



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-13074-PUD/174

BIFURCAÇÕES ELEMENTARES

Marcelo Ricardo Alves da Costa Tredinnick

Exame de Qualificação de Doutorado (primeiro tema) do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais, orientado pelo Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza, aprovado em 24 de maio de 2005.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Professores Marcelo Lopes de Oliveira e Souza, Mário Cezar Ricci e Leonardo De-Olivé Ferreira pelos ensinamentos a respeito de Teoria das Bifurcações e aos demais membros da banca desse Exame de Qualificação de Doutorado pelas valiosas observações e comentários feitos: Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza e Dr. Gilberto da Cunha Trivelato.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo dar exemplos gráficos das mais conhecidas bifurcações, fazendo uso de campos vetoriais, tais como a sela-nó, transcítica, histerese, *pitchfork* (tridente), e fornecendo informações sobre a superfície conhecida como dobra. Busca-se com o presente trabalho fornecer uma compreensão geométrica das bifurcações de forma objetiva e complementadora ao estudo da teoria das bifurcações.

ELEMENTARY BIFURCATIONS

ABSTRACT

This work aims to give graphical examples of the most familiar bifurcations, making use of vectorial fields, as saddle-node, transcritical, hysteresis, pitchfork, and given some information about a surface known as fold. This work aims to give a geometrical comprehension of the bifurcations in a form objective and complementary to the study of theory of bifurcations.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	
CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO.....	18
CAPÍTULO 2 CASO SEM BIFURCAÇÃO	21
CAPÍTULO 3 BIFURCAÇÃO SELA-NÓ	24
CAPÍTULO 4 BIFURCAÇÃO TRANSCRÍTICA	27
CAPÍTULO 5 BIFURCAÇÃO HISTERESE	30
CAPÍTULO 6 BIFURCAÇÃO TRIDENTE (PITCHFORK)	
6.1.BIFURCAÇÃO TRIDENTE (<i>PITCHFORK</i>) SUPERCRÍTICA	32
6.2.BIFURCAÇÃO TRIDENTE (<i>PITCHFORK</i>) SUBCRÍTICA	33
CAPÍTULO 7 DOBRA (FOLD).....	36
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	42

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1- Superfície $\dot{x} = c - x$	21
FIGURA 2.2 - Diagrama de bifurcação para $\dot{x} = c - x$	22
FIGURA 3.1 – SUPERFÍCIE $\dot{x} = c + x^2$	24
FIGURA 3.2 - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO PARA $\dot{x} = c + x^2$	25
FIGURA 4.1 - SUPERFÍCIE $\dot{x} = cx + x^2$	27
FIGURA 4.2 - Diagrama de Bifurcação para $\dot{x} = cx + x^2$	28
FIGURA 4.3 - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO PARA O LASER.	28
FIGURA 5.1 - SUPERFÍCIE $\dot{x} = c + x - x^3$	30
FIGURA 5.2 – DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO PARA $\dot{x} = c + x - x^3$	30
FIGURA 6.1 - SUPERFÍCIE TRIDENTE SUPERCRÍTICA $\dot{x} = dx - x^3$	32
FIGURA 6.2 - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO PARA $\dot{x} = dx - x^3$..	33
FIGURA 6.3 - SUPERFÍCIE TRIDENTE SUBCRÍTICA $\dot{x} = dx + x^3$	33
FIGURA 6.4 - DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO PARA $\dot{x} = dx + x^3$..	34
FIGURA 6.5 - <i>SCRIPT</i> MATLAB.....	34
FIGURA 7.1 - REPRESENTAÇÃO TRIDIMENSIONAL DA DOBRA (“FOLD”), FUNÇÃO DE X, D E C, COM SUA PROJEÇÃO CÚSPIDE NO PLANO C,D	36
FIGURA 7.2 - A BIFURCAÇÃO “ <i>PITCHFORK</i> ” SUPERCRÍTICA OBTIDA DA DOBRA	37
FIGURA 7.3 - A BIFURCAÇÃO SELA-NÓ SUPERCRÍTICA OBTIDA DA DOBRA....	37
FIGURA 7.4 - A BIFURCAÇÃO HISTERESE OBTIDA DA DOBRA.....	38
FIGURA 7.5 - <i>SCRIPT</i> MATLAB DA DOBRA.....	39
FIGURA 7.6 - CÚSPIDE $4d^3 = 27c^2$	40

