



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-13075-PUD/175

**MODELAGEM E CONTROLE DE ESTRUTURAS
ESPACIAIS FLEXÍVEIS**

Marcelo Ricardo Alves da Costa Tredinnick

Exame de Qualificação de Doutorado (segundo tema) do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais, orientado pelo Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza, aprovado em 24 de maio de 2005.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Professores Marcelo Lopes de Oliveira e Souza e Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza pelos ensinamentos a respeito de Modelagem e Controle de Estruturas Espaciais Flexíveis e aos demais membros da banca desse Exame de Qualificação de Doutorado pelas valiosas observações e comentários feitos: Gilberto da Cunha Trivelato e Mário Cezar Ricci.

RESUMO

Neste trabalho pretende-se dar uma visão superficial das principais técnicas de modelagem e controle aplicados a estruturas flexíveis que tem particular interesse em aplicações espaciais. Os métodos de modelagem matemática tem a sua teoria apresentada de forma encadeada o que facilita a compreensão dos mesmos dado que podemos ver claramente como surge cada método partindo de um anterior. Os métodos de modelagem matemática apresentados aqui são: princípio do trabalho virtual, princípio e D'alembert, as equações de Euler-Lagrange, o método dos modos assumidos (ou modos admitidos), o método dos elementos finitos. Na parte que trata de controle serão abordados os seguintes métodos: controle modal, LQR/LQG, H_2 e H_{∞} .

MODELING AND CONTROL OF SPACE FLEXIBLE STRUCTURES

ABSTRACT

In this work we aim to give an overview about the main techniques in modeling and control applied to flexible structures that has particular interest in space applications. The mathematical modeling methods has its theory presented in chained form that makes easy the comprehension because we can see as arises a method from the previous. The modeling methods presented are: virtual work principle, D'Alembert principle, Euler-Lagrange equations, Assumed Modes method, Finite Elements method. In the control part it will be explained the following methods: modal control, LQR/LQG, H_2 and H_{∞} .

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	15
LISTA DE TABELAS	17
CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO.....	19
CAPÍTULO 2 PRINCÍPIOS: DO TRABALHO VIRTUAL, D’ALEMBERT, ESTENDIDO E GENERALIZADO DE HAMILTON	21
2.1 PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL.	21
2.2 PRINCÍPIO DE D’ALEMBERT:	24
2.3 PRINCÍPIO DE HAMILTON:.....	26
CAPÍTULO 3 ABORDAGEM LAGRANGEANA DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO	35
CAPÍTULO 4 VIGAS DE EULER-BERNOULI E TIMOSHENKO	41
CAPÍTULO 5 O PROBLEMA DIFERENCIAL DO AUTOVALOR.....	45
CAPÍTULO 6 MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS	51
CAPÍTULO 7 CONCEITO DE MODELAGEM PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	59
7.1 MOVIMENTO AXIAL.....	59
7.2 MOVIMENTO TRANSVERSAL.....	62
7.3 MOVIMENTO DE TORÇÃO	68
7.4 DINÂMICA ENVOLVENDO TRELIÇAS - MÉTODO DO DESLOCAMENTO	70
CAPÍTULO 8 CONTROLE ANALÓGICO DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS.....	75
8.1 CONTROLE VIA REPRESENTAÇÃO EM VARIÁVEIS DE ESTADO MODAIS.....	75
8.2 CONTROLE LQR.....	76
8.3 CONTROLE LQG: NORMA MÍNIMA H_2	78
8.4 CONTROLE H_2	80
8.5 CONTROLE H_∞	81
8.6 VANTAGENS E DESVANTAGENS DAS TÉCNICAS DE CONTROLE ABORDADAS.....	84

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2. 1- Movimento de uma partícula sobre uma superfície de vínculo.....	22
FIGURA 2.2 - Interpretação gráfica de um deslocamento virtual.	27
FIGURA 3.1- Trajetórias real e perturbada.....	36
FIGURA 4.1- Viga de Euler-Bernouli.	41
FIGURA 4.2 - Viga de Timoshenko.	42
FIGURA 5. 1 – Diversos tipos de arranjos com uma viga, as equações transcendentais e modos de vibração correspondentes.	49
FIGURA 7.1 – Um elemento uniforme sujeito à deformação longitudinal.	60
FIGURA 7.2 – Funções de forma para o elemento longitudinal.....	60
FIGURA 7.3 – Deflexão transversal na viga de Euler-Bernouli.....	62
FIGURA 7.4 – funções de forma para a deformação transversal.....	67
FIGURA 7. 5 – elemento de viga sofrendo torção.....	69
FIGURA 7.6 – sistema de eixos coordenados de uma treliça.	70
FIGURA 7.7– Decomposição dos deslocamentos longitudinais da viga em componentes do eixo global.	71
FIGURA 8.1– Diagrama em blocos de realimentação com a presença de “variáveis exógenas”.....	78
FIGURA 8.2 – Estrutura em blocos do Controlador H_2	81
FIGURA 8.3– Estrutura em blocos do Controlador H_∞	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: vantagens e desvantagens das técnicas de controle abordadas.....	84
--	----

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A modelagem de sistemas considerando a flexibilidade como elemento relevante tem aumentado consideravelmente nas últimas décadas devido principalmente ao aumento das exigências da demanda de serviços de sistemas com estruturas flexíveis e aos problemas associados à interação estrutura & controle (CSI – “Control Structure Interaction”). A modelagem de estruturas flexíveis pode ser considerado relevante, por exemplo, em projetos de: a) segmento aeroespacial: satélites artificiais com grandes painéis solares, estações espaciais, veículos lançadores de satélites, ônibus espaciais, aviões, etc.; b) segmento industrial: usinagens de alta precisão, manipuladores robóticos flexíveis, nanotecnologia, etc. Torna-se relevante assim estudarmos alguns métodos matemáticos para modelagem de sistemas físicos como esses.

Serão apresentados tópicos didáticos que nos possibilitarão compreender como modelar uma estrutura flexível, tais como: princípio estendido e generalizado de Hamilton, abordagem lagrangeana, problema diferencial do autovalor, ortogonalidade de modos naturais, resposta completa para o comportamento de uma estrutura flexível, métodos dos modos assumidos e o método dos elementos finitos.

Compreendido como se faz a modelagem de estruturas flexíveis, entenderemos posteriormente também como controlar o seu comportamento.

CAPÍTULO 2

PRINCÍPIOS: DO TRABALHO VIRTUAL, D'ALEMBERT, ESTENDIDO E GENERALIZADO DE HAMILTON

O princípio de Hamilton é o mais famoso princípio variacional da Mecânica, é conceitualmente simples de ser aplicado, mas possui uma álgebra e cálculo que, na maioria dos casos, torna-se muito tediosa devido a uma grande quantidade de integrações por partes que surgem nos cálculos. As equações de Lagrange que saíram do princípio de Hamilton resolveram esta dificuldade analítica.

O princípio generalizado de Hamilton é definido da seguinte forma (Junkins, 1993; e Meirovitch, 1980):

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(K - V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (2.1)$$

onde, K é a energia cinética total, V é a energia potencial, δW_{nc} é o trabalho virtual causado por forças não conservativas tais como o amortecimento, onde o “ δ ” que aparece em (2.1) indica uma variação das funções.

Para deduzir o princípio generalizado de Hamilton precisamos dos princípios do trabalho virtual e de D'Alembert.

2.1 PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL.

Seja o movimento de uma partícula sobre uma superfície de vínculo f tal como mostrado na Figura 2.1 onde $\frac{dr}{dt}$ é a velocidade da partícula sobre a superfície de vínculo (tangencial à esta superfície) e $\vec{\nabla}f$ é o gradiente da superfície de vínculo, normal à mesma.

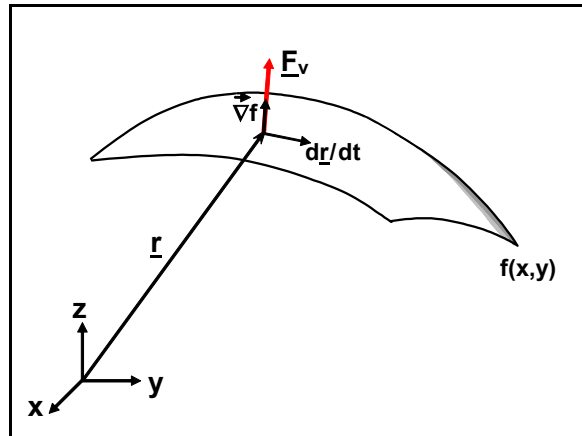


FIGURA 2. 1- Movimento de uma partícula sobre uma superfície de vínculo.

Pela Figura 2.1 pode-se escrever: Como $\vec{\nabla}f \perp \frac{dr}{dt}$ temos,

$$\vec{\nabla}f \cdot \frac{dr}{dt} = 0 \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla}f \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (2.3)$$

Imagine que esta partícula interaja com a superfície de vínculo de forma que uma força normal \underline{F}_v (força devida ao vínculo) surja, logo,

$$\underline{F}_v \parallel \vec{\nabla}f \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla}f = k \cdot \underline{F}_v \quad (2.5)$$

Substituindo a Equação (2.5) na Equação (2.3) temos:

$$k \cdot \underline{F}_v \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (2.6)$$

$$\underline{F}_v \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (2.7)$$

Como trabalho define-se como *força x distância* vem da equação (2.7),

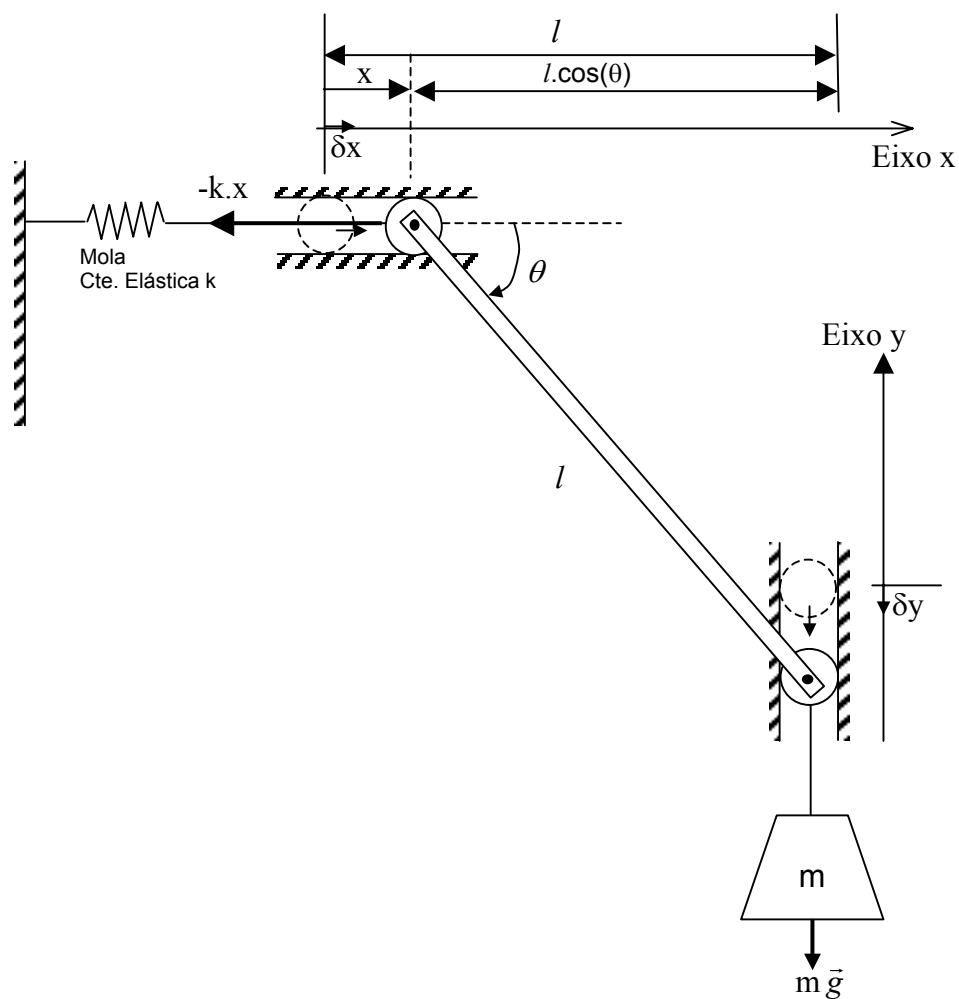
$$dW = \underline{F}_v \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (2.8)$$

Pode haver o caso em que a superfície de vínculo se modifica com o tempo. O procedimento analítico para superar esta dificuldade vem pela introdução do princípio dos deslocamentos virtuais onde se desconsidera a perturbação temporal, daí temos a expressão do **princípio do trabalho virtual** como segue na equação (2.9):

$$\boxed{\delta W = \underline{F}_v \cdot \underline{\delta r} = 0} \quad (2.9)$$

O princípio do trabalho virtual pode ser enunciado da seguinte forma: o trabalho feito pelas forças de vínculo relativas a deslocamentos virtuais é zero.

Exemplo 1: (Meirovitch, 1970) para o sistema dinâmico apresentado encontre pelo princípio do trabalho virtual a equação do movimento.



Resposta:

$$\delta W = \underline{F}_v \cdot \underline{\delta r} = (-k.x \quad m.g) \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$$

$$\delta W = -k.x.\delta x + mg.\delta y = 0$$

Como $x = l - l.\cos(\theta) = (1 - \cos(\theta)).l$ e $y = l.\sin(\theta)$ temos os diferenciais:

$$\delta x = l \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \delta \theta$$

$$\delta y = l \cdot \text{cos}(\theta) \cdot \delta \theta$$

Assim, substituindo na equação de δW vem:

$$-k \cdot l \cdot (1 - \text{cos}(\theta)) \cdot l \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \delta \theta + mgl \cdot \text{cos}(\theta) \cdot \delta \theta = 0$$

$$(-k \cdot l \cdot (1 - \text{cos}(\theta)) \cdot l \cdot \text{sen}(\theta) + mgl \cdot \text{cos}(\theta)) \cdot \delta \theta = 0$$

Como $\delta \theta \neq 0$ então:

$$-k \cdot l \cdot (1 - \text{cos}(\theta)) \cdot l \cdot \text{sen}(\theta) + mgl \cdot \text{cos}(\theta) = 0$$

$$(1 - \text{cos}(\theta)) \cdot \text{tan}(\theta) = \frac{mg}{kl}$$

Que é uma equação transcendental do movimento para a coordenada generalizada θ com o sistema em equilíbrio ($\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$).

