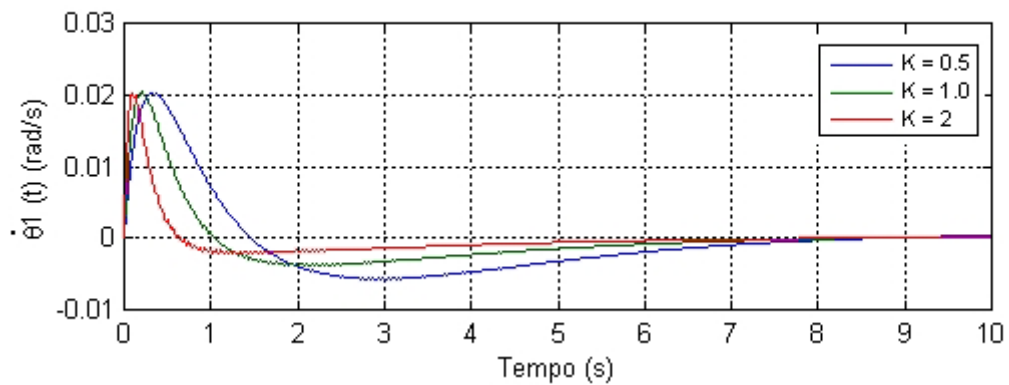


Fig. 4.7 - Gráfico da velocidade angular do elo 1 para ganhos diferentes.

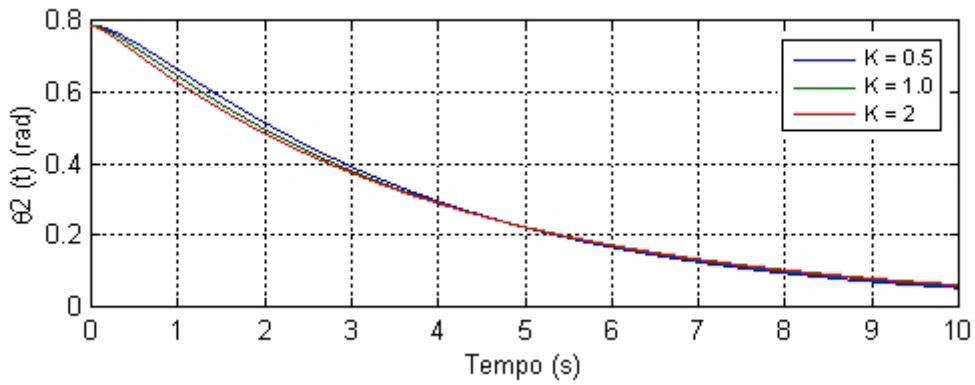


Fig. 4.8 - Gráfico da posição angular do elo 2 para ganhos diferentes.

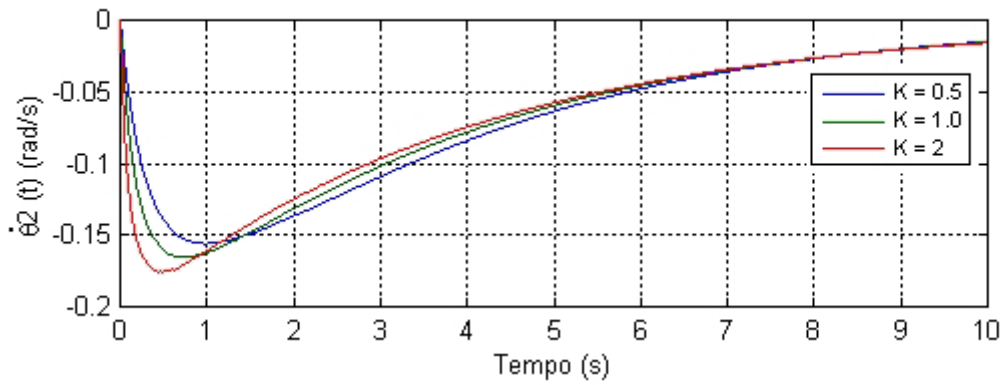


Fig. 4.9 - Gráfico da velocidade angular do elo 2 para ganhos diferentes.

Ao analisar as Figuras (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9) observa-se que a resposta ao sistema rígido/flexível é semelhante à obtida na seção anterior (sistema rígido). Porém, ao observar cuidadosamente as Figuras (4.7) e (4.9) nota-se a presença de oscilações; ampliando-as obtém-se:

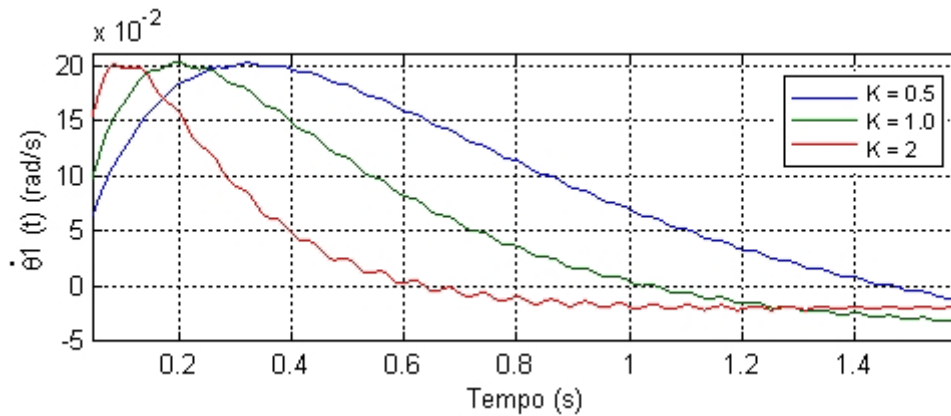


Fig. 4.10 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 1.

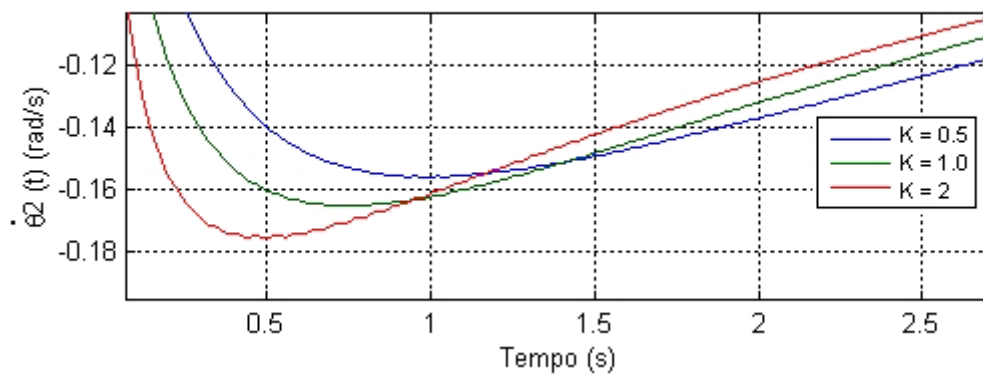


Fig. 4.11 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 2.

Nas Figuras (4.10) e (4.11) as oscilações podem ter sido originadas no sistema devido à excitação da parte flexível do manipulador. A implementação computacional deste trabalho permite mostrar as amplitudes dos movimentos flexíveis em termos de suas coordenadas generalizadas. Neste caso, a amplitude do movimento flexível é dado pela coordenada generalizada  $q_{21}(t)$ , sendo mostrado na Figura (4.12).



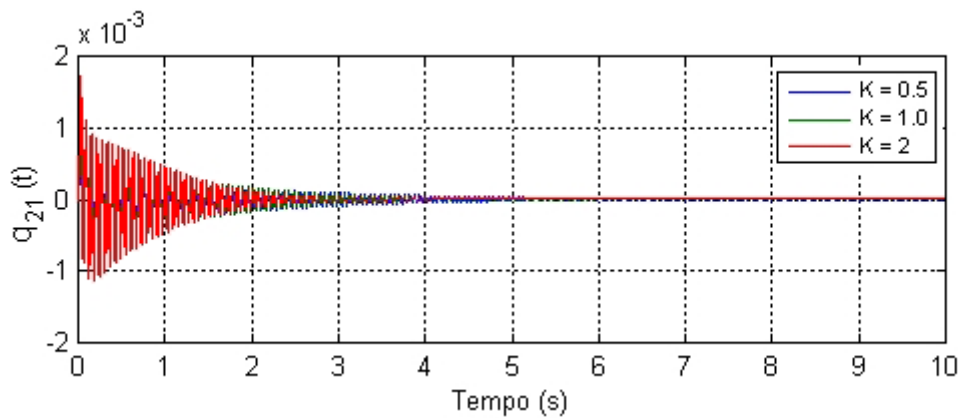


Fig. 4.12 - Gráfico da coordenada generalizada associada à flexibilidade do elo 2.

Os resultados obtidos mostram que o controlador PD atua sobre as juntas do manipulador (movimento corpo rígido) conduzindo o sistema a um regime permanente; e que a flexibilidade do sistema não comprometeu o desempenho do sistema de controle.

#### 4.4.3 - MODELO FLEXÍVEL/FLEXÍVEL

Apresenta-se nesta seção o comportamento dinâmico do manipulador com elos flexíveis em termos de deslocamentos angulares e velocidades das juntas.