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Bifurcações elementares é o estudo do comportamento de um sistema mediante a variação de parâmetros. A Teoria da bifurcação é o estudo das possíveis alterações na estrutura das soluções de uma equação diferencial que depende de parâmetros reais. Fica simples de ver a orientação do campo vetorial X se analisarmos a derivada (taxa de variação temporal) \dot{X} como uma função de superfície. Aonde $\dot{X} < 0$ implica dizer que o campo vetorial X está no sentido do decréscimo de X . Aonde $\dot{X} > 0$ implica dizer que o campo vetorial X está no sentido do crescimento de X . Assim sendo analisaremos alguns casos.

CAPÍTULO 2

CASO SEM BIFURCAÇÃO: $\dot{x} = c - x = F(c, x)$, $c \in R$

Esta superfície está mostrada na figura 1. Daí fica fácil verificar que o lugar geométrico dos pontos de equilíbrio reúne apenas pontos de equilíbrio estáveis, dado que o campo vetorial x converge para tal lugar (reta $c-x=0$). Na figura 2.1 temos então o “Diagrama de Bifurcações” para $\dot{x} = c - x$. Para esse caso especial não há bifurcação alguma encontrada.

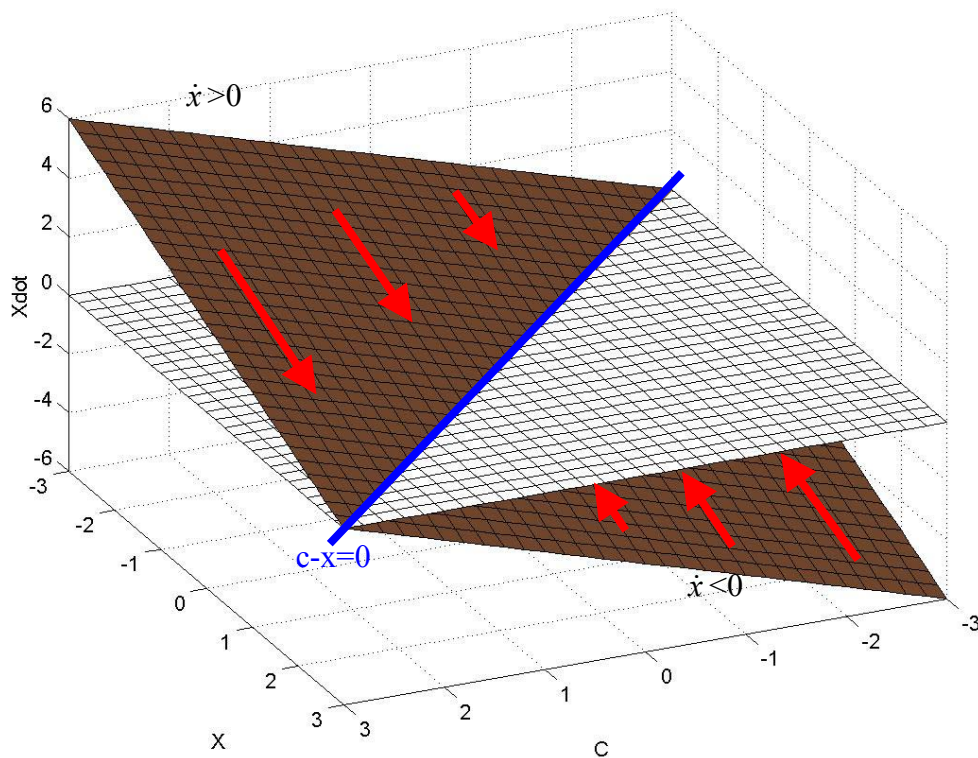


FIGURA 2.1 - Superfície $\dot{x} = c - x$.

