



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-11620-NTC/319

**CONSTRUÇÃO DE FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO USANDO
TRANSFORMADA DE FOURIER**

Alexandre Guirland Nowosad
Elizabeth Silvestre Espinoza

*“Era uma noite fria de lua cheia. Era tanto o silêncio e tão leve o ar que se alguém
aguçasse o ouvido talvez pusesse escutar o sereno da solidão”.*

ÉRICO VERÍSSIMO

*Aos meus colegas de trabalho do
Grupo de Assimilação de Dados
da Divisão de Modelagem e Desenvolvimento do CPTEC .*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho pelo incentivo em realizar este trabalho.

RESUMO

Este trabalho focaliza a construção matemática de funções de correlação para aplicações em assimilação de dados meteorológicos. Na assimilação moderna, usam-se tanto funções de domínio espacial ilimitado quanto limitado para parametrizar a correlação espacial dos erros de previsão. O segundo tipo de parametrização pretende ser matematicamente realista. Nesta nota técnica, a Transformada de Fourier (TF) e o Teorema da Convolução são as ferramentas usadas para construir funções de correlação unidimensionais, o que restringe a parametrização ao caso unidimensional para facilitar o entendimento. Este método analítico parece ser o mais fácil para a construção de funções de correlação de domínio espacial limitado em geral.

CONSTRUCTION OF CORRELATION FUNCTIONS USING FOURIER TRANSFORM

ABSTRACT

This work focuses on mathematical construction of correlation functions for applications in meteorological data assimilation. In modern assimilation both unlimited and limited spatial-domain functions are used to parameterize the spatial correlation of prediction errors. The second type of parameterization claims to be mathematically realistic. In this technical note, the Fourier transform (FT) and the Convolution Theorem are the tools used for construction of one-dimensional correlation functions, which restricts the parameterization to the one-dimensional case to facilitate understanding. This analytical method appears to be the easiest for construction of limited spatial-domain correlation functions in general.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
Lista de Siglas e Abreviaturas	15
Lista de Figuras.....	17
Lista de Símbolos.....	19
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	19
1.1 - ESBOÇO GERAL	19
CAPÍTULO 2 - CÁLCULO DE INTEGRAIS DE CONVOLUÇÃO PARA FUNÇÕES PARES	20
CAPÍTULO 3 - EXEMPLOS	24
3.1 - Exemplo 1: Uma Exponencial Decadente.....	24
3.2 - Exemplo 2: Um Pulso.....	26
CAPÍTULO 4 - COMENTÁRIOS FINAIS	29
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	30

SIGLAS E ABREVIATURAS

TF - Transformada de Fourier

FT - Fourier Transform

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
FIGURA 1 – TRAJETO DE INTEGRAÇÃO PARA AS DUAS PRIMEIRAS PARCELAS DA EXPRESSÃO (8), CONTORNO C_R -HORÁRIO.....	22
FIGURA 2 – TRAJETO DE INTEGRAÇÃO PARA AS DUAS PRIMEIRAS PARCELAS DA EXPRESSÃO (8), CONTORNO C_R - ANTIHORÁRIO.....	26
FIGURA 3 – TRAJETO DE INTEGRAÇÃO PARA O CÁLCULO DA PARTE CAUSAL DE $P(r)$	27

LISTA DE SÍMBOLOS

ω - frequência de oscilação ou parte imaginária do número complexo $z = \sigma + i\omega$

σ - parte imaginária do número complexo $z = \sigma + i\omega$

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Sistemas de assimilação de dados atmosféricos operacionais têm requerido, faz muitos, anos a especificação de correlações de erro de previsão e de observação em duas ou três dimensões, usando funções dependentes de alguns parâmetros sintonizáveis. Há muitos exemplos de funções de correlação parametrizadas para análise estatística de dados em uma dimensão. Campos de erros geofísicos, diferentemente de campos unidimensionais, são geralmente considerados distribuídos em todo ou parte de um anel esférico tridimensional. Na atual geração de esquemas de análise estatística para assimilação de dados atmosféricos, são usadas funções bidimensionais de correlação de erro de previsão isotrópicas para especificação horizontal de erro (Gaspari e Cohn, 1999; Dee e da Silva, 1999; Purser et al, 2003). Um exemplo de uso de parametrizações de dimensão espacial ilimitada pode ser visto em Purser et al (2003).