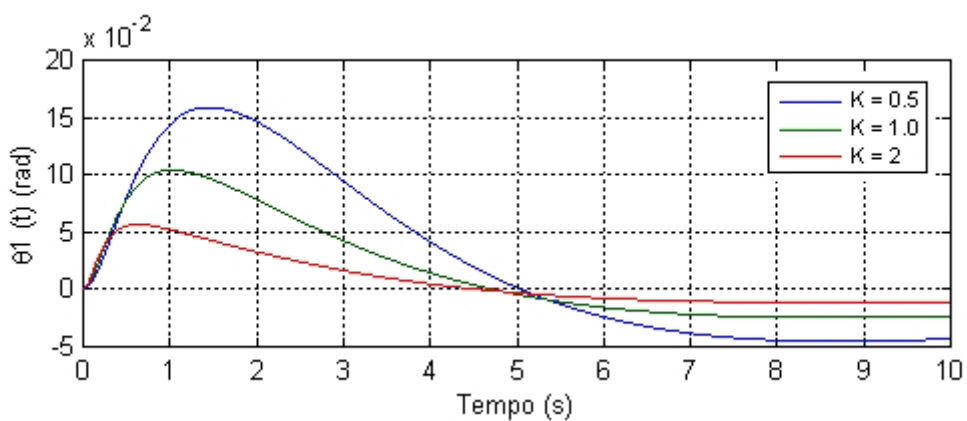


Fig. 4.13 - Gráfico da posição angular do elo 1 para ganhos diferentes.

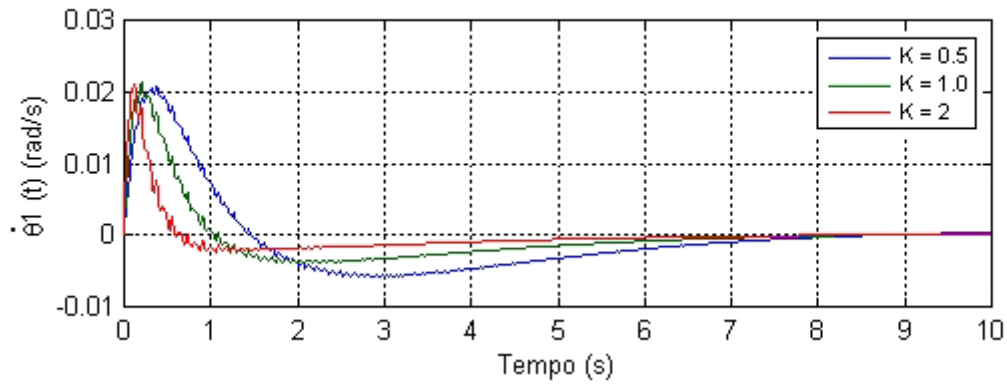


Fig. 4.14 - Gráfico da velocidade angular do elo 1 para ganhos diferentes.

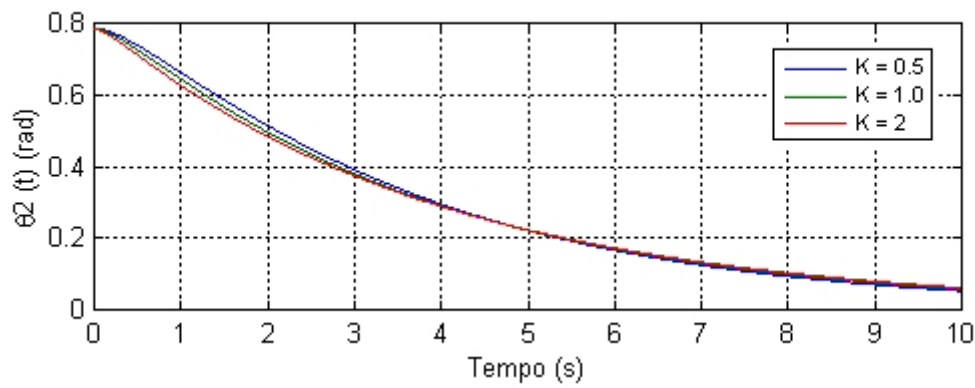


Fig. 4.15 - Gráfico da posição angular do elo 2 para ganhos diferentes.

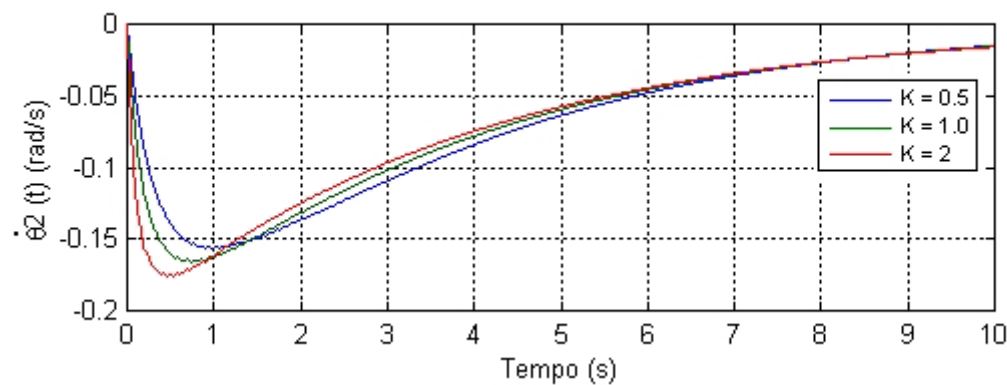


Fig. 4.16 - Gráfico da velocidade angular do elo 2 para ganhos diferentes.

Ampliando as Figuras (4.14) e (4.16), obtém-se:

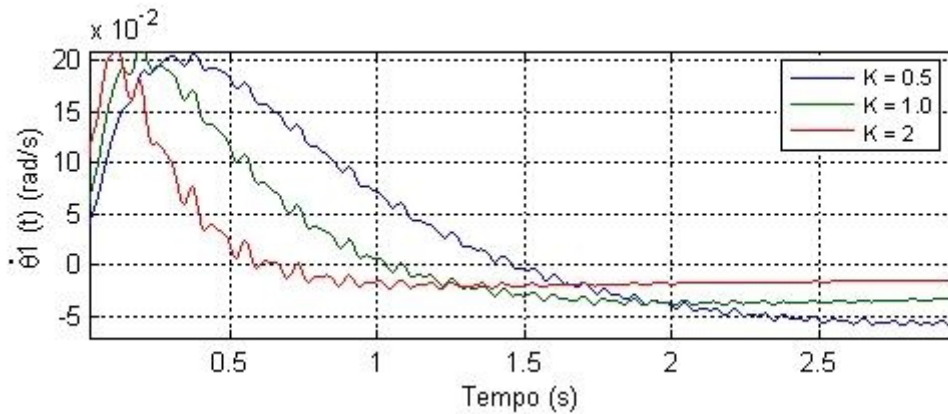


Fig. 4.17 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 1.

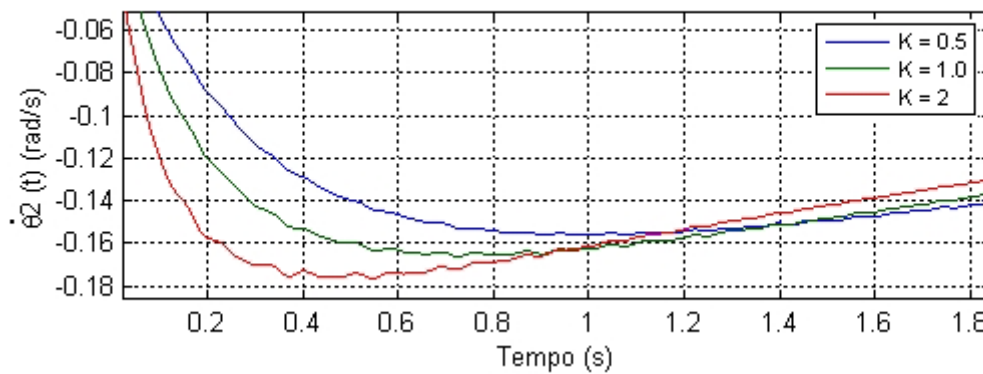


Fig. 4.18 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 2.

Assim, como nas Figuras (4.10) e (4.11) as oscilações observadas nas Figuras (4.17) e (4.18) podem ser originadas pela excitação da parte flexível da estrutura devido o movimento de corpo rígido do manipulador, mas que no entanto, não comprometem o desempenho do sistema de controle ao conduzir o sistema ao regime permanente.

As amplitudes do movimento flexível para este caso são:

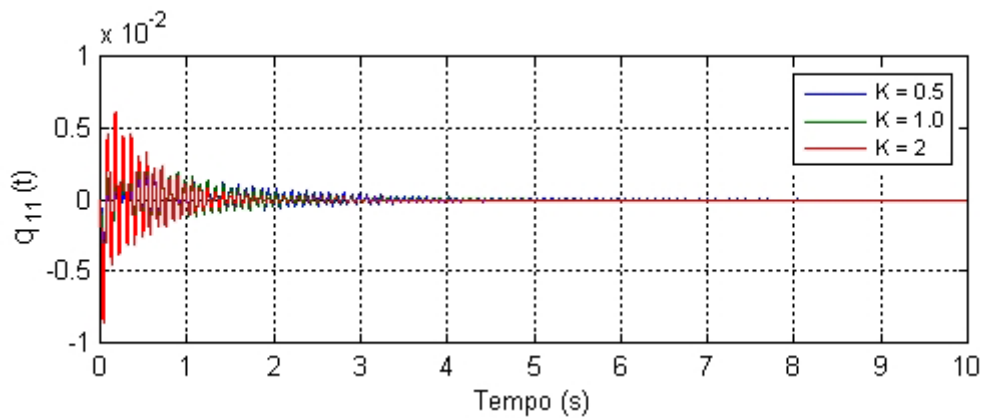


Fig. 4.19 - Gráfico da coordenada generalizada associada à flexibilidade do elo 1.