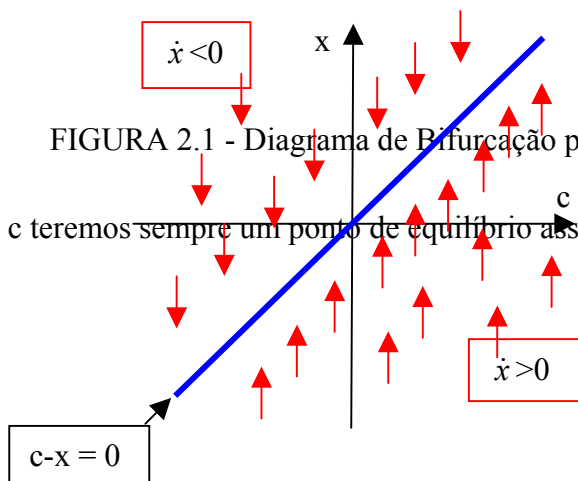


FIGURA 2.1 - Diagrama de Bifurcação para $\dot{x} = c - x$.

Para todos os valores de c teremos sempre um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

CAPÍTULO 3

BIFURCAÇÃO SELA-NÓ: $\dot{x} = c + x^2 = F(c, x)$

Neste caso c é um parâmetro e $c \in \mathbb{R}$. Esta superfície está mostrada na figura 3. Esta superfície está mostrada na figura 2.3.

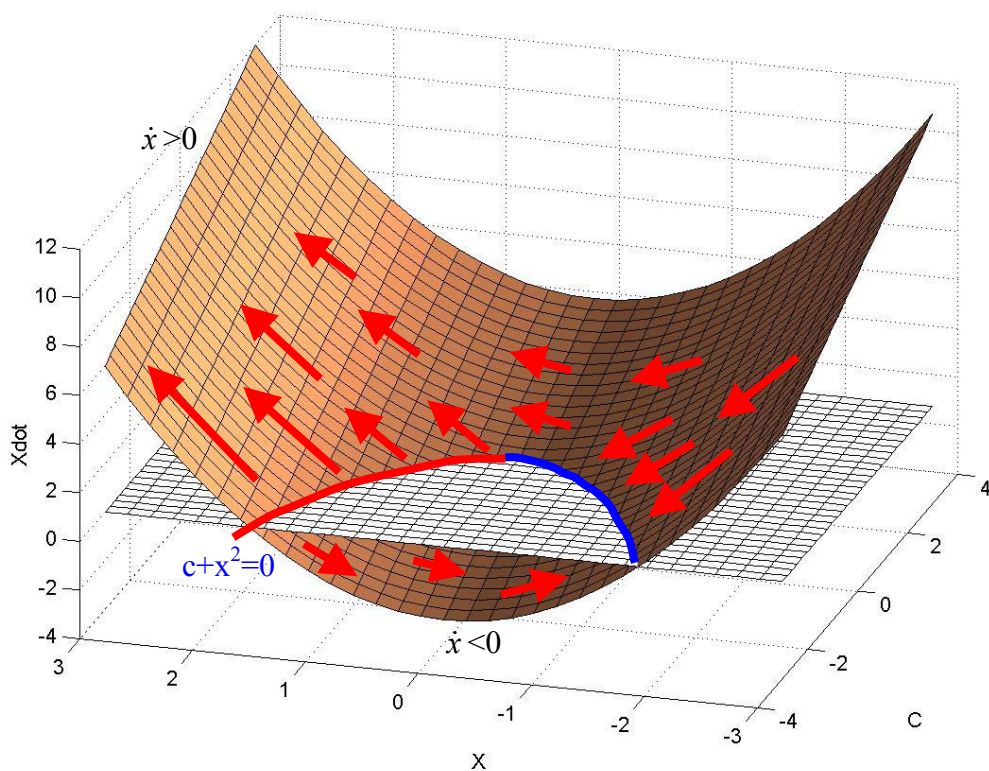


FIGURA 3.1 - Superfície $\dot{x} = c + x^2$.