2.2 PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT:

Da segunda lei de Newton (lei da inércia):

$$\underline{F} = \dot{\underline{p}} \quad (2.10)$$

onde \underline{F} é a força resultante de todas as forças presentes no sistema e $\dot{\underline{p}}$ é a derivada do momento linear. Suponha que possamos reescrever \underline{F} na forma:

$$\underline{F} = \sum_i \underline{F}_i + \sum_j \underline{F}_{v,j} \quad (2.11)$$

onde \underline{F}_i são todas as forças aplicadas e $\underline{F}_{v,j}$ são as forças de vínculo. Substituindo a Equação (2.11) na Equação (2.10) teremos o **princípio de D'Alembert**:

$$\boxed{\sum_i \underline{F}_i + \sum_j \underline{F}_{v,j} - \dot{\underline{p}} = 0} \quad (2.12)$$

Para chegar ao princípio generalizado de D'Alembert temos que proceder como segue: multiplique a equação (2.12) por um “deslocamento virtual reversível” $\delta \underline{r}$ (um $\delta \underline{r}_i$ e $\delta \underline{r}_j$ para cada componente):

$$\sum_i \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i + \sum_j \underline{F}_{v,j} \cdot \delta \underline{r}_j - \dot{\underline{p}} \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad (2.13)$$

Sendo,

$$\underline{F}_v = \sum_i \underline{F}_{v,i} \quad (2.14)$$

Temos que,

$$\sum_i \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i + \underline{F}_v \cdot \delta \underline{r}_j - \dot{\underline{p}} \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad (2.15)$$

Pelo princípio do trabalho virtual (equação 2.9) podemos simplificar a equação (2.15) da seguinte forma:

$$\sum_i \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i - \dot{\underline{p}} \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad (2.16)$$

Como para cada \underline{F}_i aplicada há um $\dot{\underline{p}}_i$ equivalente, onde $\underline{F}_i - \dot{\underline{p}}_i$ é conhecida como “força efetiva”, teremos o princípio **generalizado de D’Alembert** (Meirovitch, 1970):

$$\boxed{\sum_i \left(\underline{F}_i - \dot{\underline{p}}_i \right) \cdot \delta \underline{r}_i = 0} \quad (2.17)$$

É interessante perceber que a *lei da conservação da energia* pode ser obtida a partir da equação (2.17) (aproximando $\delta \underline{r}_i$ para uma variação infinitesimal $d\underline{r}_i$):

$$\sum_i \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i - \sum_i \frac{d}{dt} \left(m \cdot \dot{\underline{r}}_i \right) \cdot \left[\frac{d\underline{r}_i}{dt} \cdot dt \right] = 0 \quad (2.18)$$

Do cálculo diferencial elementar sabe-se que $\frac{d(\dot{\underline{r}})}{dt} \cdot \underline{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(\dot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}})}{dt}$, logo:

$$\sum_i \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i - \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{1}{2} m \cdot \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \right) dt = 0 \quad (2.19)$$

Sendo o sistema conservativo, sendo K a energia cinética e U a energia potencial, temos que o trabalho pode ser dado por:

$$W = -\delta U = \sum_i \underline{F}_i \cdot d\underline{r}_i \quad (2.20)$$

e fazendo:

$$dK = d \left(\sum_i \frac{1}{2} m \cdot \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \right) \quad (2.21)$$

Teremos, substituindo as Equações (2.20) e (2.21) na Equação (2.19):

$$-dU - dK = 0 \quad (2.22)$$

$$d(U + K) = 0 \quad (2.23)$$

Integrando a equação (2.23) temos:

$$E = K + U \quad (2.24)$$

Logo, podemos concluir que a energia mecânica ou total E (equação 2.24) é uma constante igual à soma das energias cinética e potencial, válida para sistemas em que a energia potencial e os vínculos independem do tempo.

2.3 PRINCÍPIO DE HAMILTON:

Do princípio generalizado de D'Alembert, Equação (2.17), temos:

$$\sum_i \left(\underline{F}_i - m_i \ddot{\underline{r}}_i \right) \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad (2.25)$$

$$\sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i - \sum_i \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad (2.26)$$

Sendo

$$\delta \bar{W} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i \quad (2.27)$$

o trabalho virtual realizado por todas as forças presentes no sistema (conservativas e não conservativas), e lembrando-se que $\frac{d}{dt} \left(\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i \right) = \ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i + \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\delta \underline{r}}_i$ e do cálculo elementar

conforme vimos $\dot{\underline{r}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\dot{\underline{r}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} \right)$, teremos:

$$\ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \frac{d}{dt} \left(\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i \right) - \delta \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \right) \quad (2.28)$$

Daí vem, aplicando-se as Equações (2.27) e (2.28) na Equação (2.26) teremos,

$$\sum_i m_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i \right) - \sum_i m_i \cdot \delta \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \right) - \delta \bar{W} = 0 \quad (2.29)$$

$$\sum_i m_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i \right) - \delta K - \delta \bar{W} = 0 \quad (2.30)$$

$$\delta K + \delta \bar{W} = \sum_i m_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i \right) \quad (2.31)$$

Integrando no tempo a equação (2.31) no intervalo $[t_1, t_2]$ teremos,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K + \delta \bar{W}) dt = \sum_i m_i \int_{t_1}^{t_2} d(\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i) \quad (2.32)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K + \delta \bar{W}) dt = \sum_i m_i \left[\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i \right]_{t_1}^{t_2} \quad (2.33)$$

O segundo membro da equação (2.33) dará zero como pode-se ver pela Figura 2.2: em t_1 e t_2 a variação $\delta \underline{r}_i$ torna-se nula em relação ao caminho real (newtoniano, ou dinâmico).

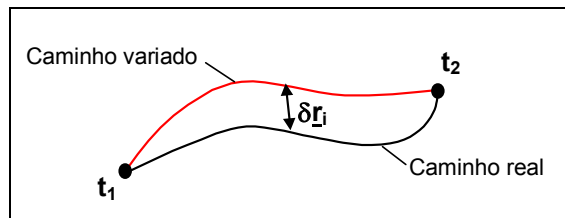


FIGURA 2.2 - Interpretação gráfica de um deslocamento virtual.

Logo, a equação (2.33) simplifica-se na seguinte equação:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K + \delta \bar{W}) dt = 0 \quad (2.34)$$

Como $\delta \bar{W}$ representa o trabalho virtual de forças conservativas e não conservativas vem que

$$\delta \bar{W} = \delta \bar{W}_c + \delta \bar{W}_{nc} \quad (2.35)$$

onde $\delta \bar{W}_c = -\delta U$ é o trabalho realizado por forças conservativas e $\delta \bar{W}_{nc}$ é o trabalho realizado por forças não conservativas, daí teremos:

$$\delta \bar{W} = -\delta U + \delta \bar{W}_{nc} \quad (2.36)$$

Aplicando a Equação (2.36) na Equação (2.34) vem:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \bar{W}_{nc} dt = 0 \quad (2.37)$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \delta(K - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \bar{W}_{nc} dt = 0} \quad (2.38)$$

A equação (2.38) é conhecida como **princípio generalizado de Hamilton**, onde a chamada “lagrangeana” do sistema é dada por $L = K - U$ o que permite reescrever a equação (2.38)

$$\text{na forma } \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \bar{W}_{NC} dt = 0.$$

Se não há forças não conservativas no sistema então a equação (2.38) simplifica-se para

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \delta(K - U) dt = 0} \quad (2.39)$$

que é conhecida como o **princípio estendido de Hamilton**, podendo ser escrito também

$$\text{como } \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

Exemplo 2: (Meirovitch, 1970) para o sistema dinâmico apresentado no Exemplo 1 encontre pelo princípio (estendido) de Hamilton a equação do movimento para a posição de equilíbrio.

Resposta:

A lagrangeana de tal sistema é dada por:

$$L = K - U = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \left(\frac{1}{2} kx^2 - mgy \right)$$

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} ml^2 \left[\dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) - \frac{k}{m} (1 - \cos(\theta))^2 + \frac{2g}{l} \text{sen}(\theta) \right]$$

Usando o princípio estendido de Hamilton com o conceito elementar de diferencial total,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L(\theta, \dot{\theta}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} \delta \dot{\theta} \right) dt$$

Chega-se à equação:

$$- ml^2 \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\dot{\theta}^2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta) + \frac{k}{m} (1 - \cos(\theta)) \text{sen}(\theta) - \frac{g}{l} \cos(\theta) \right] \delta \theta - \dot{\theta} \cos^2(\theta) \delta \dot{\theta} \right\} dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{\theta}^2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta) + \frac{k}{m} (1 - \cos(\theta)) \text{sen}(\theta) - \frac{g}{l} \cos(\theta) \right] \delta \theta dt - \dot{\theta} \cos^2(\theta) \delta \theta \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Como $\delta \theta(t_1) = \delta \theta(t_2) = 0$ (Figura 2.2), teremos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{\theta}^2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta) + \frac{k}{m} (1 - \cos(\theta)) \text{sen}(\theta) - \frac{g}{l} \cos(\theta) \right] \delta \theta dt = 0$$

O que para satisfazer tal equação é preciso que o integrando seja nulo:

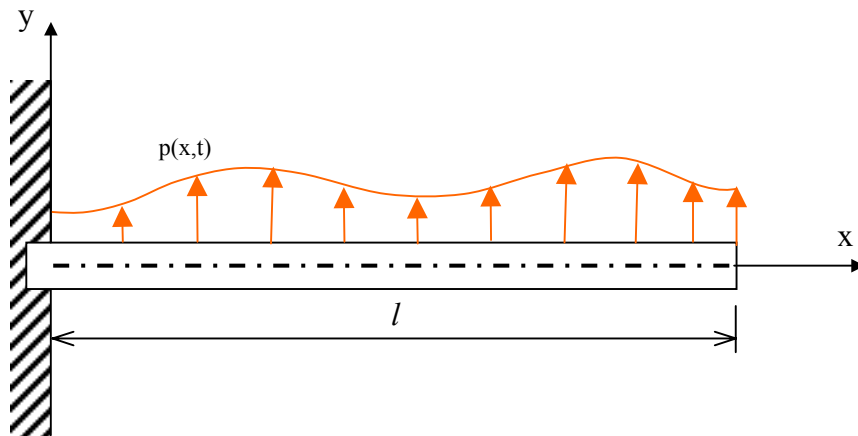
$$\dot{\theta}^2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta) + \frac{k}{m} (1 - \cos(\theta)) \text{sen}(\theta) - \frac{g}{l} \cos(\theta) = 0$$

Para o sistema numa posição de equilíbrio $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$:

$$\frac{k}{m} (1 - \cos(\theta)) \text{sen}(\theta) - \frac{g}{l} \cos(\theta) = 0$$

$$(1 - \cos(\theta)) \cdot \tan(\theta) = \frac{mg}{kl}$$

Exemplo 3: (Junkins, 1993) Encontrar a equação do movimento para uma viga engastada-livre sujeita a um carregamento transversal $p(x,t)$.



Dados estruturais (constantes) da viga:

Módulo de Young (módulo de elasticidade): E

Momento de inércia da seção transversal da viga: I

Densidade de massa: ρ

Comprimento: l

Resposta:

Condições de contorno,

$$y(0,t) = 0; \quad \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = l$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 \text{ em } x = l$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \text{ em } x = l$$

Energia cinética e energia potencial:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l E.I. \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

Onde $E.I$ é a “elasticidade” da viga. Vou convencionar chamar a elasticidade da viga por EI , simplesmente.

O trabalho virtual devido à força externa não conservativa p é:

$$\delta \bar{W}_{NC} = \int_0^l [\text{força externa não conservativa}] [\text{deslocamento virtual transversal}] dx$$

$$\delta \bar{W}_{NC} = \int_0^l p(x,t) \cdot \delta y(x,t) dx$$

Pelo princípio generalizado de Hamilton,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(K - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \bar{W}_{NC} dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\frac{1}{2} \int_0^l \rho \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^l p(x,t) \cdot \delta y(x,t) dx \right) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\rho}{2} \int_0^l \delta \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{EI}{2} \int_0^l \delta \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_0^l p(x,t) \cdot \delta y(x,t) dx \right) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\rho}{2} \int_0^l \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) dx - \frac{EI}{2} \int_0^l \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx + \int_0^l p(x,t) \cdot \delta y(x,t) dx \right) dt = 0 \quad (\text{Eq.i})$$

Da equação i temos,

a)

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \int_0^l \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) dx &= \frac{\rho}{2} \int_0^l \left\{ \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \right\} dx = \rho \int_0^l \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) dx \\ &= \rho \int_0^l \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial(\delta y)}{\partial t} dx = \rho \int_0^l \frac{\partial(\delta y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} dx \\ &= \rho \int_0^l \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial(\delta y)}{\partial x} dx \end{aligned}$$

Fazendo uma integração por partes onde,

$$u_1 = \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \rightarrow \frac{du_1}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)$$

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + 0$$

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$du_1 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot dx$$

$$dv_1 = \frac{\partial}{\partial x} (\delta y) \cdot dx = d(\delta y)$$

$$v_1 = \int d(\delta y)$$

$$v_1 = \delta y$$

Daí,

$$v_1 u_1 \Big|_0^l - \int_0^l v_1 \cdot du_1$$

$$\delta y \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_0^l - \int_0^l \delta y \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$$

$$- \int_0^l \delta y \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$$

Finalmente,

$$\frac{\rho}{2} \int_0^l \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) dx = -\rho \int_0^l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y dx \quad (\text{Eq.ii})$$

b)

$$\begin{aligned}
-\frac{EI}{2} \int_0^l \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx &= -\frac{EI}{2} \int_0^l \left[\delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right] dx \\
&= -EI \int_0^l \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx \\
&= -EI \int_0^l \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta y)}{\partial x^2} dx
\end{aligned}$$

$$u_2 = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \rightarrow \frac{du_2}{dx} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \rightarrow du_2 = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} dx$$

$$dv_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta y) dx \rightarrow v_2 = \frac{\partial}{\partial x} (\delta y)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\delta y) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_0^l + \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} (\delta y) \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} dx$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\delta y) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_0^l + \int_0^l \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial x} (\delta y) dx$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\delta y) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_0^l + \int_0^l \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} d(\delta y)$$

Resolvendo (apenas) a integral,

$$u_3 = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \rightarrow du_2 = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx$$

$$dv_2 = d(\delta y) \rightarrow v_2 = \delta y$$

$$\delta y \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \delta y dx$$

Logo, juntando as soluções teremos:

$$-\frac{EI}{2} \int_0^l \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx = -EI \int_0^l \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \delta y dx + EI \cdot \delta y \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Big|_0^l - EI \frac{\partial}{\partial x} (\delta y) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_0^l \quad (\text{Eq.iii})$$

Substituindo as equações ii e iii na equação i teremos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(-\rho \int_0^l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y dx - EI \int_0^l \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \delta y dx + \int_0^l p(x, t) \cdot \delta y dx \right) dt + EI \cdot \delta y \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Big|_0^l - EI \frac{\partial}{\partial x} (\delta y) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_0^l = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^l \left[-\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + p(x, t) \right] \delta y dx \right) dt + EI \cdot \delta y \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Big|_0^l - EI \frac{\partial}{\partial x} (\delta y) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_0^l = 0$$

Devido às arbitrariedades de δy a solução da equação acima só poderá ser:

$$-\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + p(x, t) = 0$$

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p \quad ; \forall t \in R_+ \text{ e } x \in (0, l)$$

CAPÍTULO 3

ABORDAGEM LAGRANGEANA DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Como vimos, podemos compactar o integrando da equação (2.39) inserindo a noção de lagrangeana do sistema tal como abordado por Meirovitch (1980 e 1970), Leite (1978) e Greenwood (1965):

$$L = K - U \quad (3.1)$$

Logo, a equação (2.39) fica da seguinte forma:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (3.2)$$

Onde o S da equação (3.2), conhecido como “ação”, é expresso por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (3.3)$$

O objetivo agora é encontrar o valor estacionário da “ação”. Para tanto, reescrevamos a equação (3.3) considerando a lagrangeana L como função do tempo t , da posição \underline{r} e da velocidade $\dot{\underline{r}}$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \underline{r}, \dot{\underline{r}}) dt \quad (3.4)$$

A ação S da equação (3.4) é um “funcional” dado que representa um mapeamento (ou função) de um espaço linear vetorial (onde estão os vetores \underline{r} e $\dot{\underline{r}}$) num campo numérico (um tipo especial de campo) que no caso é o conjunto dos números reais (Oden, 1979).