Conforme Gaspari e Cohn (1999), uma das maneiras de se construir funções de correlação isotrópicas tridimensionais consiste em utilizar funções representantes unidimensionais cujas Transformadas de Fourier (TF) decaem conforme aumenta o número de onda (ou frequência). A principal vantagem desta abordagem é a simplicidade com que se determinam funções de correlação tridimensionais válidas. A abordagem, entretanto, não provê procedimento geral para construção de funções de correlação de espaço limitado. Na prática, será necessário delimitar o espaço da função que será escrita numa matriz e, então, calcular-se-ão os seus valores num número finito de pontos espaciais. Porém, funções unidimensionais de espaço limitado matematicamente não possuem TF de domínio de frequência finito. Na prática, se for construída primeiro a parametrização de uma função usando sua TF, calculada sua Série de Fourier, truncada esta série e, finalmente, calculada numericamente a função por inversão da série, geralmente ocorrerá erro numérico indesejável (além dos erros de precisão numérica) (Antoniu, 1979). A alternativa proposta por Gaspari e Cohn é construir funções de correlação multivariadas e multidimensionais através de convoluções. Convolução é particularmente eficiente para construção de funções de correlação de espaço limitado.

Esta nota técnica não pretende apresentar nenhum resultado novo, mas, apenas documentar o procedimento de construção de funções unidimensionais pares (isto é, simétricas em relação ao eixo vertical) normalizadas, similares a distribuições gaussianas. O artigo de Gaspari e Cohn mostra a aplicação do Teorema da Convolução na construção de funções novas, a partir de funções pré-definidas, e mostra a TF das novas funções. Porém, não mostra como inverter a transformada para obter a função desejada. Isto requer o uso de cálculo de integrais no domínio dos números complexos.

Portanto, para o caso em que se queira usar esta técnica de modelagem de erros de previsão e observação meteorológica (ou de outra natureza), fica aqui registrado o passo faltante no artigo.

1.1 Esboço Geral

Este trabalho foi dividido em mais 2 capítulos, descritos a seguir:

- *CAPÍTULO 2 - CÁLCULO DE INTEGRAIS DE CONVOLUÇÃO PARA FUNÇÕES PARES*: Neste capítulo, mostra-se como calcular a integral de convolução de uma função par, que se subdivide em duas parcelas, a primeira definida exclusivamente para a esquerda do eixo vertical (chamada *anticausal*) e a segunda definida exclusivamente para a direita do eixo (chamada *causal*);
- *CAPÍTULO 3 - EXEMPLOS*: Resultados do cálculo em dois casos importantes, uma exponencial decadente e um pulso são apresentados neste capítulo.
- *CAPÍTULO 4 – COMENTÁRIOS FINAIS*: Comenta-se a importância deste método para a Previsão Numérica do Tempo operacional.

CAPÍTULO 2

CÁLCULO DE INTEGRAIS DE CONVOLUÇÃO PARA FUNÇÕES PARES

Sejam as funções pares:

$$B_m(r) = B_m(-r). \quad (1)$$

Então, podemos construir uma nova função

$$P_{mn}(r) := (B_m * B_n)(r) = \int_{-\infty}^{\infty} B_m(v)B_n(r-v)dv. \quad (2)$$

Esta operação é chamada *convolução*. No caso desta aplicação, a maneira mais fácil de calcular esta integral é usando a TF (Transformada de Fourier) e sua inversa (Papoulis, 1968). Se

$$\hat{B}_m(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_m(r)e^{-i\omega r} dr \quad (3)$$

onde ω é o número de onda (ou frequência) em que cada componente de Fourier de $B(r)$ oscila no eixo r , e a transformação inversa é

$$B_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{B}_m(i\omega)e^{i\omega r} d\omega \quad (4)$$

então

$$\hat{P}_{mn}(\omega) = \hat{B}_m(\omega)[\hat{B}_n(\omega)]^*. \quad (5)$$

onde o símbolo * (asterisco) denota complexo conjugado. Note-se que, caso $m = n$ obtém-se

$$\hat{P}_m(\omega) = |\hat{B}_m(\omega)|^2, \quad (6)$$

que é a chamada densidade espectral de potência de $B(r)$. Em seguida, calcula-se