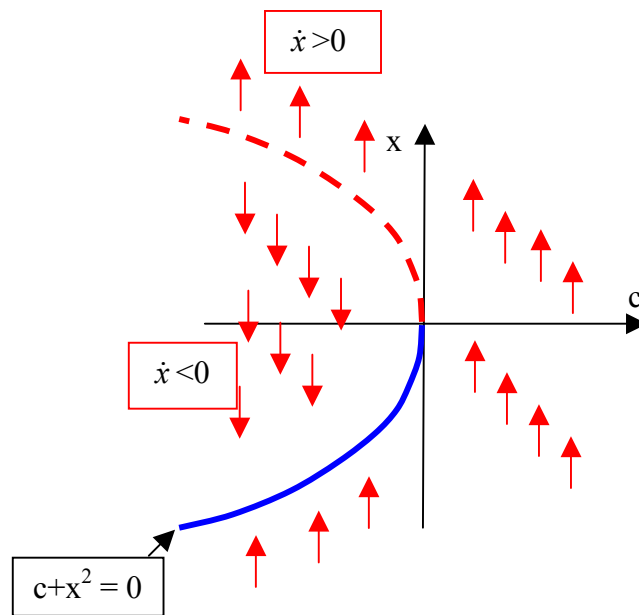


FIGURA 3.2 – Diagrama de Bifurcação para $\dot{x} = c + x^2$.

Pontos de equilíbrio:

$$\begin{aligned} F(c, \bar{x}) &= 0 \\ c + \bar{x}^2 &= 0 \\ \bar{x} &= \pm\sqrt{-c} \end{aligned}$$

Para $c > 0$ não temos pontos de equilíbrio e para $c < 0$ temos dois pontos de equilíbrio. Há um ponto de bifurcação em $c = 0$, onde ocorreu uma alteração qualitativa na dinâmica. Ponto de Bifurcação: “todo ponto no espaço (x, c) correspondendo a um campo vetorial estruturalmente instável” (Thompson, 1986). São importantes algumas definições para compreendermos o alcance dessa afirmativa:

Definição 1: *Topologia.* Seja X um conjunto não-vazio. Uma classe \mathfrak{S} de subconjuntos de X é dita ser uma topologia em X se e somente se,

- i) X e \emptyset pertencem a \mathfrak{S} ;
- ii) A união de qualquer número de membros de \mathfrak{S} pertencem a \mathfrak{S} ;
- iii) A interseção de qualquer número de membros de \mathfrak{S} pertence a \mathfrak{S} .

Definição 2: *Estabilidade Estrutural.* Um sistema é dito ser estruturalmente estável se a topologia do seu diagrama de fase não se altera mediante uma pequena perturbação no campo vetorial. A Estabilidade Estrutural estabelece a robustez de um único ponto no espaço do campo vetorial do diagrama de fase enquanto que a Estabilidade no Sentido de Liapunov

está relacionada com a robustez de uma órbita (trajetória) no diagrama de fase frente a perturbações nas condições iniciais do sistema.

Definição 3: Estabilidade no sentido de Liapunov. uma trajetória $x(t)$ é dita ser assintoticamente estável se existe uma vizinhança V de $x(t_0)$ tal que $x_{0p} \in V \Rightarrow d[x^*(t), x_p(t)] \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, sendo x_p a trajetória perturbada calculada a partir de x_{0p} .

CAPÍTULO 4

BIFURCAÇÃO TRANSCRÍTICA: $\dot{x} = cx + x^2 = F(c, x)$, $c \in \mathbb{R}$

Esse tipo de bifurcação tem aplicação na física dos LASERS.