Se inserirmos uma perturbação na equação (3.4), i.e.,

$$\underline{R} = \underline{r}(t) + \varepsilon \underline{\eta}(t) \quad (3.5)$$

que é o valor perturbado da posição \underline{r} , estaremos descrevendo o funcional S como função de ε , onde $\underline{\eta}(t_1) = \underline{\eta}(t_2) = 0$ (Figura 3.1), logo,

$$S(\varepsilon, t, \underline{R}, \dot{\underline{R}}) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \underline{R}, \dot{\underline{R}}) dt \quad (3.6)$$

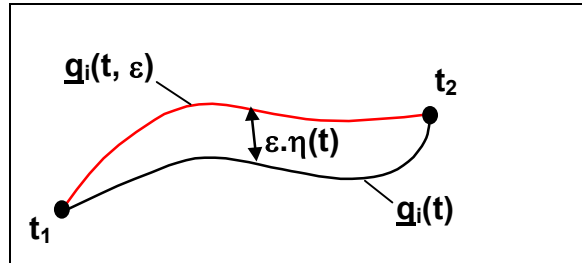


FIGURA 3.1- Trajetórias real e perturbada.

Podemos reescrever (3.6) com as chamadas “coordenadas generalizadas”:

$$S(t, \underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_N) dt \quad (3.7)$$

Inserindo perturbações às coordenadas generalizadas teremos de uma forma geral:

$$\bar{q}_i = q_i + \varepsilon \eta(t) \quad (3.8)$$

Onde \bar{q}_i é o valor perturbado da coordenada q_i . Podemos trabalhar apenas com essas coordenadas generalizadas perturbadas no prosseguimento dos cálculos, entretanto, para N coordenadas generalizadas devemos ter N soluções.

Derivando a equação (3.7) em relação à ε vem:

$$\frac{dS(\varepsilon, t, \underline{q}, \dot{\underline{q}})}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dL}{d\varepsilon} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{q}_i} \cdot \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\bar{q}}_i}{\partial \varepsilon} \right) dt \quad (3.9)$$

Mas como,

$$\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (q_i(t) + \varepsilon \eta(t)) = \eta(t) \quad (3.10)$$

e

$$\frac{\partial \dot{\bar{q}}_i}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\dot{q}_i(t) + \varepsilon \dot{\eta}(t)) = \dot{\eta}(t) \quad (3.11)$$

Daí, teremos

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{\eta}(t) \right) dt \quad (3.12)$$

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \eta(t) \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot d\eta(t) \quad (3.13)$$

Integrando por partes a segunda parcela do segundo membro equação (3.13) vem que

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \eta(t) \cdot dt + \sum_i^N \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \eta(t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \eta(t) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot dt \quad (3.14)$$

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \cdot \eta(t) \cdot dt \quad (3.15)$$

Quando fizermos $\varepsilon = 0$, teremos $dS/d\varepsilon = 0$; $\bar{q}_i = q_i$ e $\dot{\bar{q}}_i = \dot{q}_i$, e daí:

$$\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \cdot \eta(t) \cdot dt = 0 \quad (3.16)$$

No intervalo (t_1, t_2) o $\eta(t)$ não é nulo o que permite concluir que a solução é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (3.17)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0} \quad (3.18)$$

que é a **equação diferencial de Euler-Lagrange** calculada para cada q_i e \dot{q}_i . Segundo Junkins (1993), D'azzo (1981) e Meirovitch (1970), a Equação (3.18) pode ser escrita na forma mais geral tal como segue:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + Q_{i \text{ NC}}} \quad (3.19)$$

onde $Q_i = \sum_k^m \lambda_k \cdot a_{k,i}$ representa as *forças generalizadas oriundas de vínculos* (podendo ser forças translacionais ou torques), λ_i são multiplicadores de Lagrange, a_{ki} são coeficientes de vínculo, $Q_{i \text{ NC}}$ representa as forças não conservativas associadas aos q_k (as forças conservativas já estão embutidas na lagrangeana L) e \mathfrak{S} é a função de dissipação de Rayleigh (representando, por exemplo, forças de amortecimento viscoso):

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \quad (3.20)$$

sendo os coeficientes c_{ij} simétricos em i e j . A equação (3.20) pode ser encontrada em Junkins (1993).

Exemplo 3: Deduza a equação do movimento para o sistema do exemplo 1 usando a equação de Euler-Lagrange.

Resposta:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot \dot{y}^2, \quad U = \frac{1}{2} kx^2 - mgy, \quad L = K - U$$

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = K - U = \frac{1}{2} m \cdot \dot{y}^2 - \left(\frac{1}{2} kx^2 - mgy \right) \quad , \text{ ou em } \theta :$$

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} ml^2 \left[\dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) - \frac{k}{m} (1 - \cos(\theta))^2 + \frac{2g}{l} \text{sen}(\theta) \right]$$

Existem duas equações de vínculos:

$$g_1 = x - l(1 - \cos(\theta)) = 0$$

$$g_2 = y - l \cdot \text{sen}(\theta) = 0$$

Tais vínculos são holônomos (integráveis) e, além disso, ainda são esclerônomos porque não contém o tempo mostrado explicitamente (caso tivessem seriam vínculos reônomos).

Calculando os coeficientes de vínculo a_{ki} :

$$a_{1x} = \frac{\partial g_1}{\partial x} = 1; \quad a_{1y} = \frac{\partial g_1}{\partial y} = 0; \quad a_{1\theta} = \frac{\partial g_1}{\partial \theta} = -l \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$a_{2x} = \frac{\partial g_2}{\partial x} = 0; \quad a_{2y} = \frac{\partial g_2}{\partial y} = 1; \quad a_{2\theta} = \frac{\partial g_2}{\partial \theta} = -l \cdot \text{cos}(\theta)$$

O sistema é conservativo ($Q_{i \text{ NC}} = 0$) e não possui forças dissipativas ($\mathfrak{F} = 0$), assim teremos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda_1 \cdot a_{1,i} + \lambda_2 \cdot a_{2,i}$$

Teremos três variáveis generalizadas $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = \theta$, e como temos dois vínculos, isso resulta em que o sistema será descrito em $3-2=1$ grau de liberdade (variável θ). Assim, resolvendo as três equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda_1 \cdot a_{1,x} + \lambda_2 \cdot a_{2,x}$$

$$k \cdot x = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0$$

$$\lambda_1 = k \cdot x$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda_1 \cdot a_{1,y} + \lambda_2 \cdot a_{2,y}$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{y}) - mg = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1$$

$$\lambda_2 = m\ddot{y} - mg$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda_1 \cdot a_{1,\theta} + \lambda_2 \cdot a_{2,\theta}$$

$$\frac{1}{2} ml^2 [\ddot{\theta} \cos^2(\theta)] - \frac{1}{2} ml^2 \left[-\dot{\theta} \cdot 2 \cdot \text{cos}(\theta) \text{sen}(\theta) - \frac{2k}{m} (1 - \text{cos}(\theta)) \text{sen}(\theta) + \frac{2g}{l} \text{cos}(\theta) \right] = -\lambda_1 \cdot l \text{sen}(\theta) - \lambda_2 \cdot l \text{cos}(\theta)$$

Substituindo os valores para os λ_i como funções de θ ($\lambda_1 = k \cdot l \cdot (1 - \text{cos}(\theta))$) e

$$\lambda_1 = m \cdot \frac{d^2(l \cdot \text{cos}(\theta))}{dt^2} - mg = m \cdot l (-\text{sen}(\theta) \cdot \ddot{\theta}^2 + \text{cos}(\theta) \cdot \ddot{\theta}) - mg$$
 e considerando o resultado

para a situação de equilíbrio $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$, finalmente chegamos à expressão:

$$(1 - \text{cos}(\theta)) \cdot \tan(\theta) = \frac{mg}{kl}$$

CAPÍTULO 4

VIGAS DE EULER-BERNOULI E TIMOSHENKO

Nesta seção serão abordados dois tipos de modelos de vigas (Junkins, 1993; e Craig, 1981). Na viga de **Euler-Bernouli** a elasticidade EI e a área transversal A dependem somente da posição x (Figura 4.1).

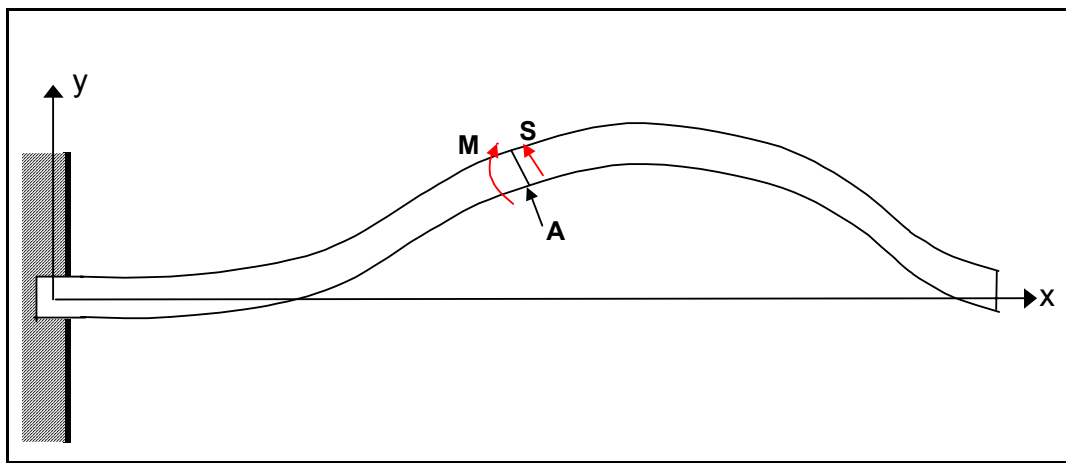


FIGURA 4.1- Viga de Euler-Bernouli.

O momento fletor está relacionado com a curvatura da viga da seguinte forma:

$$M = EI \cdot (\text{curvatura}) \quad (4.1)$$

Para uma viga de Euler-Bernoulli temos para o momento fletor:

$$M = EI \cdot \frac{1}{\rho} \quad (4.2)$$

e a tensão cisalhante é dada por:

$$S = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (4.3)$$

Em muitos casos em que a flexão da viga é pequena, o momento fletor da viga pode ser aproximado por:

$$M \sim EI \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (4.4)$$

onde $y(x,t)$ representa o movimento transversal de um ponto sobre a linha-neutra da viga (região a qual não sofre deformações quando a viga é sujeita a deformações).

O cálculo da tensão de cisalhamento é dado por substituição de (4.4) em (4.3):

$$S = EI \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \quad (4.5)$$

As energias cinética e potencial são dadas a seguir, respectivamente, pelas equações:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \quad (4.6)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4.7)$$

onde ρ é a densidade de massa da viga e L é o comprimento da viga.

Na **viga de Timoshenko** EI e A dependem das rotações da estrutura provocadas por forças de cisalhamento (Figura 4.2).

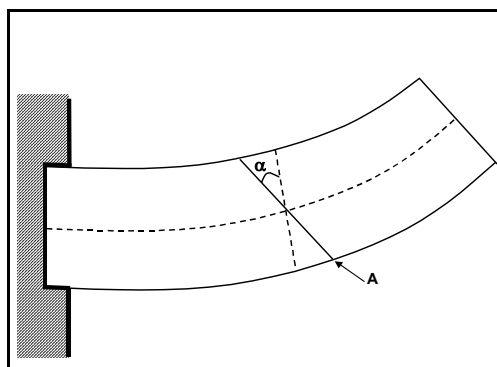


Fig. 1

FIGURA 4.2 - Viga de Timoshenko.

Aqui α é a rotação da seção transversal dada por:

$$\alpha = \beta + \frac{\partial y}{\partial x} \quad (4.8)$$

onde β é o chamado ângulo de cisalhamento.

O Momento fletor para a viga de Timoshenko é dado por:

$$M = EI \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (4.9)$$

e a tensão de cisalhamento:

$$S = EI \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial^2 x} \quad (4.10)$$

e as energias cinética e potencial:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^2 \rho \cdot A(\dot{y})^2 \cdot dx + \int_0^2 \rho \cdot I(\dot{\alpha})^2 \cdot dx \quad (4.11)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 \cdot dx \quad (4.12)$$

CAPÍTULO 5

O PROBLEMA DIFERENCIAL DO AUTOVALOR

Considere a equação diferencial linear do movimento transversal de uma viga engastada-livre de Euler-Bernouli quando não há termos forçantes (Junkins, 1993):

$$EI \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1)$$

Empregando o método de *separação de variáveis*:

$$y(x, t) = Y(x) \cdot F(t) \quad (5.2)$$

e aplicando (5.2) em (5.1):

$$EI \cdot \frac{\partial^4 (Y(x) \cdot F(t))}{\partial x^4} + \rho \cdot \frac{\partial^2 (Y(x) \cdot F(t))}{\partial t^2} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{EI}{\rho Y(x)} \cdot \frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} + \frac{1}{F(t)} \cdot \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.4)$$

O fato mostrado na Equação (5.4) de que os termos dependentes de x cancelam-se com os termos dependentes de t implica que são iguais a um termo constante e possuem sinais opostos:

$$\frac{EI}{\rho Y(x)} \cdot \frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} = - \frac{1}{F(t)} \cdot \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} = \lambda \quad (5.5)$$

Notemos que λ pode ser um valor estritamente positivo ou negativo. Para o caso estritamente negativo assumamos que $\lambda = -\omega^2$ onde ω é uma constante qualquer não nula. Analisemos o que ocorre partindo de (5.5):

$$\frac{EI}{\rho Y(x)} \cdot \frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} = \lambda \quad (5.6)$$

$$- \frac{1}{F(t)} \cdot \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} = \lambda \quad (5.7)$$

Partindo agora de (5.7), sendo $\lambda = -\omega^2$,

$$-\frac{1}{F(t)} \cdot \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} - \omega^2 \cdot F(t) = 0 \quad (5.9)$$

cuja solução é:

$$F(t) = \bar{C}_1 \cdot e^{-\omega \cdot t} + \bar{C}_2 \cdot e^{+\omega \cdot t} \quad (5.10)$$

que é claramente divergente, não possuindo interesse físico prático. Por este motivo λ tem que ser estritamente positivo.