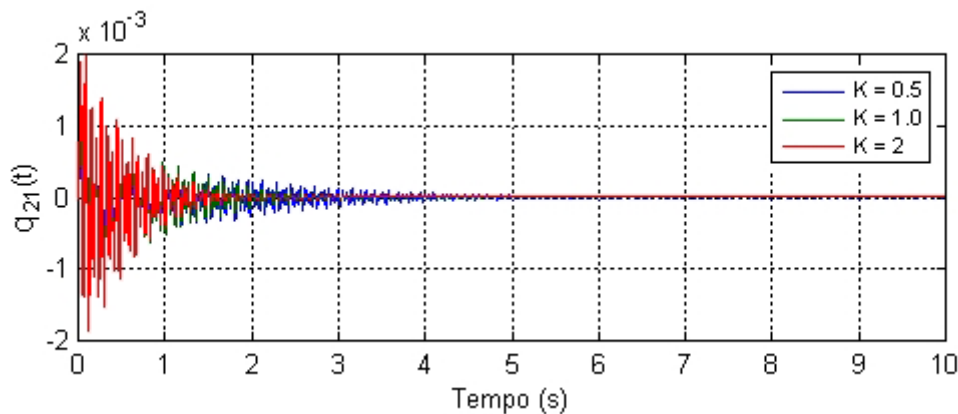


Fig. 4.20 - Gráfico da coordenada generalizada associada à flexibilidade do elo 2.

Observa-se nas Figuras (4.19) e (4.20) que a amplitude do movimento flexível diminui ao longo do tempo de modo a não tornar o sistema instável.

#### 4.5 - INFLUÊNCIA DA FLEXIBILIDADE

As seções anteriores apresentaram os resultados obtidos nas simulações referentes à dinâmica e controle do manipulador para os três modelos desenvolvidos separadamente. Nesta seção, são feitas comparações entre os resultados anteriores, mantendo os ganhos do controlador constantes, com intuito de observar a influência da flexibilidade no sistema.

#### 4.5.1 - GANHO $K_s = 0,5$ .

Tomando-se o resultado dos modelos Rígido/Rígido, Rígido/Flexível e sobrepondo àqueles obtidos para o modelo Flexível/Flexível obtém-se:

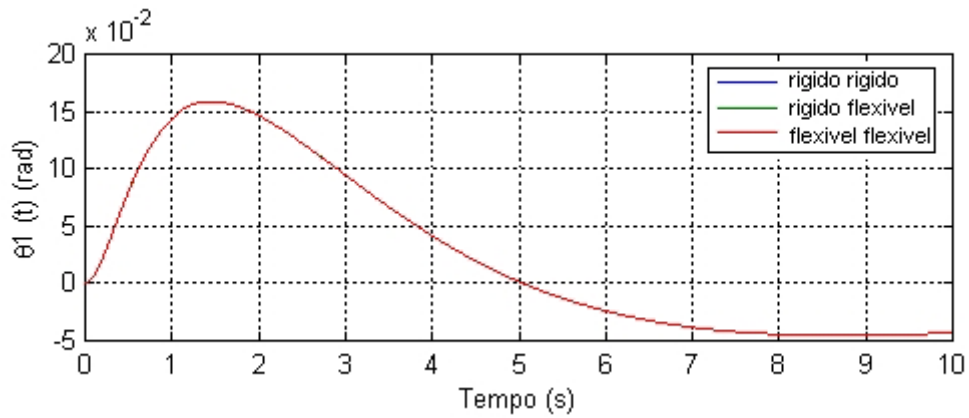


Fig. 4.21 - Gráfico da posição angular do elo 1, ganho  $K_s = 0,5$ .

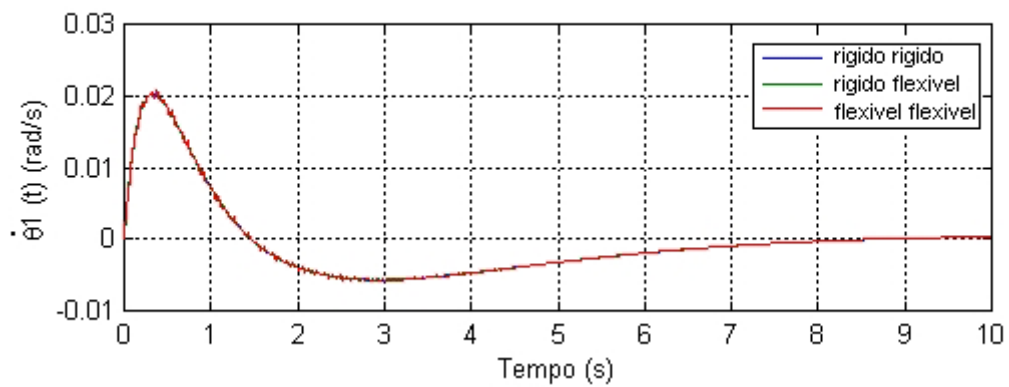


Fig. 4.22 - Gráfico da velocidade angular do elo 1, ganho  $K_s = 0,5$ .

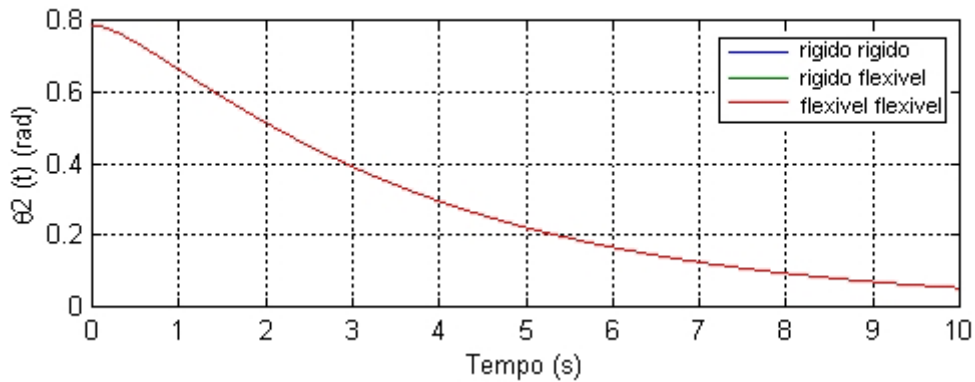


Fig. 4.23 - Gráfico da posição angular do elo 2, ganho  $K_s = 0,5$ .

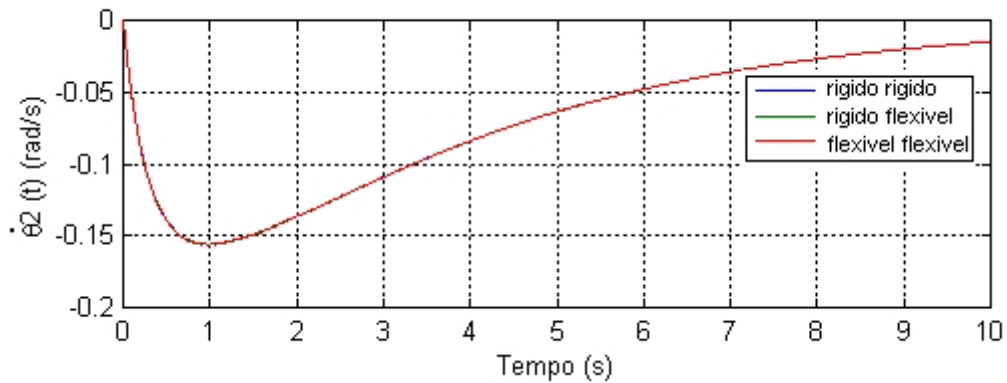


Fig. 4.24 - Gráfico da velocidade angular do elo 2, Ganho  $K_s = 0,5$ .

Os resultados obtidos nas Figuras (4.21), (4.22), (4.23) e (4.24) mostram que os movimentos de corpo rígido (deslocamentos angulares das juntas) dos modelos não sofrem alterações significativas.

Ampliando as Figuras (4.21), (4.22), (4.23) e (4.24) nota-se que nenhuma oscilação significativa foi observada referente à posição angular mas no entanto, com relação à velocidade angular observa-se nitidamente a presença da flexibilidade.

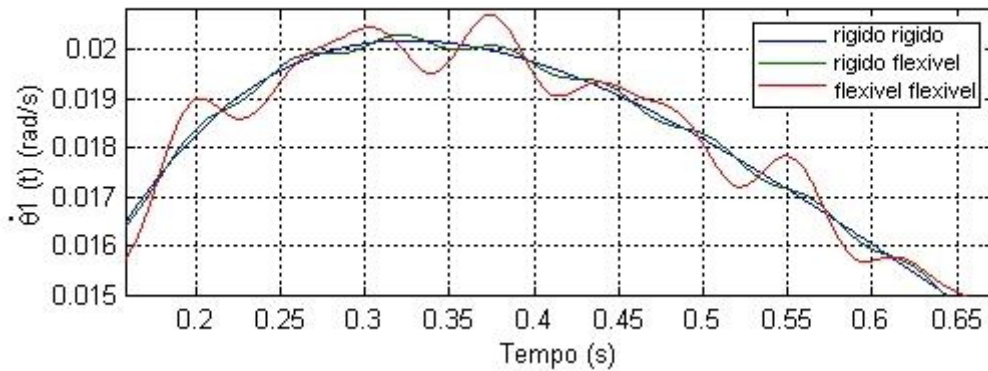


Fig. 4.25 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 1, ganho  $K_s = 0,5$ .