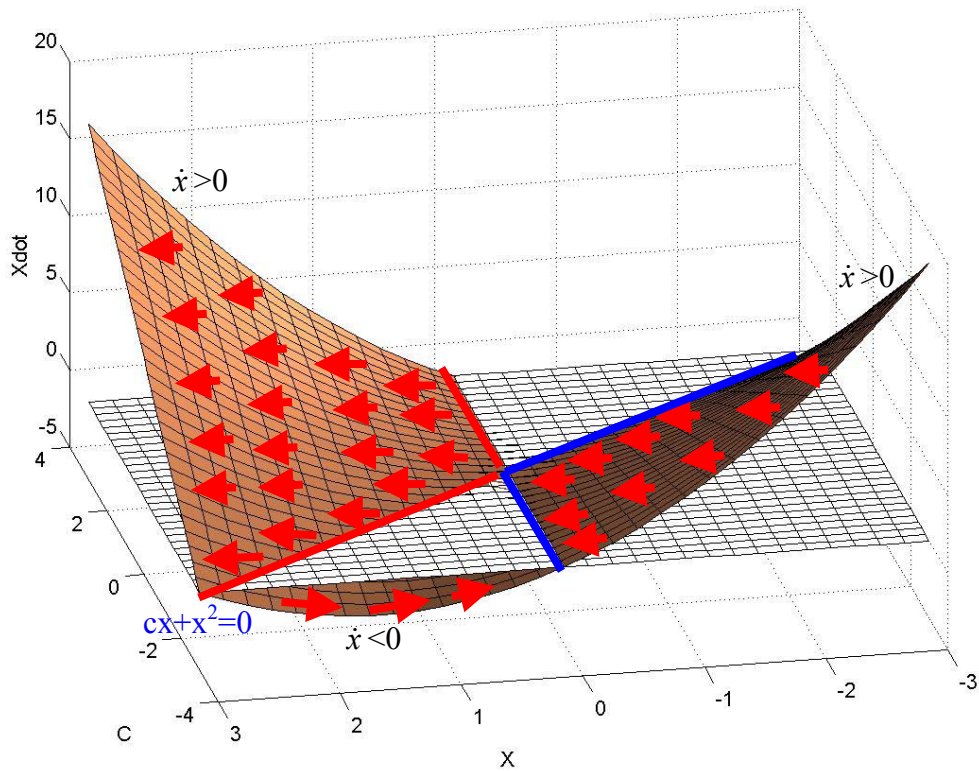


FIGURA 4.1 - Superfície $\dot{x} = cx + x^2$.

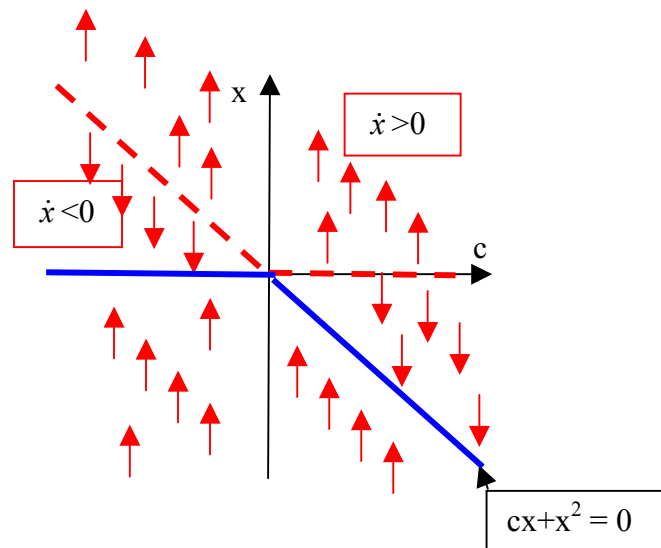


FIGURA 4.2 - Diagrama de Bifurcação para $\dot{x} = cx + x^2$.

O estudo do LASER pode ser considerado um caso especial de aplicação da bifurcação transcítica. Seja x o número de fótons coerentes no LASER e a sua taxa de variação dada por:

$$\frac{dx}{dt} = (\mu - a)x - bx^2 \tag{1.1}$$

Onde μ , a e b são parâmetros físicos. Não ocorre emissão estimulada enquanto: $\mu < a$. O diagrama de bifurcação para o LASER é o mostrado na Figura 4.3.

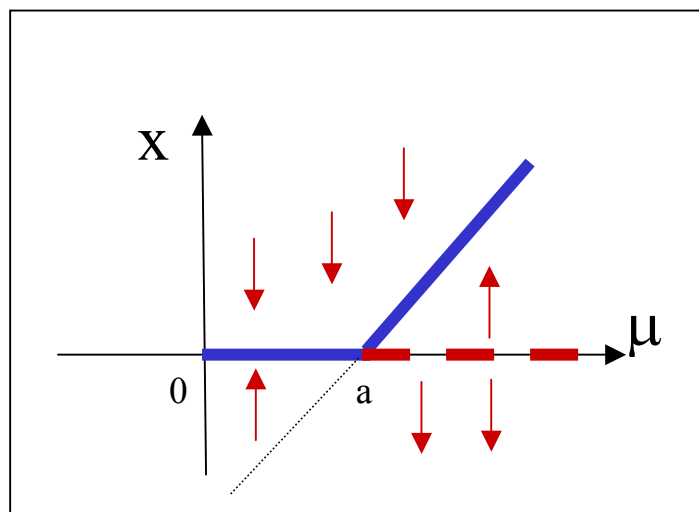


FIGURA 4.3 - Diagrama de Bifurcação para o LASER.