$$\begin{aligned}
P_{mn}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}_{mn}(i\omega) e^{i\omega r} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}_{mn}(i\omega) e^{i\omega r} d(i\omega) = \quad (7) \\
&= - \sum_k^{\text{dentro de } C_R\text{-horário}} \text{Res}_{z=z_k} [e^{zr} \hat{P}_{mn}(z)] + \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R\text{-horário}} e^{zr} \hat{P}_{mn}(z) d(z) \text{ (parte anticausal)} + \\
&+ \sum_k^{\text{dentro de } C_R\text{-antihorário}} \text{Res}_{z=z_k} [e^{zr} \hat{P}_{mn}(z)] - \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R\text{-antihorário}} e^{zr} \hat{P}_{mn}(z) d(z) \text{ (parte causal)}, \quad (8)
\end{aligned}$$

$z = \sigma + i\omega$ é a variável complexa usada na integração e

$$\text{Res}_{z=z_0} [f(z)] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} f(z) dz \quad (9)$$

que é o resíduo de $f(z)$ em sua singularidade $z = z_0$, sendo C_R contornos apropriados contendo tanto o eixo imaginário quanto as singularidades de $\hat{P}_{mn}(z)$, localizadas à direita do eixo, no caso C_R -horário (percorrido no sentido horário), e à esquerda, respectivamente do eixo, no caso C_R -antihorário (percorrido no sentido antihorário) (Churchill e Brown, 1990). Os contornos são mostrados a seguir nas figuras 1 e 2.

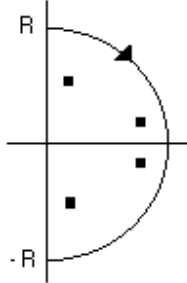


Figura 1 – Trajeto de integração para as duas primeiras parcelas da expressão (8), contorno C_R -horário.

Os dois primeiros termos na expressão (8) constituem a chamada parte anticausal da função de correlação, pois correspondem a valores de $\hat{P}_{mn}(r)$ para r negativo (Papoulis, 1977).

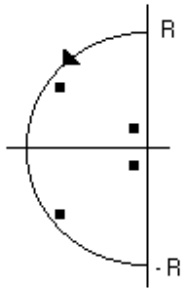


Figura 2 – Trajeto de integração para as duas últimas parcelas da expressão (8), contorno C_R -antihorário.

Os termos restantes, na expressão (8), constituem a chamada parte causal da função de correlação, pois correspondem a valores de $\hat{P}_{mn}(r)$ para r positivo (Papoulis, 1977).

Geralmente, escolhem-se $B_m(r)$ e $B_n(r)$ junto com restrições adicionais para os valores de r de maneira que as integrais de contorno tornem-se nulas quando R tende a infinito, restando apenas os somatórios a serem calculados. Assim, o cálculo é, na prática, tipicamente uma conta algébrica, embora às vezes trabalhosa, sendo mais fácil do que aparenta a expressão (8).

Note que sendo $B_m(r)$ real e par

$$\hat{B}_m(\omega) = 2 \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} B_m(r) \right] e^{-i\omega r} dr. \quad (9)$$

CAPÍTULO 3

EXEMPLOS DE FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO CONSTRUÍDAS POR

CONVOLUÇÃO

Nos exemplos a seguir usa-se, para facilitar a expressão matemática, a chamada função degrau:

$$u(r - r_0) = \begin{cases} 1 & r \geq r_0 \\ 0 & r < r_0 \end{cases} \quad (10)$$

3.1 Exemplo 1: Uma Exponencial Decadente

Considere-se a função

$$B(r) = e^{-\beta|r|} [u(r+c) - u(r-c)] \quad (11)$$

onde β é a taxa de decadência e c delimita as duas bordas da exponencial centrada na origem, à esquerda e à direita. A TF de $B(r)$ é

$$\hat{B}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(r) e^{-i\omega r} dr = 2 \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} e^{-\beta r} [u(r) - u(r-c)] e^{i\omega r} dr \right], \quad (12)$$

que resulta em

$$\hat{B}(\omega) = \frac{2}{\beta^2 + \omega^2} [b + e^{-\beta c} (\omega \operatorname{sen}(\omega c) - \beta \cos(\omega c))] \quad (13)$$