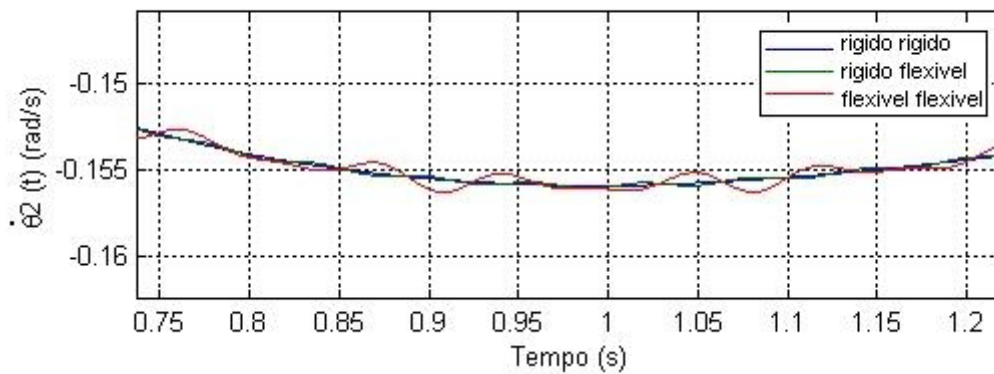


Fig. 4.26 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 2, ganho  $K_s = 0,5$ .

Embora o movimento de corpo rígido para os modelos do manipulador com um ou dois elos flexíveis seja estável, observam-se oscilações residuais na estrutura provocadas pela excitação da parte flexível do manipulador.

#### 4.5.2 - GANHO $K_s = 1,0$ .

De forma análoga à seção anterior apresenta-se agora a comparação dos resultados da dinâmica dos modelos desenvolvidos mantendo o ganho  $K_s = 1,0$ .

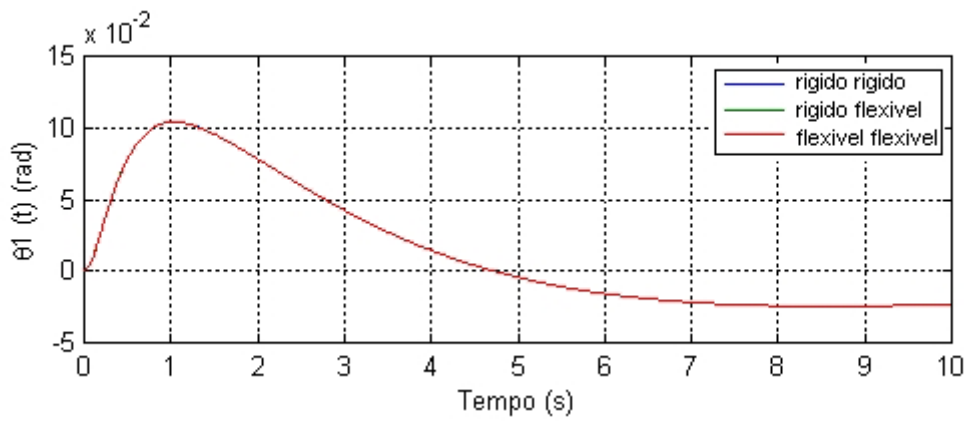


Fig. 4.27 - Gráfico da posição angular do elo 1, ganho  $K_s = 1,0$ .

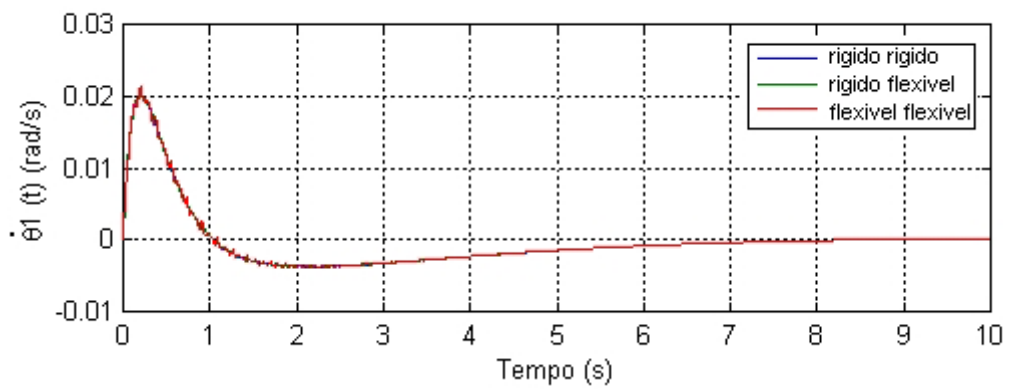


Fig. 4.28 - Gráfico da velocidade angular do elo 1, ganho  $K_s = 1,0$ .

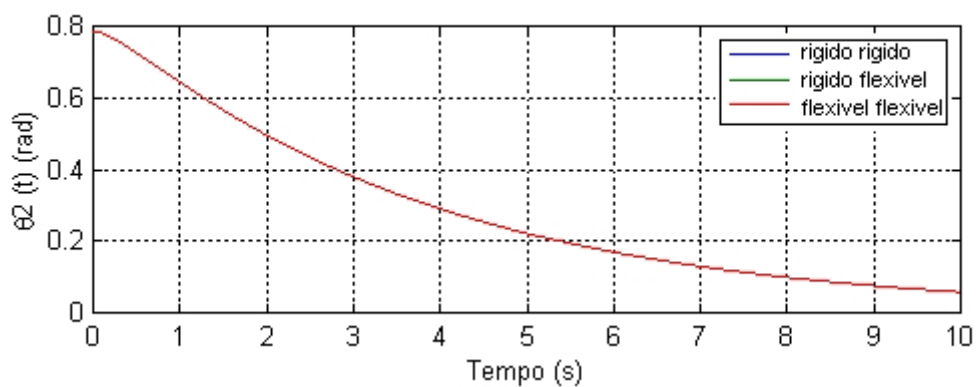


Fig. 4.29 - Gráfico da posição angular do elo 2, ganho  $K_s = 1,0$ .



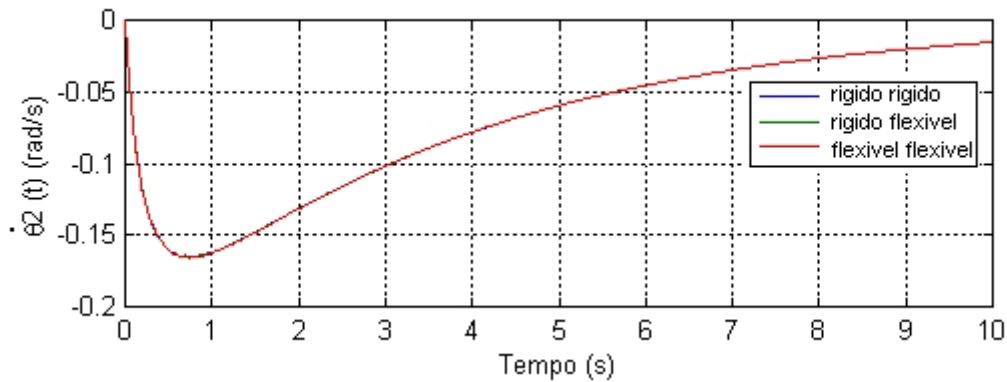


Fig. 4.30 - Gráfico da velocidade angular do elo 2, ganho  $K_s = 1,0$ .

Analisando os resultados das Figuras (4.27), (4.28), (4.29) e (4.30) nota-se que a presença da flexibilidade no sistema não degrada o comportamento dinâmico do manipulador. Ao ampliar os resultados desta seção mostra-se a flexibilidade do sistema:

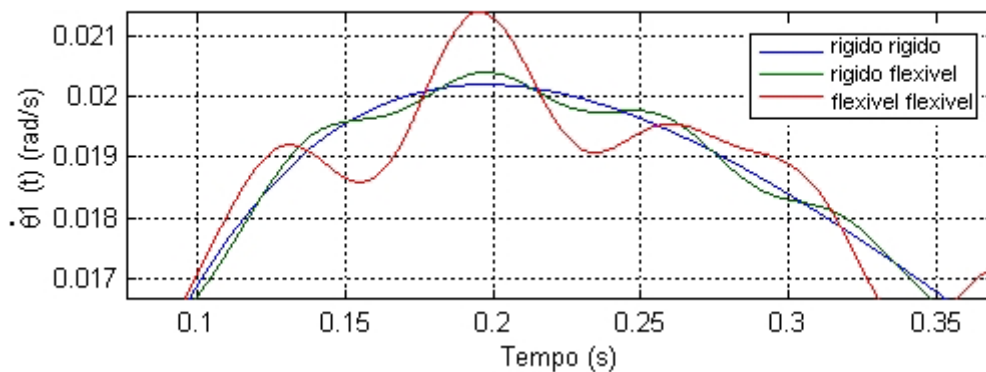


Fig. 4.31 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 1, ganho  $K_s = 1,0$ .