CAPÍTULO 5

BIFURCAÇÃO HISTERESE: $\dot{x} = c + x - x^3 = F(c, x)$, $c \in \mathbb{R}$

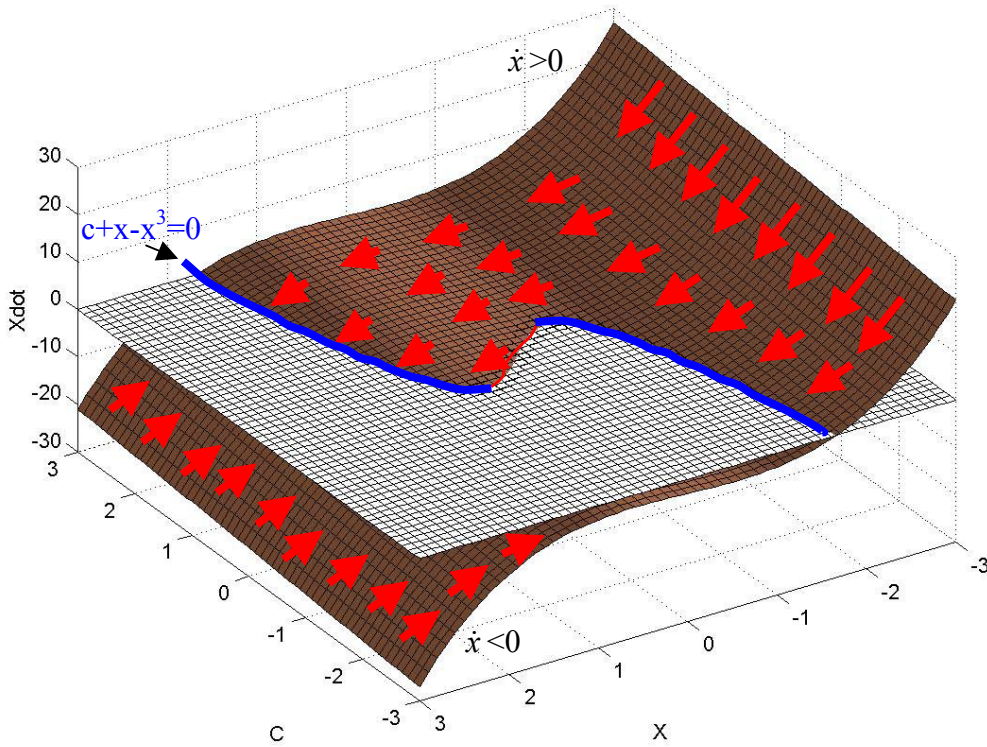


FIGURA 5.1 - Superfície $\dot{x} = c + x - x^3$.

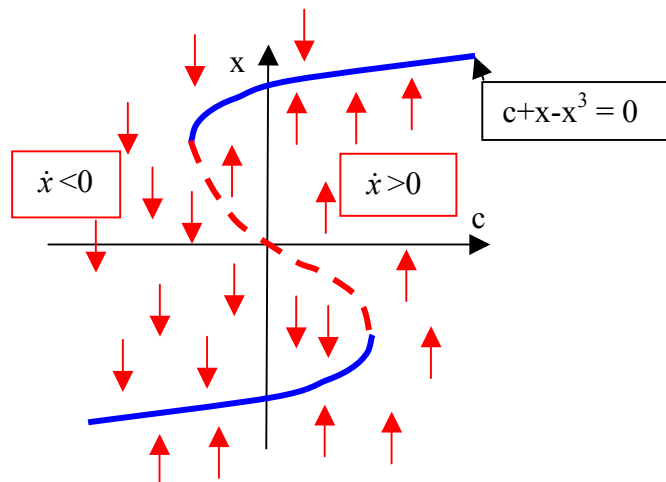


FIGURA 5.2 - Diagrama de Bifurcação para $\dot{x} = c + x - x^3$.