Assim sendo, façamos $\lambda = +\omega^2$ para ter a partir de (5.7):

$$-\frac{1}{F(t)} \cdot \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} = \omega^2 \quad (5.11)$$

teremos a seguinte solução:

$$F(t) = \bar{\bar{C}}_1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} + \bar{\bar{C}}_2 \cdot e^{+j \cdot \omega \cdot t} \quad (5.12)$$

$$F(t) = C \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi) \quad (5.13)$$

Podemos agora utilizar $\lambda = +\omega^2$ para obter uma solução para a equação (5.6):

$$\frac{EI}{\rho \cdot Y(x)} \cdot \frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} = \omega^2 \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} - \frac{\omega^2 \cdot \rho}{EI} \cdot Y(x) = 0 \quad (5.15)$$

fazendo $\beta^4 = \frac{\omega^2 \cdot \rho}{EI}$, vem:

$$\frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} - \beta^4 \cdot Y(x) = 0 \quad (5.16)$$

A equação (5.16) possui as seguintes raízes: β , $-\beta$, $j \cdot \beta$, $-j \cdot \beta$. Portanto, $Y(x)$ será da forma:

$$Y(x) = k_1 \cdot e^{-\beta \cdot x} + k_2 \cdot e^{\beta \cdot x} + k_3 \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot x} + k_4 \cdot e^{j \cdot \beta \cdot x} \quad (5.17)$$

Para obter uma forma trigonométrica da Equação (5.17) temos que proceder da seguinte forma:

$$Y(x) = k_1.e^{-\beta.x} + k_2.e^{\beta.x} - k_1.e^{\beta.x} + k_2.e^{-\beta.x} + k_1.e^{\beta.x} - k_2.e^{-\beta.x} + k_3.e^{-j.\beta.x} + k_4.e^{j.\beta.x} \quad (5.18)$$

$$Y(x) = k_1[e^{-\beta.x} - e^{\beta.x}] + k_2[e^{\beta.x} + e^{-\beta.x}] + k_1.e^{\beta.x} - k_2.e^{-\beta.x} + C_2.\cos(\beta.x) + C_1.\sin(\beta.x) \quad (5.19)$$

onde $C_1 = j.(-k_3 + k_4)$ e $C_2 = k_3 + k_4$. Continuando o desenvolvimento a partir da Equação (5.19) fazendo $k_1 = -C_3'/2$ e $k_2 = C_4/2$:

$$Y(x) = -C_3' \left[\frac{e^{-\beta.x} - e^{\beta.x}}{2} \right] + C_4 \left[\frac{e^{-\beta.x} + e^{\beta.x}}{2} \right] - k_2.e^{-\beta.x} + k_1.e^{\beta.x} + C_2.\cos(\beta.x) + C_1.\sin(\beta.x) \quad (5.20)$$

$$Y(x) = C_1.\sin(\beta.x) + C_2.\cos(\beta.x) - C_3' \left[\frac{e^{-\beta.x} - e^{\beta.x}}{2} \right] + C_4 \left[\frac{e^{-\beta.x} + e^{\beta.x}}{2} \right] - k_1 \left[\frac{k_2}{k_1} e^{-\beta.x} - e^{\beta.x} \right] \quad (5.21)$$

Da Equação (5.21) obtém-se facilmente a seguinte equação:

$$Y(x) = C_1.\sin(\beta.x) + C_2.\cos(\beta.x) + C_3.\sinh(\beta.x) + C_4.\cosh(\beta.x) \quad (5.22)$$

onde $C_3 = -C_3' - k$.

Das condições geométricas de contorno temos:

$$Y(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{dY(0)}{dx} = 0 \Rightarrow \beta.C_1 + \beta.C_3 = 0 \quad (5.24)$$

$$\frac{d^2Y(L)}{dx^2} = 0 \Rightarrow -\beta^2.\sin(\beta.L).C_1 - \beta^2.\cos(\beta.L).C_2 + \beta^2.\sinh(\beta.L).C_3 + \beta^2.\cosh(\beta.L).C_4 = 0 \quad (5.25)$$

$$\frac{d^3Y(L)}{dx^3} = 0 \Rightarrow -\beta^3.\sin(\beta.L).C_1 - \beta^3.\cos(\beta.L).C_2 + \beta^3.\sinh(\beta.L).C_3 + \beta^3.\cosh(\beta.L).C_4 = 0 \quad (5.26)$$

Colocando as Equações (5.23) a (5.26) na forma matricial vem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & \beta & 0 \\ -\beta^2.\sin(\beta.L) & -\beta^2.\cos(\beta.L) & \beta^2.\sinh(\beta.L) & \beta^2.\cosh(\beta.L) \\ -\beta^3.\cos(\beta.L) & -\beta^3.\sin(\beta.L) & \beta^3.\cosh(\beta.L) & \beta^3.\sinh(\beta.L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Para a Equação (5.27) fornecer uma solução não-trivial para C_1, C_2, C_3, C_4 é preciso que o determinante da matriz de coeficientes de C_1, C_2, C_3, C_4 seja igual à zero:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & \beta & 0 \\ -\beta^2 \cdot \sin(\beta \cdot L) & -\beta^2 \cdot \cos(\beta \cdot L) & \beta^2 \cdot \sinh(\beta \cdot L) & \beta^2 \cdot \cosh(\beta \cdot L) \\ -\beta^3 \cdot \cos(\beta \cdot L) & -\beta^3 \cdot \sin(\beta \cdot L) & \beta^3 \cdot \cosh(\beta \cdot L) & \beta^3 \cdot \sinh(\beta \cdot L) \end{pmatrix} = 0 \quad (5.28)$$

Da Equação (5.28) teremos, finalmente:

$$\cos(\beta \cdot L) \cdot \cosh(\beta \cdot L) = -1 \quad (5.29)$$

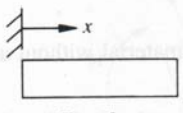
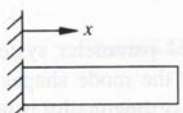
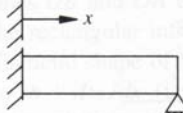
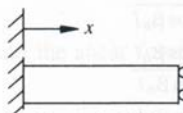
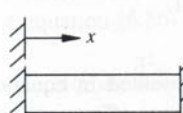
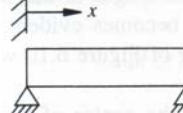
que é conhecida como a equação característica, e inclui uma função transcendental. Recorrendo à métodos numéricos obtemos infinitas raízes “ $\beta_i \cdot L$ ” como soluções da Equação (5.29). Algumas dessas soluções estão apresentadas em Junkins (1993). Outros exemplos de arranjos de uma viga podem ser encontrados em Inman (1996) tal como mostrado na Figura 5.1.

As freqüências de vibração da estrutura, ou modos de vibração, podem ser dadas pela seguinte expressão (em Hertz):

$$f_i = \frac{(\beta_i \cdot L)^2}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho \cdot L^4}} \quad , i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.30)$$

onde “ $\beta_i \cdot L$ ” são as soluções de (5.29). A freqüência dos modos de vibração vai aumentando à medida que o índice i aumenta. Não foi considerado nesses cálculos, mas se considerássemos o amortecimento estrutural ζ , perceberíamos que ele aumentaria à medida que a freqüência aumenta, conforme verificado experimentalmente em outros trabalhos. De acordo com Bryson (1994) não há uma teoria quantitativa satisfatória para prever o amortecimento estrutural.

TABLE 6.4 SAMPLE OF VARIOUS BOUNDARY CONFIGURATIONS OF A SLENDER BEAM IN TRANSVERSE VIBRATION OF LENGTH l / ILLUSTRATING WEIGHTED NATURAL FREQUENCIES AND MODE SHAPES^a

Configuration	Weighted frequencies $\beta_n l$ and characteristic equation	Mode shape	σ_n
 Free-free	0 (rigid-body mode)	$\cosh \beta_n x + \cos \beta_n x$	0.9825
	4.73004074		1.0008
	7.85320462	$-\sigma_n (\sinh \beta_n x + \sin \beta_n x)$	0.9999
	10.9956078		1.0000
	14.1371655		0.9999
	17.2787597		1 for $n > 5$
	$\frac{(2n+1)\pi}{2}$ for $n > 5$		
 Clamped-free	$\cos \beta l \cosh \beta l = 1$	$\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x$	0.7341
	1.87510407		1.0185
	4.69409113	$-\sigma_n (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x)$	0.9992
	7.85475744		1.0000
	10.99554073		1.0000
	14.13716839		1 for $n > 5$
	$\frac{(2n-1)\pi}{2}$ for $n > 5$		
 Clamped-pinned	$\cos \beta l \cosh \beta l = -1$	$\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x$	1.0008
	3.92660231		1 for $n > 1$
	7.06858275	$-\sigma_n (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x)$	
	10.21017612		
	13.35176878		
	16.49336143		
	$\frac{(4n+1)\pi}{4}$ for $n > 5$		
 Clamped-sliding	$\tan \beta l = \tanh \beta l$	$\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x$	0.9825
	2.36502037		1 for $n > 1$
	5.49780392	$-\sigma_n (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x)$	
	8.63937983		
	11.78097245		
	14.92256510		
	$\frac{(4n-1)\pi}{4}$ for $n > 5$		
 Clamped-clamped	$\tan \beta l + \tanh \beta l = 0$	$\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x$	0.9825
	4.73004074		1.0008
	7.85320462	$-\sigma_n (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x)$	0.9999
	10.9956079		1.0000
	14.1371655		0.9999
	17.2787597		1 for $n > 5$
	$\frac{(2n+1)\pi}{2}$ for $n > 5$		
 Pinned-pinned	$\cos \beta l \cosh \beta l = 1$		
	$n\pi$	$\sin \frac{n\pi x}{l}$	none
	$\sin \beta l = 0$		

^a Here the weighted natural frequencies $\beta_n l$ are related to the natural frequencies by equation (6.101) or $\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{EI/\rho A}$, as used in Example 6.5.1. The values of σ_n for the mode shapes are computed from the formulas given in Table 6.5.

FIGURA 5.1 – Diversos tipos de arranjos com uma viga, as equações transcendentais e modos de vibração correspondentes.

FONTE: Inman (1996, p. 335).

CAPÍTULO 6

MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS

Uma aplicação bastante conhecida das equações de Euler-Lagrange para modelos contínuos é o chamado método dos modos assumidos (Craig, 1981). Para gerar um modelo de uma planta flexível que tenha equação diferencial de aproximadamente N graus de liberdade (D.O.F. – “Degrees Of Freedom”), o deslocamento elástico transversal pode ser expandido como uma combinação linear entre N funções de forma (“mode-shapes” ou autofunções) $\phi_i(x)$ que são construídas de forma a satisfazer as condições de contorno do problema em questão. Portanto a “deformação” (transversal ou longitudinal) $v(x,t)$ de uma viga pode ser descrita como uma combinação linear dessas funções de forma:

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \cdot q_i(t) \quad (6.1)$$

Os $\phi_i(x)$ são as funções de forma (“mode-shapes”) assumidas, $q_i(t)$ são as coordenadas generalizadas e N denota o número de termos retidos na aproximação (caso de um modelo de N graus de liberdade ou ***N-DOF*** (“degrees of freedom”).

O método dos modos assumidos consiste em substituir (6.1) nas expressões correspondentes à energia cinética K , energia potencial U e do trabalho virtual δW e então aplicar a Equação de Euler-Lagrange para encontrar as equações do movimento.

Para $v(x,t)$ sendo considerado como uma deslocamento longitudinal (ou axial) de um elemento de massa numa viga de Euler-Bernoulli, a energia potencial elástica da viga pode ser dada por (Craig, 1981):

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_0^l E \cdot A \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (6.2)$$

Onde E é o módulo de Young (módulo de elasticidade) e A é a área da seção transversal da viga. Assim, substituindo a equação (6.1) na (6.2) teremos,

$$U(t) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} \cdot q_i \cdot q_j \quad (6.3)$$

onde,

$$\kappa_{ij} = \int_0^l E.A. \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx \quad (6.4)$$

sendo cada κ_{ij} um elemento da matriz elasticidade.

Em outras palavras, a energia potencial elástica U é uma função quadrática das coordenadas generalizadas como mostrado abaixo:

$$U = \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{\kappa} \underline{q} \quad (6.5)$$

onde,

$$\underline{\kappa} = [\kappa_{ij}] = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \dots & \kappa_{1N} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \dots & \kappa_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_{N1} & \kappa_{N2} & \dots & \kappa_{NN} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_N \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Onde cada κ_{ij} é dado pela equação (6.4).

A energia cinética da viga devido ao deslocamento longitudinal v é:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l \rho (\dot{v})^2 dx \quad (6.7)$$

Substituindo (6.1) na (6.7) teremos:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (6.8)$$

onde,

$$m_{ij} = \int_0^l \rho \phi_i \phi_j dx \quad (6.9)$$

Reescrevendo (6.8) numa forma quadrática:

$$K = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T \underline{M} \dot{\underline{q}} \quad (6.10)$$

onde,

$$\underline{M} = [m_{ij}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{N1} & m_{N2} & \dots & m_{NN} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_N \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Quando a viga está sujeita a forças externas as forças generalizadas podem ser calculadas aplicando os conhecimentos de trabalho virtual. Assim, se $p(x,t)$ for uma força externa longitudinalmente aplicada na viga e $v(x,t)$ o deslocamento correspondente,

$$\delta W = \int_0^l p(x,t) \delta v(x,t) dx = \sum_{i=1}^N p_i(x,t) \delta v_i(x,t) \quad (6.12)$$

Empregando a expressão (6.1) para $v(x,t)$ em (6.12) teremos,

$$\delta W = \int_0^l p(x,t) \delta \left[\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right] dx \quad (6.13)$$

$$\delta W = \int_0^l p(x,t) \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \delta q_i(t) dx \quad (6.14)$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \int_0^l p(x,t) \phi_i(x) \delta q_i(t) dx \quad (6.15)$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^N Q_i \delta q_i(t) \quad (6.16)$$

onde as forças generalizadas são dadas por

$$Q_i = \int_0^l p(x,t) \phi_i(x) dx \quad (6.17)$$

Fazendo-se uso da equação de Euler-Lagrange pode-se chegar à equação do movimento:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \underline{q}} &= \underline{Q} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (K - U)}{\partial \dot{\underline{q}}} \right) - \frac{\partial (K - U)}{\partial \underline{q}} &= \underline{Q} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T M \underline{\dot{q}} - \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T \kappa \underline{q} \right)}{\partial \dot{\underline{q}}} \right) - \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T M \underline{\dot{q}} - \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T \kappa \underline{q} \right)}{\partial \underline{q}} &= \underline{Q} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T M \dot{\underline{q}} \right)}{\partial \dot{\underline{q}}} \right) - \frac{\partial \left(-\frac{1}{2} \underline{q}^T \kappa \underline{q} \right)}{\partial \underline{q}} = \underline{Q}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (2M \dot{\underline{q}}) \right) + \frac{1}{2} (2\kappa \underline{q}) = \underline{Q}$$

$$M \cdot \ddot{\underline{q}} + \kappa \cdot \underline{q} = \underline{Q} \quad (6.18)$$

que é a equação do movimento (desconsiderando-se efeitos dissipativos na estrutura), onde \underline{Q} é o vetor das forças generalizadas (forças ou torques).

Para $v(x, t)$ sendo considerado como uma deslocamento transversal de um elemento de massa numa viga de Euler-Bernoulli, a energia potencial elástica da viga pode ser dada por:

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_0^l E.I. \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (6.19)$$

Onde I é o momento de inércia da viga e E é o módulo de Young.