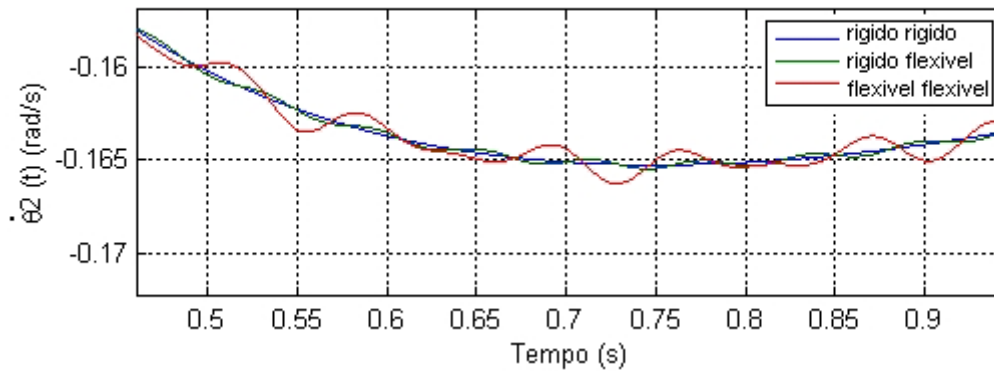


Fig. 4.32 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 2, ganho  $K_s = 1,0$ .

O movimento de corpo rígido para os modelos do manipulador com um ou dois elos flexíveis quando  $K_s = 1,0$  é estável; e os resultados obtidos mostram as oscilações residuais na estrutura provocadas pela excitação da parte flexível do manipulador.

#### 4.5.3 - GANHO $K_s = 2,0$ .

De forma análoga às seções anteriores apresenta-se agora a comparação dos resultados da dinâmica dos modelos desenvolvidos para  $K_s = 2,0$ .

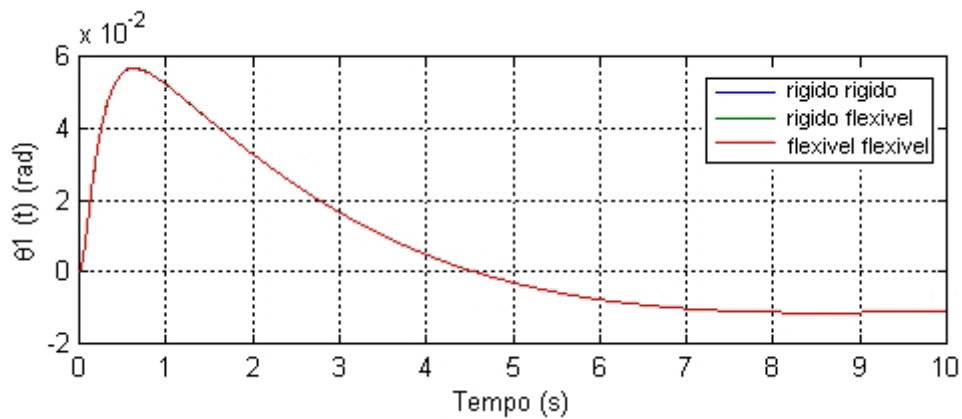


Fig. 4.33 - Gráfico da posição angular do elo 1, ganho  $K_s = 2,0$ .

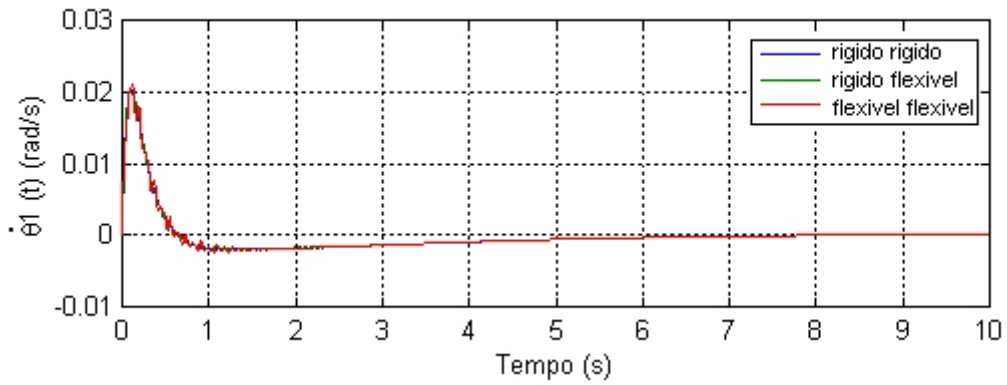


Fig. 4.34 - Gráfico da velocidade angular do elo 1, ganho  $K_s = 2,0$ .

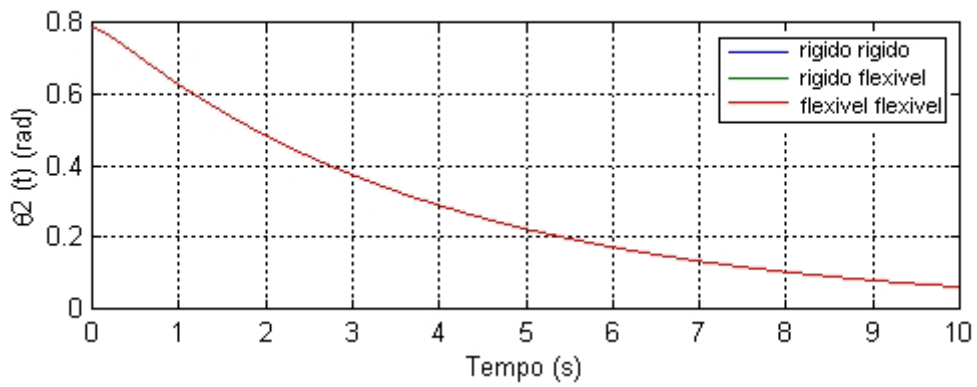


Fig. 4.35 - Gráfico da posição angular do elo 2, ganho  $K_s = 2,0$ .

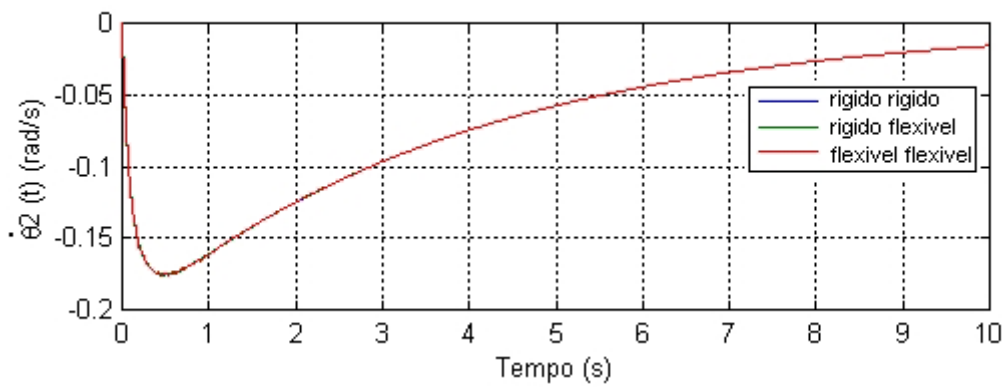


Fig. 4.36 - Gráfico da velocidade angular do elo 2, ganho  $K_s = 2,0$ .

As Figuras (4.33), (4.34), (4.35) e (4.36) mostram que o sistema rígido/flexível e flexível/flexível possuem a mesma trajetória seguida pelo sistema rígido/rígido e que os efeitos devido à presença da flexibilidade no sistema não são

suficientes para degradar o comportamento dinâmico do manipulador, nestes casos; estes efeitos podem ser melhor observados ampliando os resultados desta seção.

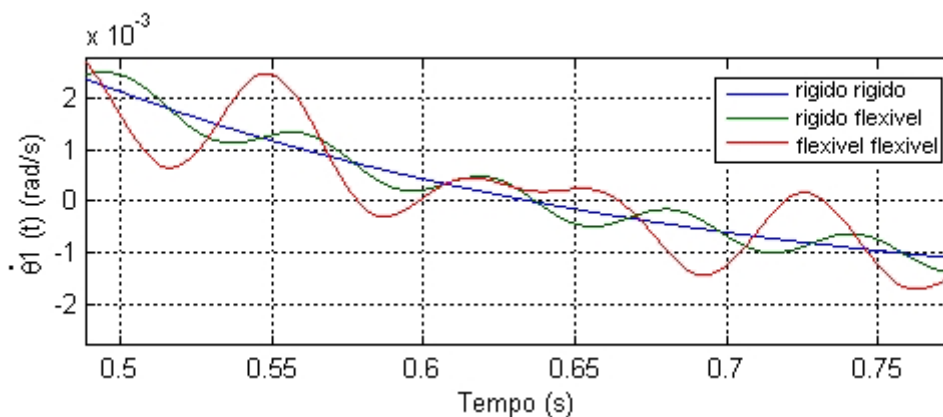


Fig. 4.37 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 1, ganho  $K_s = 2.0$ .

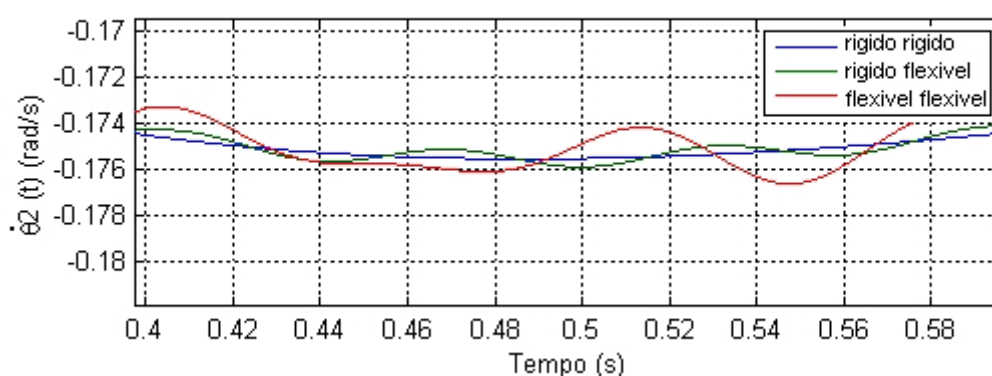


Fig. 4.38 - Gráfico ampliado da velocidade angular do elo 2, ganho  $K_s = 2.0$ .