CAPÍTULO 6

6.1. BIFURCAÇÃO TRIDENTE (*PITCHFORK*) SUPERCRÍTICA

$$\dot{x} = dx - x^3$$

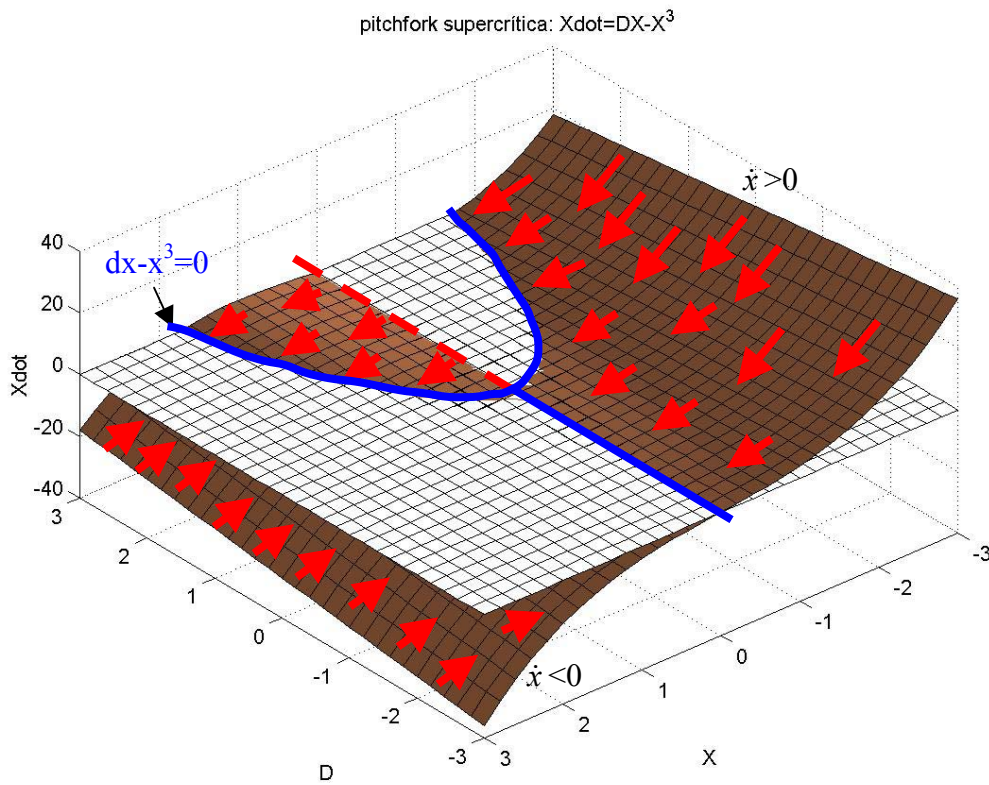


FIGURA 6.1 - Superfície tridente supercrítica $\dot{x} = dx - x^3$.

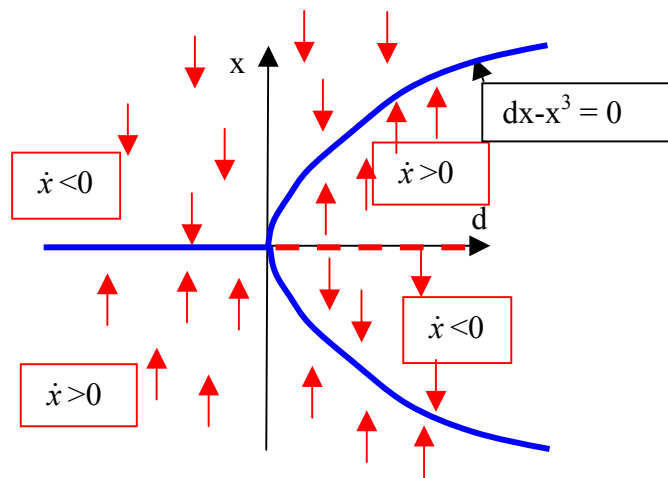


FIGURA 6.2 - Diagrama de Bifurcação para $\dot{x} = dx - x^3$.