A energia cinética é dada por uma expressão idêntica a (6.7):

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho.A.(\dot{v})^2 dx \quad (6.20)$$

Sendo $v(x, t)$ de acordo com (6.1) temos que,

$$\kappa_{ij} = \int_0^l E.I. \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} dx \quad (6.21)$$

$$m_{ij} = \int_0^l \rho.A.\phi_i \phi_j dx \quad (6.22)$$

$$Q_i = \int_0^l p(x, t).\phi_i(x) dx \quad (6.23)$$

A partir daí o procedimento para chegar à equação do movimento (6.18) é similar ao mostrado anteriormente.

O método dos modos assumidos segue o seguinte roteiro resumido (Craig, 1981):

1. Selecione o número de funções de forma $\phi_i(x)$ e construa tais funções;
2. Calcule os coeficientes κ_{ij} da matriz elasticidade;
3. Calcule os coeficientes m_{ij} da matriz massa;

4. Calcule as forças generalizadas $Q_i = \int_0^l p(x,t)\phi_i(x)dx$ onde $p(x,t)$ é um carregamento transversal sobre uma viga de comprimento l .
5. Formar as equações do movimento usando a equação (6.18), caso não hajam forças dissipativas.

Observação: se o $\phi_i(x)$ for uma “função de comparação”, isto é, uma função que satisfaz condições de contorno físicas e geométricas de uma viga de Euler-Bernoulli engastada-livre de comprimento l , ela pode ser expressa por:

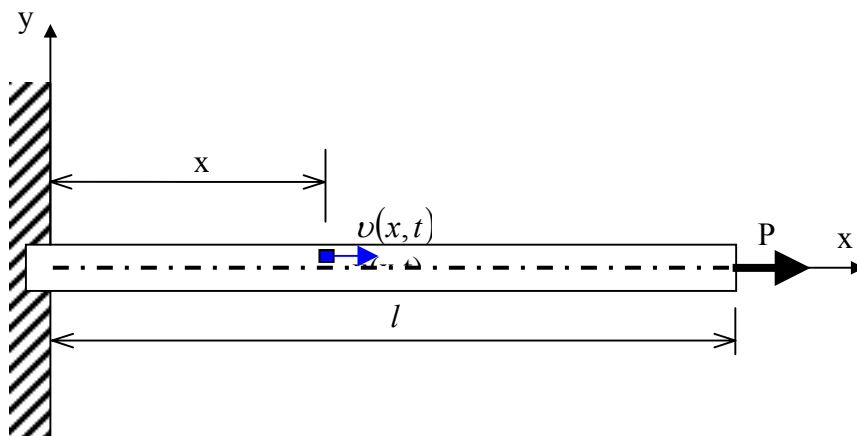
$$\phi_i(x-r) = 1 - \cos\left(\frac{i\pi \cdot (x-r)}{l}\right) + \frac{1}{2} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \left(\frac{i\pi \cdot (x-r)}{l}\right)^2 \quad (6.24)$$

satisfazendo as seguintes condições de contorno:

$\phi_i|_{x=r} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x}|_{x=r} = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}|_{x=r+l} = \frac{\partial^3 \phi_i}{\partial x^3}|_{x=r+l} = 0$, onde normalmente considera-se o coeficiente $r = 0$, por razões de simplicidade. A equação (2.125) foi sugerida em (Junkins, 1993).

Exemplo 4: (Craig, 1981)

Use o método dos modos assumidos para obter o modelo de **2-DOF** de uma viga engastada-livre que sofre deslocamento elástico $v(x,t)$ sujeito a ação de força externa $P(t)$ longitudinalmente.



Resposta:

- 1) Selecionando as funções de forma $\phi_i(x)$.

A única condição de contorno é: $v(0, t) = 0$

Assim, as funções de forma $\phi_i(x)$ deverão satisfazer às seguintes condições de contorno:

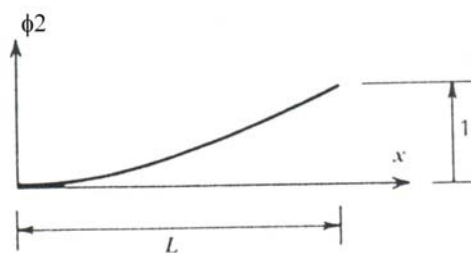
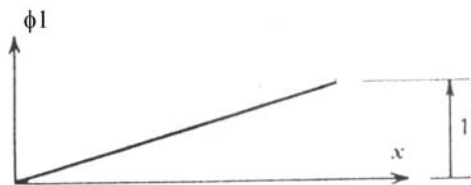
$$\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$$

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^2 \phi_i(x) \cdot q_i(t) = \phi_1(x) \cdot q_1(t) + \phi_2(x) \cdot q_2(t)$$

Os $\phi_i(x)$ sugeridos (assumidos) visando satisfazer às condições de contorno foram:

$$\phi_1(x) = \frac{x}{l}$$

$$\phi_2(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2$$



2) Cálculo dos elementos da matriz de elasticidade:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{1}{l}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \frac{2}{l} \left(\frac{x}{l}\right)$$

$$k_{ij} = \int_0^l E.A. \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx$$

$$\kappa_{11} = \int_0^l E.A. \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{EA}{l}$$

$$\kappa_{12} = \kappa_{21} = \frac{EA}{l}$$

$$\kappa_{22} = \frac{4EA}{3l}$$

Assim,

$$\kappa = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ \frac{EA}{l} & \frac{4EA}{3l} \end{bmatrix}$$

3) Agora para a montagem da matriz M,

$$m_{ij} = \int_0^l \rho \cdot \phi_i \phi_j dx$$

$$m_{11} = \int_0^l \rho \cdot \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{\rho Al}{3}$$

$$m_{12} = m_{21} = \frac{\rho Al}{4}$$

$$m_{22} = \frac{\rho Al}{5}$$

Assim,

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\rho Al}{3} & \frac{\rho Al}{4} \\ \frac{\rho Al}{4} & \frac{\rho Al}{5} \end{bmatrix}$$

4) Forças generalizadas:

$p(x,t)=P$ somente existe em $x=l$, logo,

$$Q_i = \int_0^l p(x,t) \phi_i(x) dx \Rightarrow p(L,t) \phi_i(L)$$

$$Q_i = P \cdot \phi_i(L)$$

$$Q_1 = P \cdot \phi_1(L) = P$$

$$Q_2 = P \cdot \phi_2(L) = P$$

5) Agora montemos as equações do movimento:

$$M \ddot{\underline{q}} + \kappa \underline{q} = \underline{Q}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\rho Al}{3} & \frac{\rho Al}{4} \\ \frac{\rho Al}{4} & \frac{\rho Al}{5} \end{bmatrix} \ddot{\underline{q}} + \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ \frac{EA}{l} & \frac{4EA}{3l} \end{bmatrix} \underline{q} = \begin{pmatrix} P \\ P \end{pmatrix}$$

$$\rho Al \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \ddot{\underline{q}} + \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \underline{q} = \begin{pmatrix} P \\ P \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO 7

CONCEITO DE MODELAGEM PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (“Finite Elements Method” – *FEM*) foi criado para resolver dois principais problemas encontrados no Método dos Modos Assumidos (Craig, 1981):

- No método dos modos assumidos é extremamente difícil escolher um conjunto de funções de forma $\phi_i(x)$ para uma estrutura que tenha uma geometria complexa;
- As equações resultantes do método dos modos assumidos são em geral altamente acopladas o que exige mais tempo de processamento numérico e mais espaço na memória do computador;
- Para cada nova geometria devemos elaborar quase sempre um novo conjunto de funções de forma $\phi_i(x)$.

O Método dos Elementos Finitos (FEM) pode ser considerado uma aplicação do método dos modos assumidos onde $\phi_i(x)$ representam formas de deflexão sobre uma porção da estrutura (elemento finito) com os elementos sendo montados para formar o sistema estrutural com sua geometria complexa.

Vamos ver aqui os casos de movimento longitudinal, transversal, torsional para o movimento em duas dimensões e combinações entre estes para o caso em três dimensões.

7.1 MOVIMENTO AXIAL

Seja uma barra de comprimento uniforme l , densidade de massa ρ , módulo de Young E e área da seção transversal A (Figura 7.1).

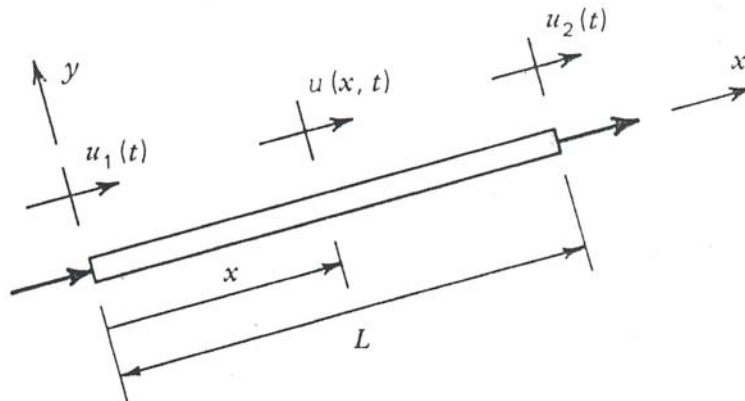


FIGURA 7.1 – Um elemento uniforme sujeito à deformação longitudinal.

FONTE: Craig (1981, p. 383).

A aproximação mais simples que se pode ter para o deslocamento nas duas extremidades,

$$v(x,t) = \phi_1(x).q_1(t) + \phi_2(x).q_2(t) \quad (7.1)$$

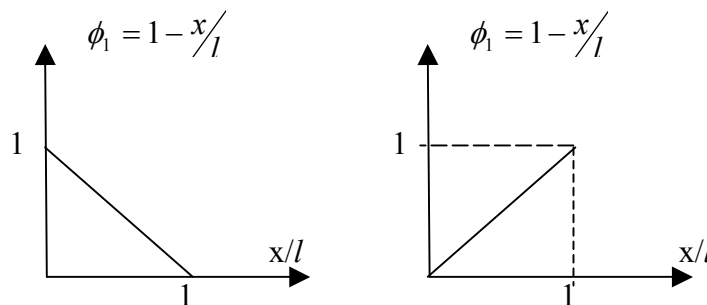


FIGURA 7.2 – Funções de forma para o elemento longitudinal.

Tendo em vista que $v(0,t) = q_1(t)$ e $v(l,t) = q_2(t)$ as condições de contorno das funções de forma que devem ser satisfeitas são;

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= 1 \\ \phi_1(l) &= 0 \\ \phi_2(0) &= 0 \\ \phi_2(l) &= 1 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Da equação diferencial que rege a dinâmica da deformação longitudinal de uma viga (Craig, 1981, cap.9) encontramos a expressão para a deformação v (onde a densidade de massa ρ é

constante), para uma condição inicial $v(x,0) = \frac{\partial v(x,0)}{\partial x} = \frac{\partial^2 v(x,0)}{\partial x^2} = 0$, a elasticidade EI é constante e a força externa $p = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial v}{\partial x} \right) + p = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (7.3)$$

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (7.4)$$

Daí,

$$v(x) = c_1 + c_2 x \quad (7.5)$$

Normalizando em relação ao comprimento da viga l ,

$$v(x) = c_1 + c_2 \left(\frac{x}{l} \right) \quad (7.6)$$

A partir de uma simples comparação entre (7.6) e (7.2) chegamos às funções de forma (*modos assumidos*):

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 - \frac{x}{l} \\ \phi_2(x) &= \frac{x}{l} \end{aligned} \quad (7.7)$$

De equações anteriormente mostradas:

$$\kappa_{ij} = \int_0^l E.I. \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} dx \quad (7.8)$$

$$m_{ij} = \int_0^l \rho.A.\phi_i \phi_j dx \quad (7.9)$$

$$Q_i = \int_0^l p(x,t).\phi_i(x) dx \quad (7.10)$$

Após substituirmos (7.7) em (7.8), (7.9) teremos,

$$\kappa = \left(\frac{AE}{l} \right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

$$M = \left(\frac{\rho Al}{6} \right) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Finalmente, as equações do movimento:

$$M \cdot \ddot{\underline{q}} + \kappa \cdot \underline{q} = \underline{Q} \quad (7.13)$$

$$\left(\frac{\rho A l}{6} \right) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \ddot{\underline{q}} + \left(\frac{AE}{l} \right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

Como nesse caso apresentado a viga com deformação elástica longitudinal está livre de forças externas temos $\underline{Q}=\mathbf{0}$,

$$\left(\frac{\rho A l}{6} \right) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \ddot{\underline{q}} + \left(\frac{AE}{l} \right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

7.2 MOVIMENTO TRANSVERSAL

Para o caso do movimento transversal de uma viga de Euler-Bernouli de comprimento l devemos considerar quatro tipos de deformações: 1) o movimento transversal na extremidade inicial $v(0,t) = q_1(t)$, 2) a declividade na extremidade inicial $\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = q_2(t)$, 3) o movimento transversal na extremidade final $v(l,t) = q_3(t)$ e 4) a declividade na extremidade final $\frac{\partial v(l,t)}{\partial x} = q_4(t)$. Assim sendo, a deformação v pode ser escrita como:

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^4 \phi_i(x) \cdot q_i(t) \quad (7.16)$$

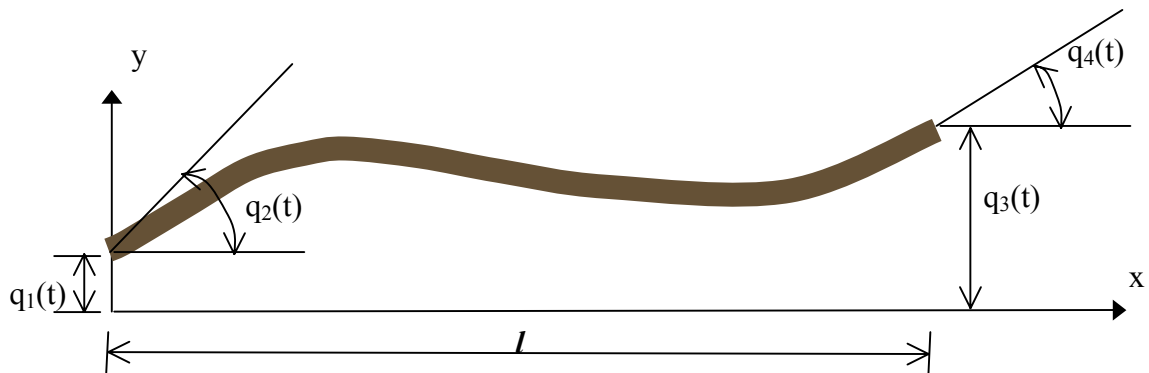


FIGURA 7.3 – Deflexão transversal na viga de Euler-Bernouli.