Se

$$P(r) = (B * B)(r) \quad (14)$$

a TF de $P(r)$ é

$$\hat{P}(\omega) = [\hat{B}(\omega)]^2 \quad (15)$$

então,

$$\hat{P}(\omega) = \frac{2}{(\beta^2 + \omega^2)^2} \left[2\beta^2 + 4\beta e^{-\beta c} (\omega \sin(\omega c) - \beta \cos(\omega c)) + e^{-2\beta c} (\beta^2 + \omega^2) - 2e^{-2\beta c} \beta \omega \sin(2\omega c) + e^{-2\beta c} (\beta^2 - \omega^2) \cos 2\omega c \right] \quad (25)$$

Esta função tem duas singularidades, uma em $z = \beta$, correspondendo à parcela de $B(r)$ no lado esquerdo da origem (a parte anticausal), e outra em $z = -\beta$ (a parte causal).

Note-se que

$$\sin(\omega c) = \frac{e^{i\omega c} - e^{-i\omega c}}{2i}. \quad (26)$$

Neste caso, pode-se aplicar a fórmula (8). Para mostrar o processo matemático, uma das integrais a serem calculadas na inversão pertencendo à parcela anticausal do quarto termo da expressão (25) resulta em

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega e^{i\omega(r+2c)}}{[\beta^2 - (i\omega)^2]^2} d(i\omega) = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=\beta} \left[\frac{ze^{z(r+2c)}}{(\beta^2 - z^2)^2} \right] + \int_{C_R\text{-horário}} \frac{ze^{z(r+2c)}}{(\beta^2 - z^2)^2} dz. \quad (27)$$

O segundo termo em (27) convergirá anulando-se quando $R \rightarrow \infty$ somente se $r \leq -2c$.

Restará calcular o primeiro termo do lado direito de (27), o resíduo. A maneira mais fácil de calculá-lo será através da fórmula

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \left[\frac{\phi(z)}{(z - z_0)^k} \right] = \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{d^{(k-1)}\phi(z)}{dz^{(k-1)}} \right]_{z=z_0}. \quad (28)$$

Em particular,

$$\phi(z) = \frac{ze^{z(r+2c)}}{(z + \beta)^2} \quad (29)$$

e $k = 2$. Finalmente este termo resultará

$$\operatorname{Res}_{z=\beta} \left[\frac{ze^{z(r+2c)}}{(\beta^2 - z^2)^2} \right] = -\frac{e^{-2\beta c}}{4} (r + 2c) e^{\beta(r+2c)} u[-(r + 2c)] \quad (30).$$

Procedendo similarmente na inversão dos outros termos da TF escrita em (25), o resultado total da inversão será

$$\begin{aligned}
P(r) = & 2 \left[-\frac{e^{\beta r}}{2} \left(r - \frac{1}{\beta} \right) u(-r) + \frac{e^{-\beta r}}{2} \left(r + \frac{1}{\beta} \right) u(r) + \right. \\
& + \frac{e^{-\beta c}}{2} e^{\beta(r+c)} \left(2r + 2c - \frac{1}{\beta} \right) u[-(r+c)] + \frac{e^{-\beta c} e^{\beta(r-c)}}{2\beta} u[-(r-c)] - \frac{e^{-\beta c} e^{\beta(r+c)}}{2\beta} u(r+c) + \\
& + \frac{e^{-\beta c}}{2} e^{-\beta(r-c)} \left(-2r + 2c - \frac{1}{\beta} \right) u(r-c) - \\
& - \frac{e^{-2\beta c} e^{\beta r}}{2\beta} u(-r) + \frac{e^{-2\beta c} e^{-\beta r}}{2\beta} u(r) - \\
& - \frac{e^{-2\beta c} (r+2c) e^{\beta(r+2c)}}{4} u[-(r+2c)] + \frac{e^{-2\beta c} (r-2c) e^{\beta(r-2c)}}{4} u[-(r-2c)] - \\
& - \frac{e^{-2\beta c} (r+2c) e^{-\beta(r+2c)}}{4} u(r+2c) + \frac{e^{-2\beta c} (r-2c) e^{-\beta(r-2c)}}{4} u(r-2c) - \\
& - \frac{e^{-2\beta c} (r+2c) e^{\beta(r+2c)}}{4} u[-(r+2c)] - \frac{e^{-2\beta c} (r-2c) e^{\beta(r-2c)}}{4} u[-(r-2c)] - \\
& + \frac{e^{-2\beta c} (r+2c) e^{-\beta(r+2c)}}{4} u(r+2c) + \frac{e^{-2\beta c} (r-2c) e^{-\beta(r-2c)}}{4} u(r-2c). \quad (31)
\end{aligned}$$