Nesta seção assim como na anterior, não houve a ampliação dos resultados referentes à posição angular uma vez que nestas as oscilações não foram tão significativas.

Com  $K_s = 2,0$ , o movimento de corpo rígido para os modelos do manipulador com um ou dois elos flexíveis é estável mesmo quando há oscilações residuais na estrutura devido à excitação da parte flexível do manipulador.

Este capítulo apresentou as simulações usando os modelos desenvolvidos nos capítulos 2 e 3, onde foram obtidas as equações dinâmicas de movimento para

os manipuladores rígido e flexível e o sistema de controle, respectivamente. Apresentou-se o comportamento dinâmico dos modelos separadamente variando os ganhos do controlador e em seguida mostrou-se a influência da flexibilidade nos modelos.

O apêndice A mostra a maneira com o qual se trabalhou no software *Simulink*® durante as simulações, mostrando o diagrama de blocos para uma das situações simuladas.



## **CAPÍTULO 5**

### **COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES**

Neste capítulo, resumem-se os principais resultados da análise dessa dissertação. Algumas conclusões sobre os modelos para o manipulador são apresentadas e discutidas bem como sugestões para trabalhos futuros.

Apresentou-se neste trabalho a dinâmica e o controle de um manipulador com dois elos flexíveis modelado como um mecanismo constituído de duas vigas conectadas por meio de duas juntas tendo movimento planar. Apresentou-se também a dinâmica e o controle de dois outros modelos: um com dois elos rígidos e outro com um elo rígido e um elo flexível; ambos sob as mesmas condições do flexível, permitindo assim, que comparações pudessem ser feitas.

Utilizou-se a abordagem Lagrangiana para obtenção das equações de movimento de sistemas não conservativos. A flexibilidade foi modelada a partir do Método dos Modos Admitidos onde se fez o número de termos retidos na aproximação é igual a 1 (primeiro modo). Os elos do manipulador foram aproximados por vigas uniformes sendo modeladas segundo as condições de contorno para vigas pinada-pinada e pinada-livre.

Nenhum processo de linearização foi empregado mostrando que é possível trabalhar com as equações dinâmicas de movimento de maneira mais genérica possível, sem linearizações, entretanto foi utilizada a hipótese de pequenos deslocamentos elásticos.

A forma com que foi feita a implementação computacional deste trabalho, permite que um monitoramento de cada termo associado à flexibilidade seja realizado permitindo a observação de efeitos físicos causados por ela sobre o sistema.

O sistema de controle desenvolvido foi baseado na lei de controle PD (proporcional+derivativo), tendo como objetivo principal controlar o movimento de corpo rígido para os três modelos do manipulador desenvolvidos. Os ganhos do controlador PD foram variados durante o estudo à fim de estudar o desempenho do sistema de controle além de garantir sua eficiência.

Como conclusão da ação do sistema de controle, diz-se que foi capaz de controlar o movimento de corpo rígido em todos os casos. Notou-se a presença de oscilações ocasionadas pela excitação da parte flexível nas respostas das simulações mas que, no entanto, não comprometeram o desempenho do sistema de controle e nem desestabilizaram o sistema de maneira geral para os casos estudados.

Apresenta - se a seguir algumas sugestões para futuros trabalhos:

- Aumentar o número de termos retidos na aproximação do modelo dinâmico;
- projetar um sistema de controle ótimo considerando erros de trajetórias e ajustes de ganhos;
- projetar controladores capazes de compensar efeitos físicos considerados relevantes quanto à flexibilidade da estrutura, minimizando e amortecendo sua ação sobre o manipulador;
- estudar as variações das frequências de vibração do manipulador dentro de seu espaço de trabalho e com variações de cargas.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Asada, H.; Slotine, J. J. E. **Robot analysis and control**. New York: John Wiley and Sons, 1986.
- Benati, M.; Morro, A. Dynamics of chain of flexible links. **Transactions of the ASME**. v. 110, n. 4, p.410-415, Dec. 1988.
- Bernhard, R. K. Mechanical vibrations. New York : Pitman, 1943.
- Book, W. J. Recursive lagrangian dynamics of flexible manipulators arms. **The International Journal of Robotics Research**. v. 3, n: 3, p.87-101, 1984.
- Book, W. J.; Maizza-Neto, O.; Whitney, D. E. Feedback control of two beam, two joint systems with distributed flexibility. **Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control**. v. 97, n.4, p.424-431, Dec. 1975.
- Clough, R. W.; Penzien, J. **Dynamics of structures**. Tokio: Kosaico Printing, 1975.
- Conte, S.; de Boor, C. **Elementary numerical analysis: an algorithmic approach**. 2 ed. Auckland: McGraw-Hill, 1972.
- Craig, J. J. **Introduction to robotics: mechanics and control**. 2 ed. Reading: Addison-Wesley Publishing, 1955.
- David, S. A. **Modelagem, simulação e controle de robôs manipuladores**. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.
- Greenwood, D. T. **Principles of dynamics**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1965.

- Joshi, M. S., *et al.* **A class of stabilizing controllers for flexible multibody systems**. Washington: NASA, May, 1995. NASA Technical Paper 3494.
- Junkins, J. L.; Kim, Y. **Introduction to dynamics and control of flexible structures**. Washington: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1993.
- Murray, R.M.; Li, Z.; Sastry, S. S. **A mathematical introduction to robotic to manipulation**. Boca Raton: CRC Press. 1993.
- Meirovitch, L. **Analytical methods in vibrations**. London: The Macmillan, 1967.
- Meirovitch, L. **Computational methods in structural dynamics**. Maryland - Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1980.
- Meirovitch, L. **Dynamics and control of structures**. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- Meirovitch, L. **Elements of vibration analysis**. Tokio : McGraw-Hill, 1975.
- Meirovitch, L.; Kwak, M. K. On the maneuvering and control of space structures. In: International Dynamics of Flexible Structures in Space Conference. 1990, Cranfield . **Proceedings...** Cranfield U.K. 03-17, May 1990.
- Meirovitch, L.; Quinn, R. D. Maneuvering and vibration control of flexible spacecraft. **The Journal of Astronautical**, v. 35, n: 3, p. 301-328, July/Sept. 1987.
- Meirovitch, L.; Quinn, R. D. Maneuvering and vibration control of flexible spacecraft. In: Nasa Workshop on Structural Dynamics and Control Interaction of Flexible Structures, 1986, Huntsville, AL. **Proceedings...** Huntsville: NASA Marshall Space Flight Center, p. 867-877, April 1986.

- Ogata, K. **Engenharia de controle moderno**. Rio de Janeiro:: Prentice Hall do Brasil, 1993.
- Paden, B.; Panja. R. Globally asymptotically stable PD+ controller for robot manipulators. **International Journal of Control**, v. 47, n. 6, p.1697-1712. 1987.
- Papadopoulos, M.; Garcia, E. Closed-Loop pole design for vibration suppression. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 20, n. 2, p. 333-337, March-April, 1997.
- Shabana, A. A. **Dynamics of multibody systems**. New York: John Wiley & Sons. Inc. 1989.
- Shampine, L. F.; Gordon, M. K. **Computer solution of ordinary differential equations**: the initial value problem. San Francisco: W. H. Freeman, 1975.
- Shampine, L. F.; Reichelt, M. W. The Matlab ODE suite. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 18, n. 1, 1997.
- Theodore, R. J.; Ghosal,. A. Comparison of the assumed modes and finite element models for flexible multilink manipulators. **The International Journal of Robotics Research**. v. 14, n. 2, p.91-109, Ap. 1995.
- Thomson, W. T. **Theory of vibration with applications**. New Jersey: Prentice Hall, 1981.
- Timoshenko, S.; Goodier, J. N. **Theory of elasticity**. Tokio: McGraw-Hill Book Company, 1934.
- Tomei, P.; Tornambè, A. Approximate modeling of robots having elastic links. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**. v. 18, n. 5, p.831-839. 1988.

Young, D.; Felgar, R. P. **Tables of characteristics functions representing normal modes of vibration of a beam.** Texas: The University of Texas, 1949 (Publication N° 4913).

## APÊNDICE A

### IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

#### INTRODUÇÃO

O objetivo deste apêndice é apresentar o diagrama de blocos implementado no Software *Simulink*® para um dos modelos desenvolvidos nos Capítulos 2 e 3 que forneceram os resultados mostrados no Capítulo 4.

O diagrama ilustrado pela Figura (A.1) a seguir fornece a dinâmica do manipulador com elos flexíveis, os torques de entrada e o sistema de controle.