Da Figura 7.3 temos:

$$v(0,t) = \phi_1(0) \cdot q_1(t) + \phi_2(0) \cdot q_2(t) \quad (7.17)$$

que significa dizer que a viga em $x = 0$ não sofre a influência de q_3 nem q_4 . Isto é:

$$\phi_3(0) = \phi_4(0) = \frac{\partial \phi_3(0)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_4(0)}{\partial x} = 0 \quad (7.18)$$

$$v(l, t) = \phi_3(l) \cdot q_3(t) + \phi_4(l) \cdot q_4(t) \quad (7.19)$$

que significa dizer que a viga em $x = l$ não sofre a influência de φ_1 nem φ_2 . Isto é:

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) = \frac{\partial \phi_1(0)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2(0)}{\partial x} = 0 \quad (7.20)$$

Similarmente,

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1(0)}{\partial x} \cdot q_1(t) + \frac{\partial \phi_2(0)}{\partial x} \cdot q_2(t) \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial v(l, t)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1(l)}{\partial x} \cdot q_1(t) + \frac{\partial \phi_2(l)}{\partial x} \cdot q_2(t) \quad (7.22)$$

A análise da figura 8 permite perceber que:

$$v(0, t) = q_1(t) \quad (7.23)$$

O que, quando comparando (7.17) com (7.23) tem-se que:

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= 1 \\ \phi_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.24)$$

A análise da figura 8 percebe-se que:

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = q_2(t) \quad (7.25)$$

O que, quando comparando (7.25) com (7.21) tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1(0)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \phi_2(0)}{\partial x} &= 1 \end{aligned} \quad (7.26)$$

A análise da Figura 7.3 permite perceber que:

$$v(l, t) = q_3(t) \quad (7.27)$$

O que, quando comparando (7.27) com (7.19) tem-se que:

$$\begin{aligned}\phi_3(l) &= 1 \\ \phi_4(l) &= 0\end{aligned}\tag{7.28}$$

A análise da Figura 7.3 percebe-se que:

$$\frac{\partial v(l,t)}{\partial x} = q_4(t)\tag{7.29}$$

O que, quando comparando (7.29) com (7.22) tem-se que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_3(l)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \phi_4(l)}{\partial x} &= 1\end{aligned}\tag{7.30}$$

Assim, as condições de contorno obtidas nas equações (7.24), (7.26), (7.28) e (7.30) podem ser agrupadas no seguinte conjunto (Craig, 1981):

$$\begin{aligned}\phi_1(0) &= 1, & \frac{\partial \phi_1(0)}{\partial x} &= \phi_1(l) = \frac{\partial \phi_1(l)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \phi_2(0)}{\partial x} &= 1, & \phi_2(0) &= \phi_2(l) = \frac{\partial \phi_2(l)}{\partial x} = 0 \\ \phi_3(l) &= 1, & \phi_3(0) &= \frac{\partial \phi_3(0)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_3(l)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \phi_4(l)}{\partial x} &= 1, & \phi_4(0) &= \frac{\partial \phi_4(0)}{\partial x} = \phi_4(l) = 0\end{aligned}\tag{7.31}$$

Da equação diferencial que rege a dinâmica da deformação transversal de uma viga (Craig, 1981, cap.9) encontramos a expressão para a deformação v (onde a densidade de massa ρ é constante) para uma condição inicial $v(x,0) = \frac{\partial v(x,0)}{\partial x} = \frac{\partial^2 v(x,0)}{\partial x^2} = 0$, a elasticidade EI é constante e a força externa $p = 0$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p\tag{7.32}$$

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0\tag{2.40}$$

$$v(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3\tag{7.33}$$

Normalizando quanto ao comprimento l da viga teremos,

$$v(x) = c_1 + c_2 \left(\frac{x}{l} \right) + c_3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + c_4 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \quad (7.34)$$

Fazendo a seguinte consideração de normalização para as variáveis normalizadas em uma condição inicial $t = 0$:

$$q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = q_4(0) = 1 \quad (7.35)$$

Dáí, fazendo uma analogia entre (7.34) e (7.15) usando a consideração (7.35) teremos,

$$v(x,0) = \phi_1(x).q_1(0) + \phi_2(x).q_2(0) + \phi_3(x).q_3(0) + \phi_4(x).q_4(0) \quad (7.36)$$

$$\phi_1(x) + \phi_2(x) + \phi_3(x) + \phi_4(x) = c_1 + c_2 \left(\frac{x}{l} \right) + c_3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + c_4 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \quad (7.37)$$

analogamente,

$$\frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_4(x)}{\partial x} = \frac{c_2}{l} + \frac{2c_3}{l} \left(\frac{x}{l} \right) + \frac{3c_4}{l} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \quad (7.38)$$

De (7.37) para $x = 0$ e levando em consideração (7.31):

$$1 + 0 + 0 + 0 = c_1 + c_2 \left(\frac{0}{l} \right) + c_3 \left(\frac{0}{l} \right)^2 + c_4 \left(\frac{0}{l} \right)^3$$

$$\boxed{c_1 = 1} \quad (7.39)$$

De (7.38) para $x = 0$ e levando em consideração (7.31):

$$0 + 1 + 0 + 0 = \frac{c_2}{l} + \frac{2c_3}{l} \left(\frac{0}{l} \right) + \frac{3c_4}{l} \left(\frac{0}{l} \right)^2 \quad (7.40)$$

$$\boxed{c_2 = l} \quad (7.41)$$

Das equações (7.37) e (7.38) para $x = l$ e levando em consideração (7.31):

$$0 + 0 + 1 + 0 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \quad (7.42)$$

$$0 + 0 + 0 + 1 = \frac{c_2}{l} + \frac{2c_3}{l} + \frac{3c_4}{l} \quad (7.43)$$

Criando um sistema com (7.42) e (7.43) temos:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1 \\ c_2 + 2c_3 + 3c_4 = l \end{cases} \quad (7.44)$$

Aplicando os resultados encontrados para c_1 e c_2 no sistema (7.44) chegamos ao sistema,

$$\begin{cases} c_3 + c_4 = -l \\ 2c_3 + 3c_4 = 0 \end{cases} \quad (7.45)$$

O que resulta em,

$$\boxed{c_3 = -3l} \quad (7.46)$$

$$\boxed{c_4 = 2l} \quad (7.47)$$

Voltando à (7.37) com as constantes definidas teremos:

$$\phi_1(x) + \phi_2(x) + \phi_3(x) + \phi_3(x) = 1 + l\left(\frac{x}{l}\right) - 3l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2l\left(\frac{x}{l}\right)^3 \quad (7.48)$$

Claramente (7.48) satisfaz às condições (7.31). A derivada de (7.48) em x também satisfaz à (7.31).

Para encontrar cada função de forma individualmente devemos desmembrar (7.48) cuidadosamente sempre tendo em consideração (7.31):

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 &= \left[1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]_{\leftarrow \phi_1} + \\ &+ \left[x - 2l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]_{\leftarrow \phi_2} + \\ &+ \left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]_{\leftarrow \phi_3} + \\ &+ \left[-l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]_{\leftarrow \phi_4} \end{aligned} \quad (7.49)$$

Donde as funções de forma são:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\
\phi_2 &= x - 2l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\
\phi_3 &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\
\phi_4 &= -l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3
\end{aligned}
\tag{7.50}$$

A Figura 7.4 mostra as formas dessas funções de forma.

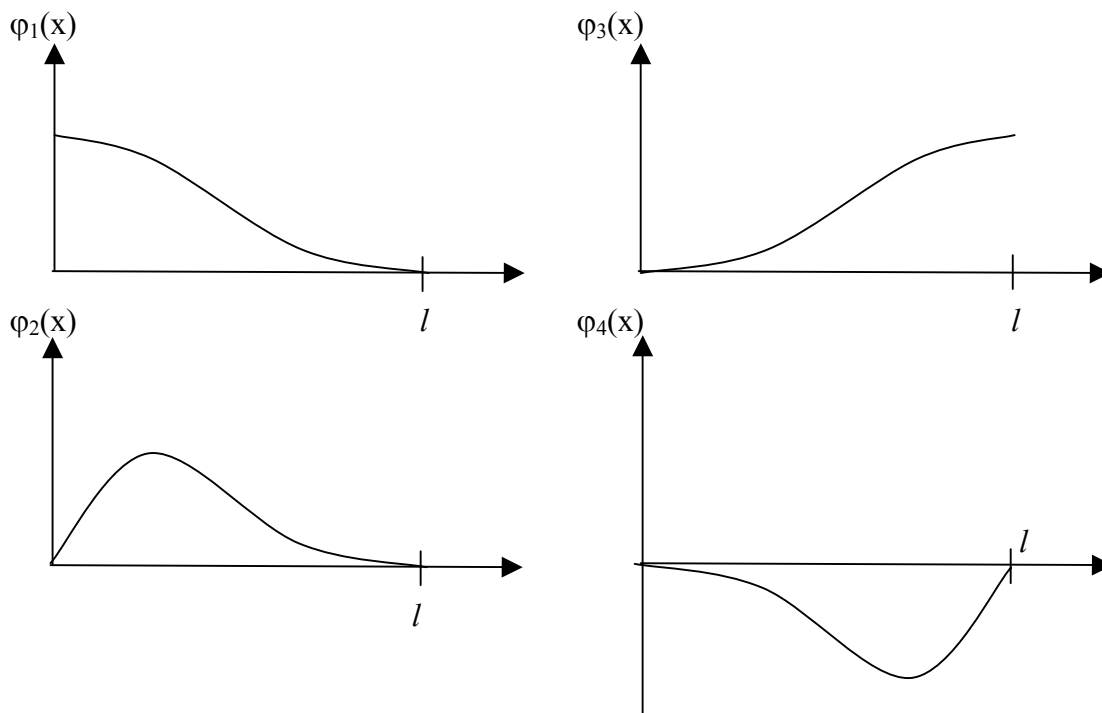


FIGURA 7.4 – funções de forma para a deformação transversal.

Finalmente, podemos usar as equações $\kappa_{ij} = \int_0^l E.I. \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} dx$ e $m_{ij} = \int_0^l \rho.A.\phi_i \phi_j dx$ para calcular os elementos das matrizes de elasticidade e de massa para obter as seguintes matrizes simétricas:

$$\kappa = \left(\frac{EI}{l^2} \right) \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ sim. & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

$$M = \left(\frac{\rho Al}{420} \right) \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & -22l \\ sim. & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

As equações do movimento são então montadas,

$$M \cdot \ddot{\underline{q}} + \kappa \cdot \underline{q} = \underline{0} \quad (7.53)$$

$$\left(\frac{\rho Al}{420} \right) \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & -22l \\ sim. & & & 4l^2 \end{bmatrix} \cdot \ddot{\underline{q}} + \left(\frac{EI}{l^2} \right) \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ sim. & & & 4l^2 \end{bmatrix} \cdot \underline{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.54)$$

7.3 MOVIMENTO DE TORÇÃO

Seja I_p o momento de inércia ao redor do eixo centroidal de uma viga (eixo x da Figura 7.5) e GJ a chamada elasticidade torcional, as energias potencial elástica e cinética provocadas com esse efeito de torção são dadas por,

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_0^l GJ \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx \quad (7.55)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho I_p (\dot{\theta})^2 dx \quad (7.56)$$

Sendo l o comprimento da viga e θ a posição angular de um elemento de massa da viga devido à torção, em função da posição e do tempo.

Convém lembrar que em um grande número de casos práticos o eixo torcional não coincide com o eixo de inércia. Isso ocorre quando temos uma seção não circular o que gera um acoplamento entre flexão e torção e é este um efeito que ocorre nas asas de aviões.

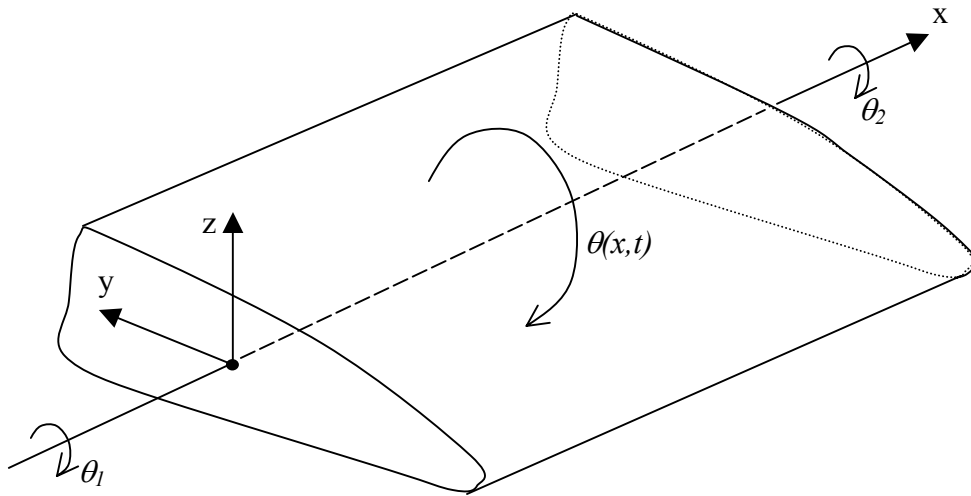


FIGURA 7. 5 – elemento de viga sofrendo torção.

A deformação rotacional ao longo do elemento de viga é dado pelos modos assumidos,

$$\theta(x, t) = \phi_1(x) \cdot q_1(t) + \phi_2(x) \cdot q_2(t) \quad (7.57)$$

De (Craig, 1981, seção 9.3) temos a seguinte equação diferencial,

$$GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad (7.58)$$

Visto que essa equação possui a mesma forma da equação de equilíbrio para a deformação longitudinal e dado que as funções de forma devem satisfazer as mesmas condições de contorno que no caso longitudinal, significa que podemos usar como funções de forma para o caso da torção as mesmas equações de forma usadas no caso longitudinal,

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 - x/l \\ \phi_2(x) &= x/l \end{aligned} \quad (7.59)$$

Similarmente temos, com adaptações para o caso da torção,

$$\kappa_{ij} = \int_0^l GJ \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx \quad (7.60)$$

$$m_{ij} = \int_0^l \rho \cdot I_p \cdot \phi_i \phi_j dx \quad (7.61)$$

$$Q_i = \int_0^l \tau(x, t) \cdot \phi_i(x) dx \quad (7.62)$$

onde $\tau(x,t)$ é o torque distribuído por unidade de comprimento. Inserindo (7.60) nas equações (7.60) e (7.61) temos:

$$\kappa = \left(\frac{GJ}{l}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.63)$$

$$M = \left(\frac{\rho I_p l}{6}\right) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7.64)$$

Finalmente, as equações do movimento desconsiderando a presença de torques externos:

$$M \cdot \ddot{\underline{q}} + \kappa \cdot \underline{q} = \underline{0} \quad (7.65)$$

$$\left(\frac{\rho I_p l}{6}\right) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \ddot{\underline{q}} + \left(\frac{GJ}{l}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.66)$$

Segundo Craig (1981), um tratamento completo sobre o deslocamento tridimensional de vigas e da dinâmica estruturas complexas é dado por J.S. Przemieniecki em “Theory of Matrix Structural Analysis” (McGraw Hill, New York, 1968).

7.4 DINÂMICA ENVOLVENDO TRELIÇAS - MÉTODO DO DESLOCAMENTO

Nas seções anteriores vimos que as matrizes de massa e elasticidade foram calculadas a partir de elementos de massa numa mesma base xyz. No caso de uma treliça freqüentemente existem membros que não estão alinhados com um eixo comum chamado “base de referência global” (XYZ), como no caso apresentado na Figura 7.6.