A expressão (31) é delimitada à esquerda pela fronteira $r = -2c$ e à direita pela fronteira $r = 2c$. $P(r)$ é portanto uma função de correlação de espaço limitado $-2c \leq r < 2c$. Pode ser escrita em forma de matriz para aplicação em assimilação de dados meteorológicos sem os erros numéricos devidos ao truncamento de sua série de Fourier definida pelos valores de $P(\omega)$. Esta é a vantagem deste método.

3.2 Exemplo 2: Um Pulso

Seja

$$B(r) = u\left(r + \frac{1}{2}\right) - u\left(r - \frac{1}{2}\right). \quad (32).$$

Chamado pulso iniciando $r = -\frac{1}{2}$ e finalizando $r = \frac{1}{2}$. Daí

$$\hat{B}(\omega) = \frac{e^{\frac{i\omega}{2}} - e^{-\frac{i\omega}{2}}}{i\omega}. \quad (33)$$

Portanto,

$$\hat{P}(\omega) = [\hat{B}(\omega)]^2 = \frac{(e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega})}{(i\omega)^2}. \quad (34)$$

A função $\hat{P}(z)$ correspondente possui singularidade em $z = 0$. Como esta singularidade está no eixo imaginário, será necessário, neste caso, usar a técnica de cálculo de resíduos de maneira diferente do mostrado no exemplo anterior, pois os contornos a serem usados não conterão resíduos! O contorno usado para calcular a parte causal de $P(r)$ será o mostrado na figura 3 a seguir:

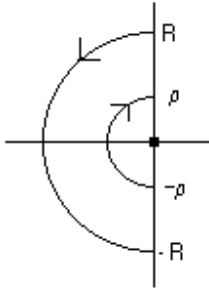


Figura 3 – Trajeto de integração para o cálculo da parte causal de $P(r)$.

Como não há resíduos, a soma total das integrais complexas usadas na inversão da TF de $P(r)$ resultará matematicamente em

$$\int_{-R}^{-\rho} + \int_{C_\rho} + \int_{\rho}^R + \int_{C_R\text{-antihorário}} = 0, \quad (35)$$

onde C_ρ é semicírculo de raio $\rho \rightarrow 0$ em torno da singularidade na origem e C_R é semicírculo de raio $R \rightarrow \infty$ também em torno daquela singularidade. Todo o trajeto da integração complexa é percorrido no sentido anti-horário (Churchill e Brown, 1990). A primeira e a terceira parcela no lado esquerdo da expressão (21) representam a desejada inversão da TF. Portanto pode-se escrever:

$$P^{causal}(r) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R\text{-antihorário}} \frac{e^{z(r+1)} - 2e^{zr} + e^{z(r-1)}}{z^2} dz - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{e^{z(r+1)} - 2e^{zr} + e^{z(r-1)}}{z^2} dz \right\}. \quad (36)$$

Os termos da expressão entre chaves à direita do sinal de igual na equação (36) subdividem-se em três grupos que devem ser analisados separadamente. O primeiro é

$$- \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R\text{-antihorário}} \frac{e^{z(r+1)}}{z^2} dz - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{e^{z(r+1)}}{z^2} dz. \quad (37)$$

Em (23), a primeira integral converge para valor nulo quando $r \geq -1$, e a segunda converge independentemente do valor de r . Portanto, a expressão (37) torna-se:

$$-i\pi(r+1)u(r+1). \quad (38)$$

Similarmente,

$$-\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R \text{-antihorário}} \frac{-2e^{zr}}{z^2} dz - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{-2e^{zr}}{z^2} dz \quad (39)$$

converge quando $r \geq 0$, para a expressão

$$-i\pi r u(r), \quad (40)$$

E

$$-\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R \text{-antihorário}} \frac{e^{z(r-1)}}{z^2} dz - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{e^{z(r-1)}}{z^2} dz \quad (41)$$