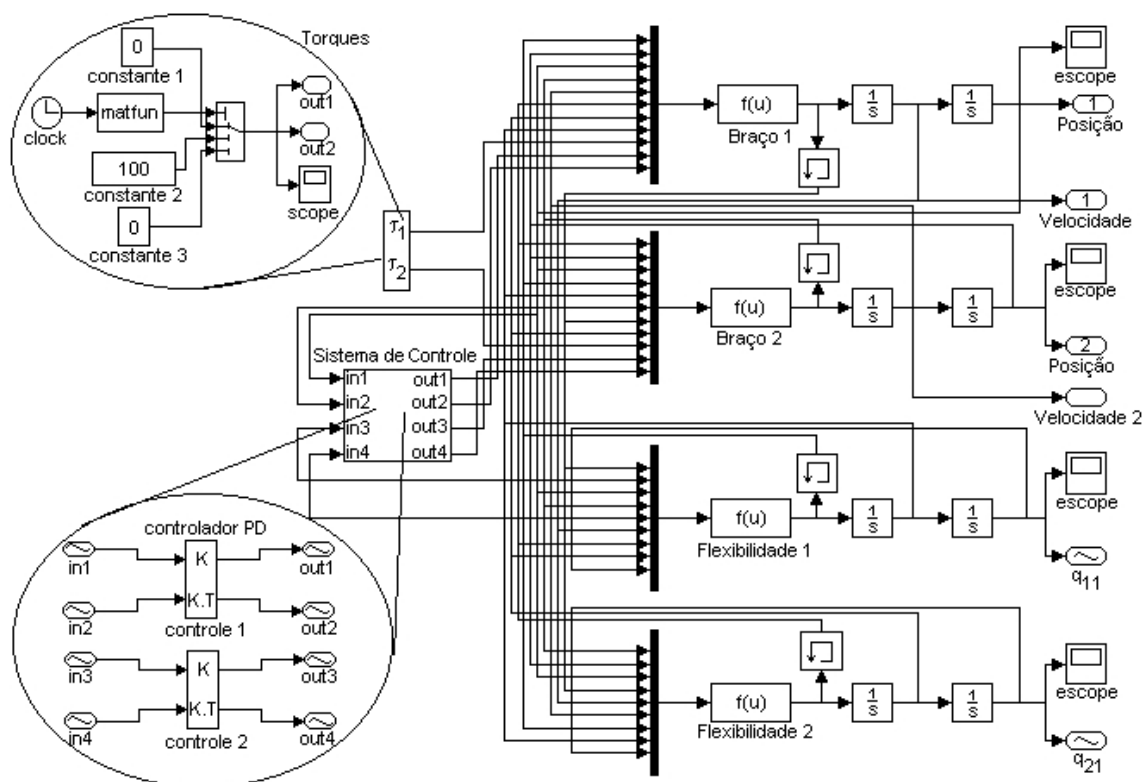


Fig. A.1 - Diagrama de blocos do simulink para o manipulador flexível.



## **APÊNDICE B**

### **ANÁLISE ESTRUTURAL**

#### **INTRODUÇÃO**

Uma das análises importantes no estudo de estruturas é a análise estrutural onde se obtém as freqüências de vibração do sistema. Na literatura são encontrados vários métodos para estimar as freqüências de vibração de manipuladores, não somente com variação de carga mas também com a variação da configuração dos elos em termos de deslocamentos angulares. Neste trabalho, obtém-se as freqüências de vibração do sistema somente considerando a variação da configuração dos elos (posição angular).

Neste apêndice, obtém-se as freqüências de vibração para o manipulador utilizando o Método de Elementos Finitos. Este método constitui uma técnica de análise numérica para a obtenção aproximada de soluções de problemas de autovalores. Em aplicações de engenharia o método foi apresentado pela primeira vez, como uma idéia intuitiva de estender o método de análise matricial de estruturas para os problemas de contínuo elástico, tendo como pioneiros Turner, Clough, Martin e Tropp. Esses autores consideraram o contínuo como composto de regiões finitas (chamada posteriormente de elemento finito por Clough) e descreveram as propriedades de cada região em termos de um número finito de parâmetros, nominalmente os deslocamentos de um número prescritos de pontos na região do contorno (chamados de pontos nodais ou nós); então aplicando as condições de compatibilidade dos deslocamentos desses pontos, os elementos foram conectados juntos, formando então um sistema de equações lineares simultâneas com os deslocamentos como incógnitas. A solução dessas equações, fornece os deslocamentos nodais, os quais são utilizados subseqüentemente para determinar as tensões em cada região.

A vibração, que descreve um sistema mecânico em oscilação, é classificada como livre quando são provocadas exclusivamente pela energia potencial e energia cinética existentes no sistema. Os problemas de vibração livre são problemas de autovalor e quando as forças são conservativas e não é considerado o amortecimento, estes problemas levam à obtenção de autovalores reais que representam a frequência de vibração. Os sistemas sob vibração livre não amortecida são governados pela equação dada na forma matricial.

$$(K - \beta_p M)\Phi_p = 0 \quad (B.1)$$

Onde,

$$\beta_p^4 = \frac{\rho \omega_p^2}{EI} \quad (B.2)$$

Com K e M sendo matrizes simétricas, positivas definidas representando as matrizes de rigidez e de massa, respectivamente. Para cada modo de vibração p, tem-se a frequência natural  $\omega_p$  e o modo de vibração  $\Phi_p$ . As Equações (B.1) e (B.2) são equações utilizadas em rotinas do Nastran para gerar as frequências de vibração de uma estrutura.

## MODELO ESTRUTURAL

As frequências de vibração do manipulador, neste trabalho, são obtidas numericamente. Para isto utiliza-se o software *Femap*® para gerar o modelo estrutural. Este modelo é constituído por dois elementos de barra com um número de nós igual a 3. As condições de contorno e os parâmetros do manipulador são os mesmos utilizados na análise dinâmica.

No entanto, apresenta-se aqui o ambiente de trabalho do *Femap*® utilizado para gerar o modelo do manipulador. Inicialmente, criam-se os nós da estrutura fornecendo as componentes de coordenadas cartesianas, conforme ilustrado.



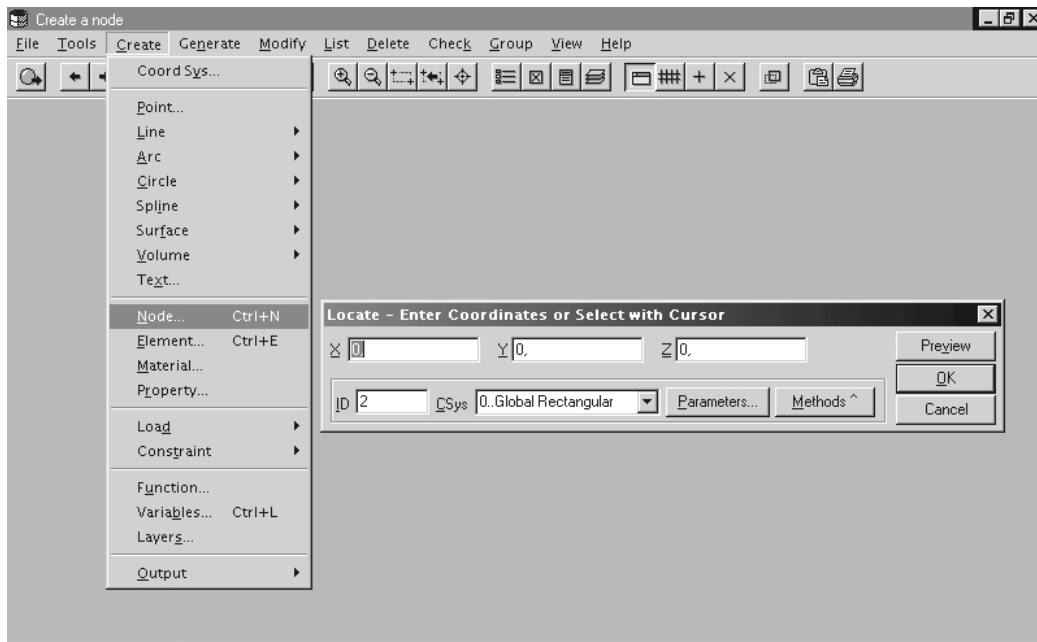


Fig. B. 1- Nós da estrutura

Uma vez especificados os nós da estrutura, informa-se o tipo de elementos que serão utilizados para representá-la.

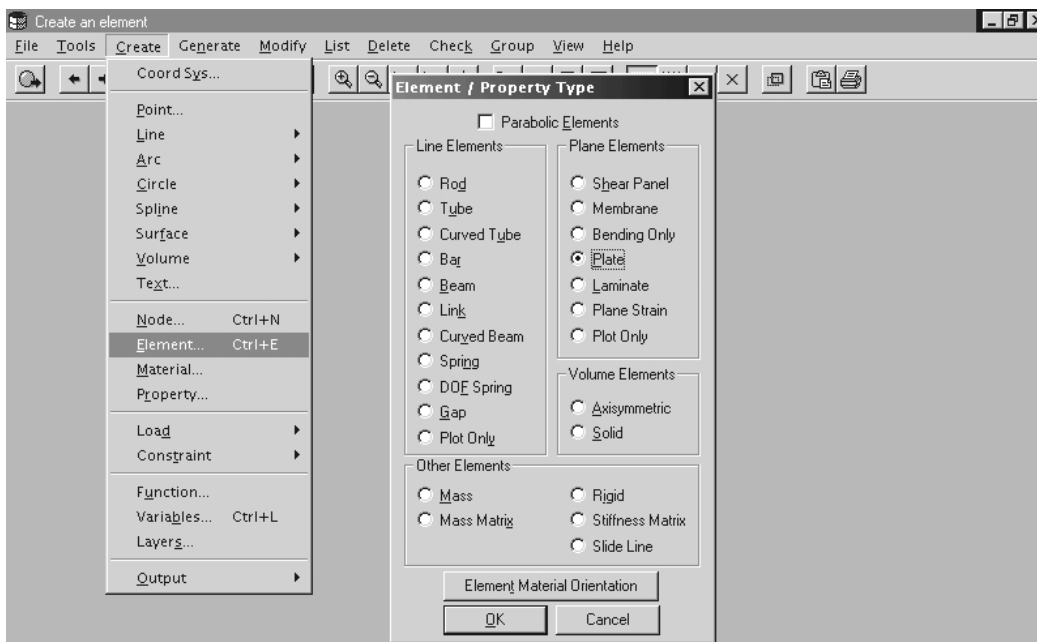


Fig. B. 2 - Elementos da estrutura

Os parâmetros da estrutura, encontrados na Tabela (4.1), são utilizados para especificar o material que constitui o manipulador, conforme ilustrado a seguir:

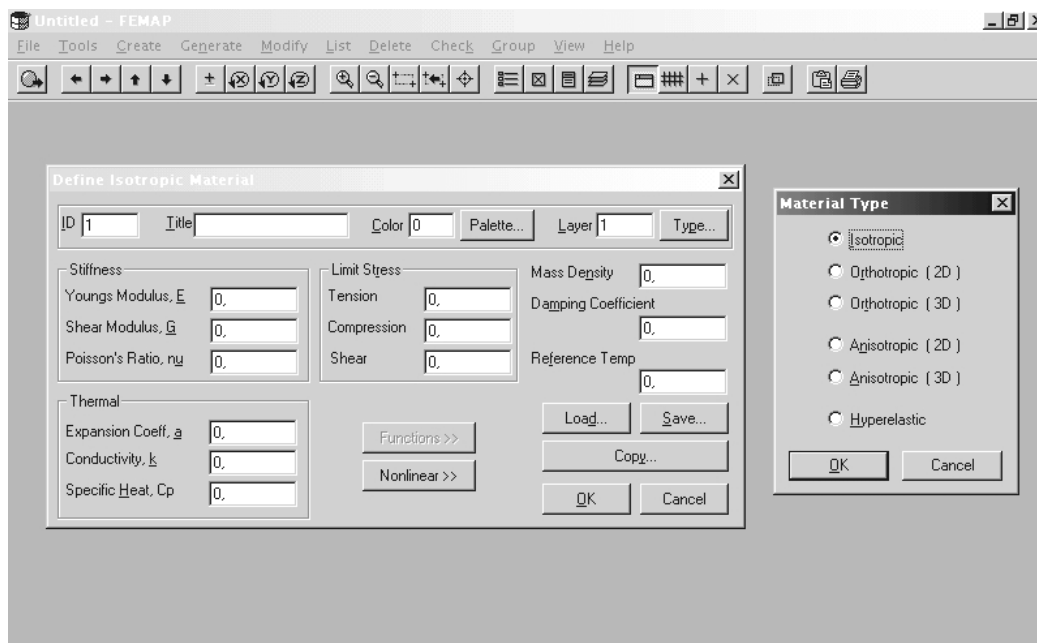


Fig. B. 3 - Material da estrutura

A Figura seguinte ilustra o modelo estrutural para o manipulador proposto criado no *Femap*®.

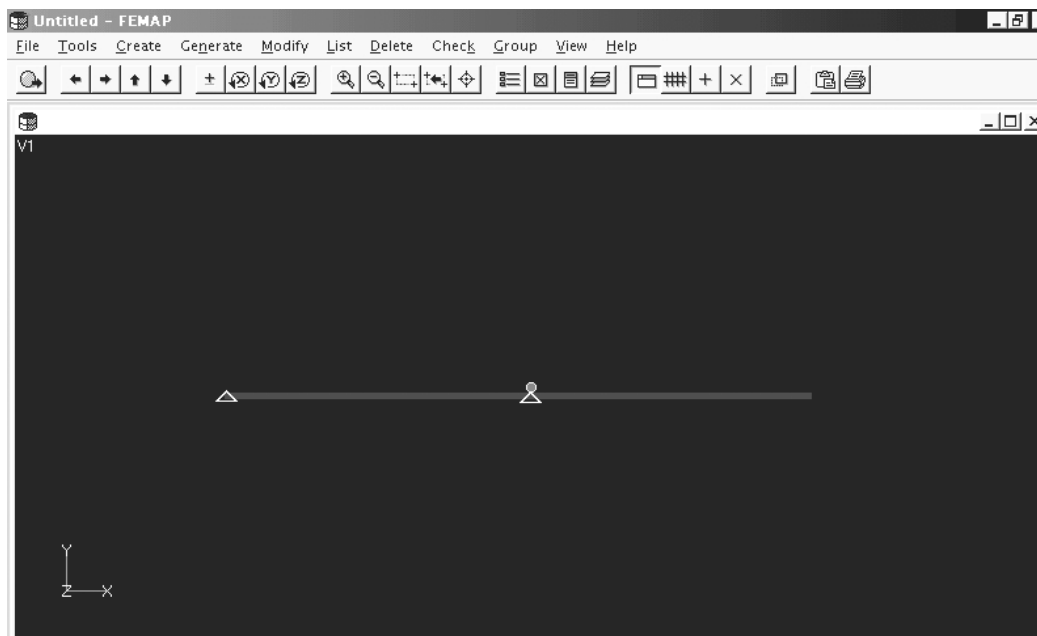


Fig. B. 4 - Modelo Estrutural

A partir deste modelo, obtém-se através do Nastran as freqüências de vibração da estrutura.

## RESULTADOS

Nesta seção, apresentam-se as freqüências de vibração da estrutura relacionadas com os posicionamentos dos elos sem variações de cargas. A figura a seguir ilustra as configurações dos elos do manipulador estudadas.

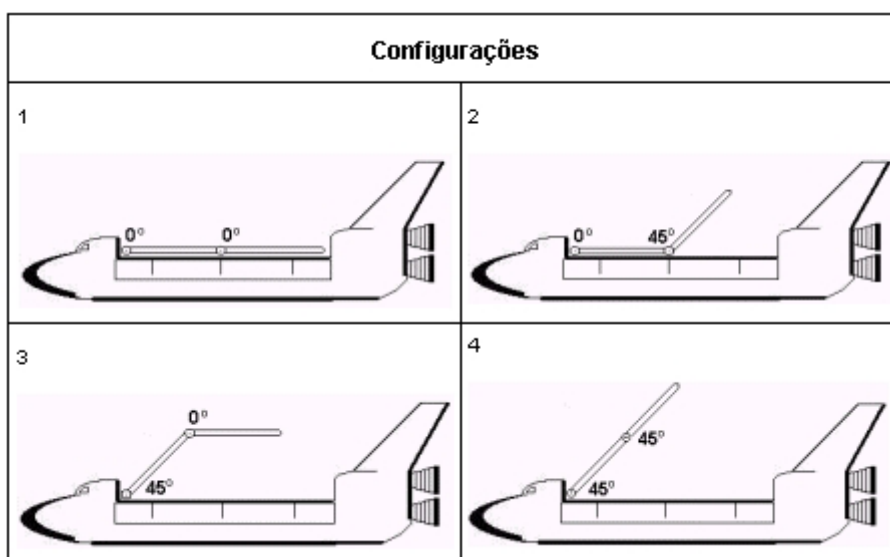


Fig. B. 5 - Descrição das configurações

Os respectivos resultados encontram-se listados nas seguintes tabelas.

TABELA B. 1 – AUTOVALORES E FREQÜÊNCIAS DE VIBRAÇÃO PARA CONFIGURAÇÃO 1

Autovalores	Freqüências (Hz)	Freqüências (rad/s)
7.4012e+01	1.3692e+00	8.6030e+00
2.9534E+03	8.6494e+00	5.4346e+01
3.3785e+04	2.9254e+01	1.8381e+02
2.8461e+05	8.4907e+01	5.3349e+02

TABELA B. 2 – AUTOVALORES E FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO PARA CONFIGURAÇÃO 2

<b>Autovalores</b>	<b>Frequências (Hz)</b>	<b>Frequência (rad/s)</b>
4.4883e+02	3.3718e+00	2.1186e+01
2.0644e+04	2.2867e+01	1.4368e+02
1.5465e+05	6.2588e+01	3.9325e+02
2.9505E+06	2.7338e+02	1.7177e+03

TABELA B. 3 – AUTOVALORES E FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO PARA CONFIGURAÇÃO 3

<b>Autovalores</b>	<b>Frequências (Hz)</b>	<b>Frequências (rad/s)</b>
2.0027e+04	2.2523e+01	1.4152e+02
2.4705e+05	7.9107e+01	4.9704e+02
1.3626e+06	1.8578e+02	1.1673e+03
1.9768e+07	7.0762e+02	4.4461e+03

TABELA B. 4 – AUTOVALORES E FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO PARA CONFIGURAÇÃO 4

<b>Autovalores</b>	<b>Frequências (Hz)</b>	<b>Frequências (rad/s)</b>
1.6749e+04	2.0597e+01	1.2942e+02
1.0698e+05	5.2057e+01	3.2708e+02
4.2137e+05	1.0331e+02	6.4913e+02
3.2042e+06	2.8489e+02	1.7900e+03

Ao analisar os resultados observa-se que para cada posição dos elos encontra-se uma determinada frequência. Isto permite dizer que, uma vez que a configuração do manipulador se altera devido ao movimento dos elos, os momentos de inércia também se alteram e conseqüentemente as frequências de vibração da estrutura também.

Logo, as frequências de vibração do manipulador se apresentaram dependentes da relação existente entre as posições angulares  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Este fato é considerado um dos maiores problemas no que diz respeito à dinâmica de manipuladores flexíveis devido à dificuldade em se estimar as frequências de vibração para todo o espaço de trabalho do manipulador.