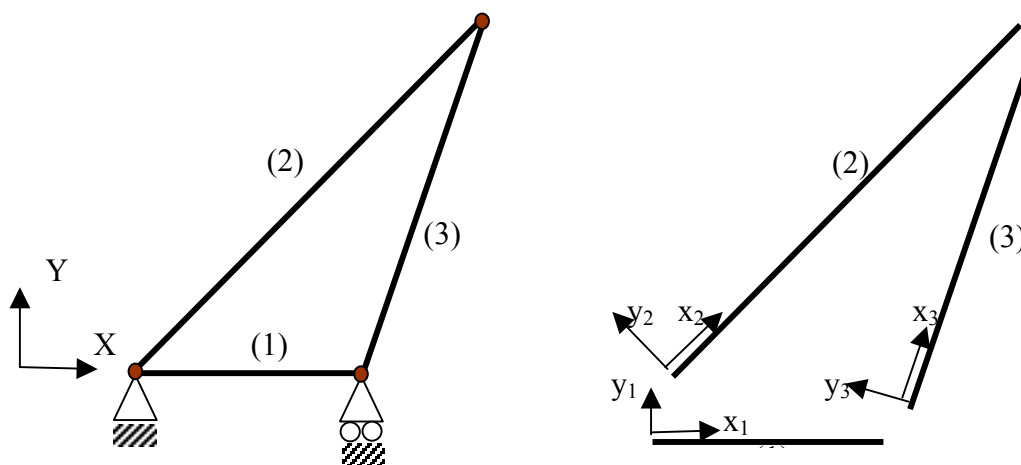


FIGURA 7.6 – sistema de eixos coordenados de uma treliça.

Na Figura 7.6 temos o elemento de viga sendo submetido a um deslocamento u_1 numa extremidade e a outro deslocamento u_2 em outra extremidade. A idéia aqui é transformar esses vetores de deslocamentos para a base global, i.e., reescrevendo-os no sistema de coordenadas da base global, como faremos a seguir. Na figura 7.7 o sistema global é XY , com versores $\hat{X}\hat{Y}$ e o sistema da viga é xy .

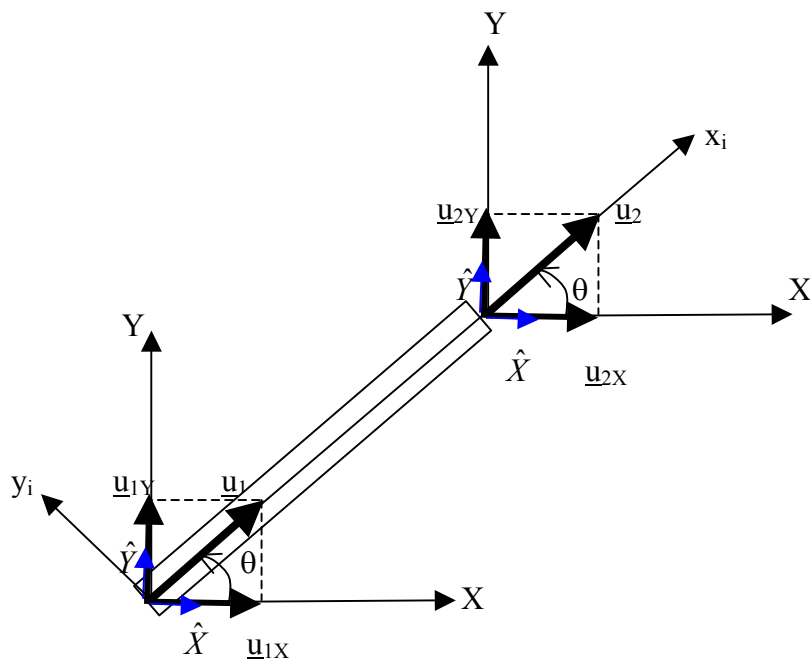


FIGURA 7.7– Decomposição dos deslocamentos longitudinais da viga em componentes do eixo global.

Assim, podemos reescrever o deslocamento u_1 nas coordenadas do sistema global,

$$\underline{u}_{1XY} = |\underline{u}_{1xy}| \cdot \cos(\theta) \cdot \hat{X} + |\underline{u}_{1xy}| \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \hat{Y} \quad (7.67)$$

Sendo o escalar $|\underline{u}_{1xy}|$ o valor do módulo do vetor deslocamento u_1 que originalmente estava na base xy .

Para simplificar a notação de (7.67) façamos,

$$\begin{aligned} \underline{u}_{1X} &= |\underline{u}_{1xy}| \cdot \hat{X} \\ \underline{u}_{1Y} &= |\underline{u}_{1xy}| \cdot \hat{Y} \end{aligned} \quad (7.68)$$

Logo, voltando à (7.67),

$$\underline{u}_{1XY} = \cos(\theta) \underline{u}_{1X} + \text{sen}(\theta) \underline{u}_{1Y} \quad (7.69)$$

Analogamente para u_2 :

$$\underline{u}_{2XY} = \cos(\theta)\underline{u}_{2X} + \text{sen}(\theta)\underline{u}_{2Y} \quad (7.70)$$

Essas equações podem ser combinadas na seguinte transformação linear,

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_{1XY} \\ \underline{u}_{2XY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\underline{u}_{1X} + \text{sen}(\theta)\underline{u}_{1Y} \\ \cos(\theta)\underline{u}_{2X} + \text{sen}(\theta)\underline{u}_{2Y} \end{pmatrix} \quad (7.71)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_{1XY} \\ \underline{u}_{2XY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_{1X} \\ \underline{u}_{1Y} \\ \underline{u}_{2X} \\ \underline{u}_{2Y} \end{pmatrix} \quad (7.72)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_{1XY} \\ \underline{u}_{2XY} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \underline{u}_{1X} \\ \underline{u}_{1Y} \\ \underline{u}_{2X} \\ \underline{u}_{2Y} \end{pmatrix} \quad (7.73)$$

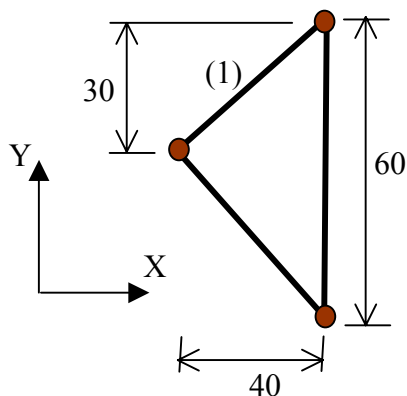
ou,

$$\underline{u} = T \cdot \underline{u}_i \quad (7.74)$$

Assim, a matriz de transformação é dada por:

$$T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{pmatrix} \quad (7.75)$$

Exemplo 5: (Craig, 1981) Seja treliça plana que contém apenas três barras. Calcule a matriz de transformação para o elemento (1).



Resposta:

$$\cos(\theta) = \frac{4}{5}$$

$$\sin(\theta) = \frac{3}{5}$$

$$T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Que é a matriz procurada.

Os cálculos das energias potencial elástica e cinética podem ser dados por:

$$U = \frac{1}{2} \underline{\dot{u}}^T \cdot \underline{\kappa} \cdot \underline{\dot{u}} \quad (7.76)$$

$$U = \frac{1}{2} \underline{\dot{u}}_i^T T^T \cdot \underline{\kappa} \cdot T \cdot \underline{\dot{u}}_i \quad (7.77)$$

$$T^T \cdot \underline{\kappa} \cdot T = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) & -\cos^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) \\ & \sin^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) & -\sin^2(\theta) \\ & & \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ sim. & & & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (7.78)$$

Analogamente para a energia cinética,

$$K = \frac{1}{2} \underline{\dot{u}}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\dot{u}} \quad (7.79)$$

$$K = \frac{1}{2} \underline{\dot{u}}_i^T T^T \cdot \underline{M} \cdot T \cdot \underline{\dot{u}}_i \quad (7.80)$$

Onde $T^T \cdot \underline{M} \cdot T$ é a matriz de massa transformada para o sistema global XY.

CAPÍTULO 8

CONTROLE ANALÓGICO DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

8.1 CONTROLE VIA REPRESENTAÇÃO EM VARIÁVEIS DE ESTADO MODAIS

Feita a modelagem matemática de uma estrutura física o próximo passo é desenvolver um a lei de controle para regular o seu comportamento. Um vetor de estados que inclua a dinâmica de atitude do corpo rígido bem como a dinâmica da parte estrutural flexível resulta na seguinte equação (Silva, 1997),

$$\begin{pmatrix} J & M_\theta^T \\ M_\theta^T & M \end{pmatrix} \ddot{\underline{x}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{Q} = B \underline{u} \quad (8.1)$$

$$\tilde{M} \ddot{\underline{x}} + \tilde{\kappa} \underline{x} = B \underline{u} \quad (8.2)$$

Sendo J uma matriz de inércia de dimensão 3, M a matriz de massa, κ a matriz de elasticidade, M_θ uma matriz de acoplamentos rígido-flexíveis e \underline{u} o vetor de sinais de controle.

Por “decomposição espectral”, os autovalores à direita e à esquerda são respectivamente,

$$(\tilde{\kappa} - \lambda_i \tilde{M}) \underline{\phi}_i = \underline{0} \quad (8.3)$$

$$\underline{\psi}_i^T (\tilde{\kappa} - \lambda_i \tilde{M}) = \underline{0}^T \quad (8.4)$$

Conforme está estabelecido na literatura emprega-se a matriz dos autovalores à direita $\Phi = [\underline{\phi}_1 : \underline{\phi}_2 : \underline{\phi}_3 : \dots : \underline{\phi}_n]$ como matriz de transformação de um espaço modal de estados para um espaço real (físico), tal como está mostrado abaixo:

$$\underline{X}(t) = \Phi \underline{\eta}(t) \quad (8.5)$$

Assim sendo, podemos montar a seguinte expressão:

$$I \ddot{\underline{\eta}} + \text{diag}(0, 0, 0, \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{n-1}^2) \underline{\eta} = \Phi^T b_c \underline{u} \quad (8.6)$$

Onde b_c é a matriz influência no controle e \underline{u} é o vetor de controle.

Se forças dissipativas forem introduzidas na estrutura teremos:

$$I\ddot{\underline{\eta}} + 2\zeta \cdot \text{diag}(0,0,0,\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{n-1})\dot{\underline{\eta}} + \text{diag}(0,0,0,\omega_1^2,\omega_2^2,\dots,\omega_{n-1}^2)\underline{\eta} = \Phi^T \cdot b_c \cdot \underline{u} \quad (8.7)$$

onde ζ é a razão de amortecimento.

Finalmente, a equação diferencial linear de estados é dada por:

$$\dot{\underline{X}}(t) = A \cdot \underline{X}(t) + B \cdot \underline{u} \quad (8.8)$$

onde o vetor de estados é dado por:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} \underline{\eta} \\ \dot{\underline{\eta}} \\ \underline{\eta} \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

onde $\underline{\eta}$ representa as rotações e os deslocamentos elásticos; e as matrizes A e B são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\text{diag}(0,0,0,\omega_1^2,\omega_2^2,\dots,\omega_{n-1}^2) & -2\zeta \cdot \text{diag}(0,0,0,\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^T \cdot b_c \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

Sendo a equação das saídas dada por:

$$\underline{Y} = C \cdot \underline{X} \quad (8.12)$$

$$\underline{Y} = C \cdot \Phi \cdot \underline{\eta} \quad (8.13)$$

8.2 CONTROLE LQR

O regulador linear quadrático gaussiano (LQR) fornece ao projeto de controle em malha-fechada excelentes margens de estabilidade. No teorema seguinte se encontra enunciado o método do LQR.

Teorema (*Regulador Linear Quadrático LQR*): dado o sistema dinâmico,

$$\dot{\underline{X}}(t) = A \cdot \underline{X}(t) + B \cdot \underline{u} \quad (8.14)$$

e

$$\underline{z}(t) = H \cdot \underline{X}(t) \quad (8.15)$$

Estabeleçamos o seguinte funcional quadrático como índice de desempenho:

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} (\underline{z}^T Q \underline{z} + \underline{u}^T R \underline{u}) dt \quad (8.16)$$

no qual a energia dos estados de interesse $\underline{z}(t)$ é ponderada de forma relativa à quantidade de energia de controle $\underline{u}(t)$ através das matrizes de “peso” ou “ponderação” Q e R.

Se podemos considerar:

1. (A, B) é “estabilizável” e (A, H) é “observável”.
2. $R = R^T > 0$
3. $Q = Q^T \geq 0$

Então,

1. O controlador LQR é o único controlador ótimo que minimiza o funcional $J_{LQR, H2}$ sujeito à restrição dinâmica imposta pela (8.14). A LEI DE CONTROLE por realimentação é dada então por,

$$\underline{u}(t) = -F_{LQR} \cdot \underline{X}(t) \quad (8.17)$$

onde,

$$F_{LQR} = R^{-1} B^T S_{LQR} \quad (8.18)$$

2. S_{LQR} é a única matriz simétrica e positiva-definida que resulta da equação algébrica de Riccati (“ARE”):

$$S_{LQR} \cdot A + A^T \cdot S_{LQR} + H^T \cdot Q \cdot H - S_{LQR} \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S_{LQR} = 0 \quad (8.19)$$

3. A dinâmica do sistema em malha-fechada é,

$$\dot{\underline{X}}(t) = [A - B \cdot F_{LQR}] \underline{X}(t) \quad (8.20)$$

4. O mínimo valor para o funcional J_{LQR} é,

$$\min J_{LQR} = \underline{x}_0^T S_{LQR} \underline{x}_0 \quad (8.21)$$

onde $\underline{x}_0 = \underline{x}(t=0)$. A prova do teorema se encontra em Valer (1999).

Infelizmente esses resultados são válidos apenas para o caso da realimentação total de estados, o que não ocorre em casos reais.

8.3 CONTROLE LQG: NORMA MÍNIMA H_2

Nos casos práticos nunca se consegue controlar todas as variáveis de estado envolvidas no processo. Assim, o diagrama mostrado na Figura 8.1 ilustra o caso em que “variáveis exógenas” de entrada \underline{u}_1 e saída \underline{y}_1 “escapam do controle” C.

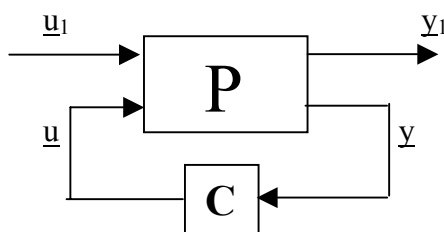


FIGURA 8.1– Diagrama em blocos de realimentação com a presença de “variáveis exógenas”.

FONTE: Valer (1999).