para a expressão

$$-i\pi(r-1)u(r-1). \quad (42)$$

Então

$$P^{causal}(r) = \frac{1}{2} [(r+1)u(r+1) - 2ru(r) - (r-1)u(r-1)]. \quad (43)$$

O mesmo tipo de procedimento deverá ser usado para calcular $P^{anticausal}(r)$, a parte anticausal de $P(r)$. A função resultante será

$$\begin{aligned} P(r) &= P^{anticausal}(r) + P^{causal}(r) = \\ &= -\frac{1}{2} \{ (r+1)u[-(r+1)] - 2ru(-r) + (r-1)u[-(r-1)] \} + \\ &\frac{1}{2} [(r+1)u(r+1) - 2ru(r) + (r-1)u(r-1)]. \quad (44) \end{aligned}$$

A expressão (44) é delimitada à esquerda pela fronteira $r = -1$ e à direita pela fronteira $r = 1$. $P(r)$ é portanto uma função de correlação de espaço limitado $-1 \leq r < 1$. Como no exemplo anterior pode ser escrita em forma de matriz para aplicação em assimilação de dados meteorológicos sem os erros numéricos devidos ao truncamento de sua série de Fourier definida pelos valores de $P(\omega)$.

CAPÍTULO 4

COMENTÁRIOS FINAIS

Para que a Previsão Numérica do Tempo (PNT) atenda às necessidades requeridas pela sociedade, ela deve ser precisa e eficiente (Dee and da Silva,1999). Assim, interessa ao público, em geral, que a agricultura seja capaz de planejar suas safras anualmente (ou antecipar quebras de safra), que desastres climáticos como enchentes devido ao excesso de chuva ou tempestades destruidoras sejam previstas para salvar vidas e bens, se possível, e que se saiba como será o clima no fim-de-semana para aproveitar a contento as horas de lazer.

Uma das etapas na PNT é a assimilação de dados meteorológicos. Ela deve, então, ser precisa e eficiente. Esta nota técnica tratou da precisão.

A assimilação de dados combina a atmosfera calculada por meio de modelos com observações da atmosfera para aproximar a previsão da verdadeira atmosfera futura. Para realizar assimilação com boa precisão numérica, um dos requisitos é conhecer os erros envolvidos no processo e tentar diminuí-los ou eliminá-los, quando possível usando técnicas adequadas.

Uma das maneiras de descrever o erro de previsão é especificar suas componentes de Fourier e usar algumas para, numericamente, montar um arquivo usado no processo de assimilação. Outra é usar todas as componentes e, algebricamente, calcular uma expressão matemática exata a ser usada na montagem do arquivo. Inverte-se analiticamente a Transformada de Fourier. No segundo caso, evita-se o erro de truncamento inerente ao primeiro. É a proposta de Gaspari e Cohn, citados no início desta nota técnica. O artigo deles entretanto, não mostra como inverter analiticamente a Transformada de Fourier. Esta nota técnica objetiva preencher esta lacuna, não deve ser considerada novidade nem em matemática nem meteorologia, mas, apenas, um documento para facilitar o entendimento do método de Gaspari e Cohn.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Antoniou, A., **Digital Filters: Analysis and Design**, New York: McGraw-Hill Publishing Company, 1979. 524 p.

Churchill, R. V., Brown, J. W., **Complex Variables and Applications**, New York: McGraw-Hill Publishing Company, 1990. 361 p.

Dee, D.; da Silva, A. M.. Maximum-Likelihood Estimation of Forecast and Observation Error Covariance Parameters. Part I: Methodology, **Monthly Weather Review**, v. 127, pp. 1822-1833, 1999.

Gaspari, G.; Cohn, S. E.. Construction of correlation functions in two and three dimensions, **Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society**, v. 125, pp. 723-757, 1999.

Papoulis, A., **Systems and Transforms with Applications in Optics**, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968. 474 p.

Papoulis, A., **Signal Analysis**, McGraw-Hill Book Company, New York, 1977. 431 p.

Purser, R. J.; Wu, W-S., Parrish, D. F.; Roberts, N. M.. Numerical aspects of the Application of Recursive Filters to Variational Statistical Analysis. Part I: Spatially Homogeneous and Isotropic Gaussian Covariances, **Monthly Weather Review**, v. 131, pp. 1524-1535, 2003.