O objetivo aqui é encontrar um controlador analógico $C(s)$ que minimize a norma (“tamanho”) da função de transferência entre as variáveis exógenas, onde as relações entre tais variáveis exógenas e variáveis controláveis são dadas por,

$$\underline{y}_1(s) = T_{y_1 u_1} \underline{u}_1(s) \quad (8.22)$$

$$\underline{u}(s) = -C \underline{y}(s) \quad (8.23)$$

Sendo que a função de transferência do sistema é dada por,

$$G(s) = C \Phi(s) B \quad (8.24)$$

onde,

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (8.25)$$

O sistema completo do problema padrão LQR é dado por,

$$\begin{cases} \dot{\underline{X}}(t) = A\underline{X}(t) + B\underline{u}(t) + L\underline{\xi}(t) \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + \sqrt{\mu}I\underline{\eta}(t) \\ \underline{z}(t) = H\underline{x}(t) \end{cases} \quad (8.26)$$

onde z é o vetor de estados que é de fato regulado, ξ e η são ruídos brancos gaussianos não correlacionados e com intensidade unitária.

$$\begin{aligned} \underline{y}_1(s) &= \begin{pmatrix} \underline{z}(t) \\ \rho\underline{u}(t) \end{pmatrix} \\ \underline{u}_1(s) &= \begin{pmatrix} \underline{\xi}(t) \\ \underline{\eta}(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.27)$$

Assim temos que,

$$T_{y_1u_1}(s) = \begin{bmatrix} H\Phi L - H\Phi BC(I + GC)^{-1}C\Phi L & -\sqrt{\mu}H\Phi BC(I + GC)^{-1}C\Phi L \\ -\rho C(I + GC)^{-1}C\Phi L & \sqrt{\mu}\rho C(I + GC)^{-1} \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

Dado o funcional LQG,

$$J_{LQG} = \int_0^{\infty} (\underline{z}^T Q \underline{z} + \underline{u}^T R \underline{u}) dt \quad (8.29)$$

Usando $Q=I$ e $R=\rho^2 I$ teremos após uma aplicação do teorema de Parseval,

$$J_{LQG} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (\underline{y}_1^T \underline{y}_1) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (T_{y_1u_1} \underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1^H T_{y_1u_1}^H) d\omega \quad (8.30)$$

Sabe-se que $\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1^H = I$ por se tratar de um ruído branco. Assim, conclui-se que o problema do LQG se resume em encontrar o controlador C que minimize a norma,

$$J_{LQG} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (T_{y_1u_1} \cdot T_{y_1u_1}^H) d\omega = \|T_{y_1u_1}\|_2^2 \quad (8.31)$$

O problema é então,

$$\min J_{LQG} = \min \|T_{y_1u_1}\|_2^2 \quad (8.32)$$

Onde a norma 2 ao quadrado descreve a "energia" do sistema.

8.4 CONTROLE H₂

O Controle H₂ é uma generalização do LQG estabelecido pelo teorema desta seção. Antes vamos ver a “hipótese da planta aumentada”.

Dada a planta,

$$P := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (8.33)$$

As hipóteses da planta aumentada são as seguintes:

1. $D_{11} = 0$
2. $[A \ B_2]$ é estabilizável
3. $[A \ C_2]$ é detectável
4. a matriz $V = \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} \cdot [B_1^T \ D_{21}] \doteq \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} \\ V_{xy}^T & V_{yy} \end{bmatrix} \geq 0$ com $V_{yy} > 0$
5. a matriz $R = \begin{bmatrix} C_1^T \\ D_{12}^T \end{bmatrix} \cdot [C_1^T \ D_{12}] \doteq \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xu} \\ R_{xu}^T & R_{uu} \end{bmatrix} \geq 0$ com $R_{uu} > 0$

A hipótese 1 garante que distúrbios não interfiram nas variáveis de desempenho y_1 (condição necessária para controle H₂ mas desnecessária para H_∞). As hipóteses 2 e 3 são necessárias para garantir a existência de um controlador estabilizante e as hipóteses 4 e 5 são necessárias para permitir a existência de uma solução positiva-definida na equação de Riccati associada aos controladores ótimos.

Teorema (Controle H₂): sob as hipóteses anteriores o único controlador ótimo estabilizante que minimiza a norma H₂ é,

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A - B_2 F_2 - K_2 C_2 - K_2 D_{22} F_2 & K_2 \\ \hline -F_2 & 0 \end{array} \right] \quad (8.34)$$

onde,

$$\begin{aligned} F_2 &= R_{uu}^{-1} (R_{xu}^T + B_2^T X_2) \\ K_2 &= (Y_2 C_2^T + V_{xy}) V_{yy}^{-1} \end{aligned} \quad (8.35)$$

sendo X₂ e Y₂ as únicas soluções positivas-definidas das seguintes equações de Riccati,

$$\begin{aligned}
 X_2 A_r + A_l^T X_2 + R_{xx} - R_{xu} R_{uu}^{-1} R_{xu}^T - X_2 B_2 R_{uu}^{-1} B_2^T X_2 &= 0 \\
 A_e Y_2 + Y_2 A_e^T + V_{xx} - V_{xy} V_{yy}^{-1} V_{xy}^T - Y_2 C_2^T V_{yy}^{-1} C_2 Y_2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{8.36}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 A_r &= A - B_2 R_{uu}^{-1} R_{xu}^T \\
 A_e &= A - V_{xy} V_{yy}^{-1} C_2
 \end{aligned}
 \tag{8.37}$$

Uma característica do controlador H_2 é a sua simplicidade dado que a sua síntese se reduz à solução de duas equações desacopladas de Riccati. Na figura 14 podemos ver como é a estrutura do controle H_2 .

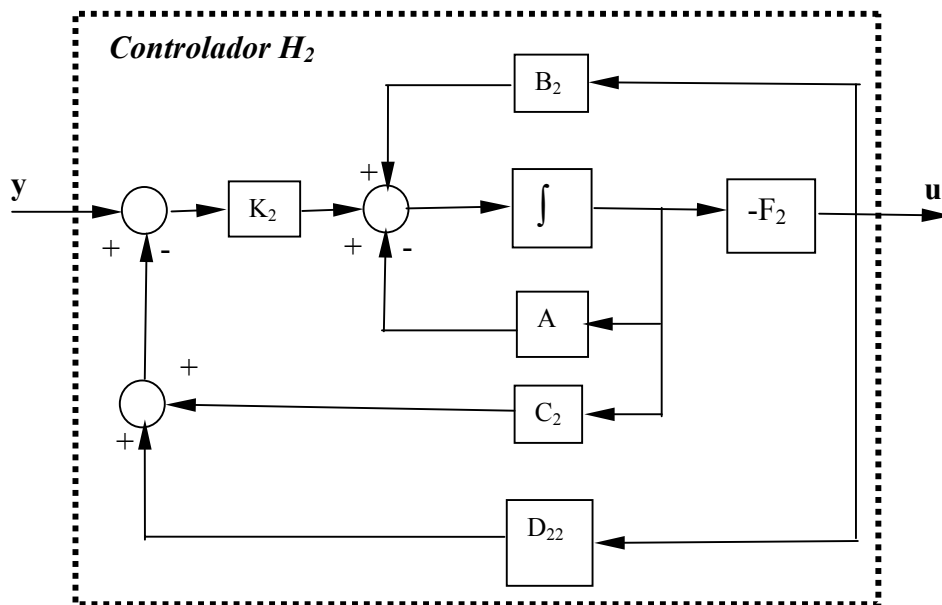


FIGURA 8.2 – Estrutura em blocos do Controlador H_2 .

8.5 CONTROLE H_∞

Sob as hipóteses anteriores:

Teorema (Controle H_∞): sob as hipóteses anteriores e que \underline{u}_1 possui norma L_2

($\int_{-\infty}^{\infty} \underline{u}_1^T(t) \underline{u}_1(t) dt < \infty$) um controlador estabilizante que satisfaz,

$$\|T_{y1u1}(j\omega)\|_\infty < \infty
 \tag{8.38}$$

é dado por:

$$C_\infty = \begin{bmatrix} A_\infty & Z_\infty L_\infty \\ -F_\infty & 0 \end{bmatrix} \quad (8.39)$$

onde,

$$A_\infty = A + (B_1 - L_\infty D_{21})W_\infty - B_2 F_\infty - Z_\infty L_\infty C_2 - Z_\infty L_\infty D_{22} F_\infty \quad (8.40)$$

$$F_\infty = R_{uu}^{-1} (R_{xu}^T + B_2^T X_\infty) \quad (8.41)$$

$$W_\infty = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T X_\infty \quad (8.42)$$

$$L_\infty = (Y_\infty C_2^T + V_{xy}) V_{yy}^{-1} \quad (8.43)$$

$$Z_\infty = \left(I - \frac{1}{\gamma^2} Y_\infty X_\infty \right)^{-1} \quad (8.44)$$

Sendo $Y_\infty X_\infty$ soluções das seguintes equações de Riccati,

$$\begin{aligned} X_\infty A_r + A_r^T X_\infty + R_{xx} - R_{xu} R_{uu}^{-1} R_{xu}^T - X_\infty \left(B_2 R_{uu}^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T \right) X_\infty &= 0 \\ A_e Y_\infty + Y_\infty A_e^T + V_{xx} - V_{xy} V_{yy}^{-1} V_{xy}^T - Y_\infty \left(C_2^T V_{yy}^{-1} C_2^T - \frac{1}{\gamma^2} C_1 C_1^T \right) Y_\infty &= 0 \end{aligned} \quad (8.45)$$

que satisfazem as condições adicionais,

1. $X_\infty \geq 0$
2. $A + B_1 W_\infty + B_2 F_\infty$ é assintoticamente estável
3. $Y_\infty \geq 0$
4. $A + L_\infty C_2 + \frac{1}{\gamma^2} Y_\infty C_1^T C_1$ é assintoticamente estável
5. $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ onde $\rho(\cdot) = \max_i |\lambda_i(\cdot)|$ é o RAIIO ESPECTRAL.

Na Figura 8.3 temos a estrutura em blocos do controle H_∞ .

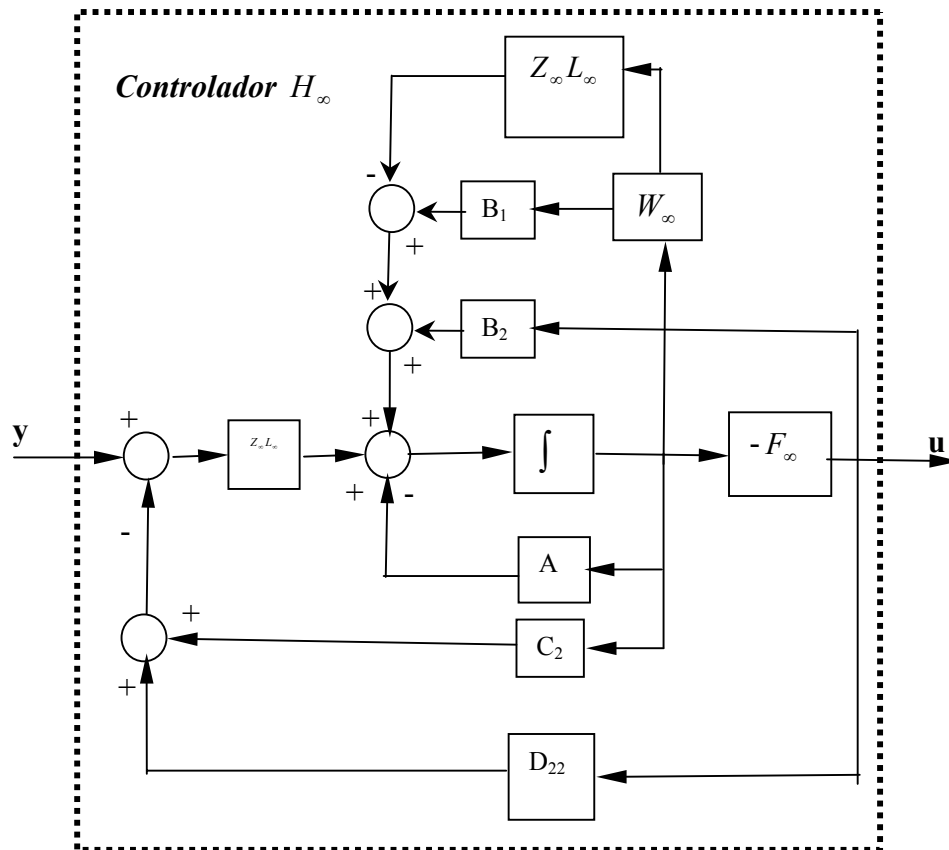


FIGURA 8.3– Estrutura em blocos do Controlador H_{∞} .

8.6 VANTAGENS E DESVANTAGENS DAS TÉCNICAS DE CONTROLE ABORDADAS

Tabela 1: vantagens e desvantagens das técnicas de controle abordadas.

	Vantagens	Desvantagens
Controle LQR	<ul style="list-style-type: none"> • margens de estabilidade garantidas • ganho do controlador é constante 	<ul style="list-style-type: none"> • precisa observar de todas as variáveis de estado • projeto do controlador pode resultar iterativo
Controle LQG	<ul style="list-style-type: none"> • ruídos são parâmetros livres no projeto 	<ul style="list-style-type: none"> • margens de estabilidade não são garantidas • projeto do controlador pode resultar iterativo
Controle LQR/LTR	<ul style="list-style-type: none"> • margens de estabilidade garantidas • procedimento sistemático e simples 	<ul style="list-style-type: none"> • alto ganho do compensador • para sistemas de fase mínima e limitado em sistemas de fase não mínima • focalizado nas clássicas margens de estabilidade • projeto do controlador pode resultar iterativo
Controle H_2	<ul style="list-style-type: none"> • leva em conta robustez na estabilidade e sensibilidade • permite dar forma de maneira aproximada às funções de transferência do sistema 	<ul style="list-style-type: none"> • projeto do controlador pode resultar iterativo
Controle H_{∞}	<ul style="list-style-type: none"> • leva em conta robustez na estabilidade e na sensibilidade • permite dar forma de maneira exata às funções de transferência do sistema • procedimento de um passo 	<ul style="list-style-type: none"> • requer especial atenção para a robustez frente as incertezas estruturadas

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bryson, A.E. **Control of Spacecraft and Aircraft**. Princeton University Press, 1994.
- Craig, R.R. **Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods**. John Wiley & Sons, 1981.
- D'azzo, J.J.; Houpis, C.H. **Linear Control System Analysis and Design**. McGraw-Hill, 1981.
- Greenwood, D.T. **Principles of Dynamics**. Prentice-Hall, 1965.
- Inman, D.J. **Engineering Vibration**. Prentice Hall, 1996.
- Junkins, J.L.; Kim, Y. **Dynamics and Control of Flexible Structures**. AIAA, 1993.
- Leite, R.C.C.; Castro, A.R.B. **Física do Estado Sólido**. Edgard Blucher Ltda., 1978.
- Meirovitch, L. **Methods of Analytical Dynamics**. McGraw-Hill, 1970.
- Meirovitch, L. **Computational Methods in Structural Dynamics**. Sijhoff & Noordhoff, 1980.
- Oden, J.T. **Applied Functional Analysis: a First Course for Students of Mechanics and Engineering Science**. Prentice-Hall, 1979.
- Silva, A.R. **Estudo do Sistema de Controle de um Satélite Artificial Durante a Fase de Transferência Orbital e Apontamento**. Dissertação de Mestrado. INPE, São José dos Campos, 1997.
- Valer, C.E.I. **Uma Introdução ao Controle Robusto com Aplicações a Estruturas Flexíveis**. Dissertação de Mestrado. PUC, Rio de Janeiro, 1999.