6.2. BIFURCAÇÃO TRIDENTE (*PITCHFORK*) SUBCRÍTICA

$$\dot{x} = dx + x^3$$

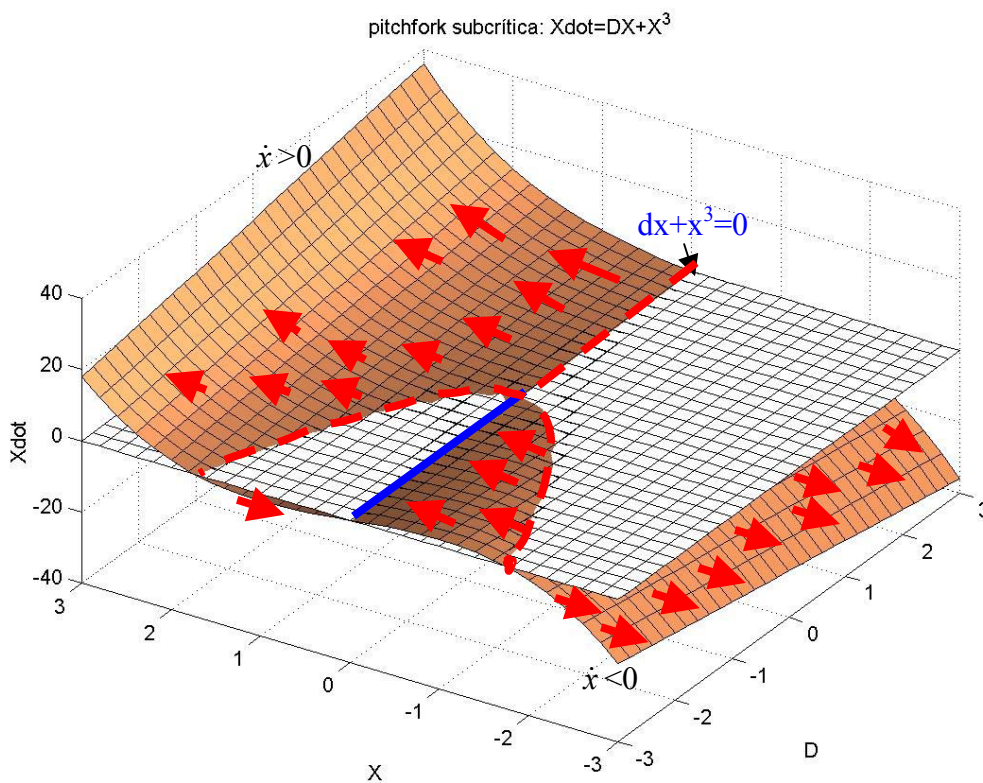


FIGURA 6.3 - Superfície tridente subcrítica $\dot{x} = dx + x^3$.

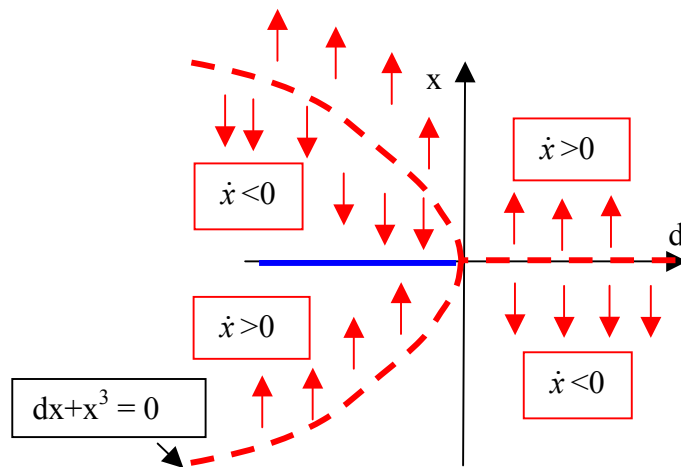


FIGURA 6.4 - Diagrama de Bifurcação para $\dot{x} = dx + x^3$.

O *script* em MatLab desenvolvido especialmente para gerar essas superfícies está apresentado na Figura 6.5.

```

clf;
[C,X] = meshgrid(-3:.1:3, -3:.1:3);
Z = C+X-X.^3;%Z=Xdot
figure(1);
surfl(C,X,Z);
hold on;
[e,f]=size(Z);Z1=zeros(e);
mesh(C,X,Z1);
xlabel('C'); ylabel('X'); zlabel('Xdot');
shading faceted;
colormap(copper)

```

FIGURA 6.5 – *script* Matlab.

CAPÍTULO 7 DOBRA (FOLD)

$$\dot{x} = c + dx - x^3$$

Aqui os parâmetros $c, d \in \mathbb{R}$. Na Figura 7.1 está representada a dobra ou “fold”.

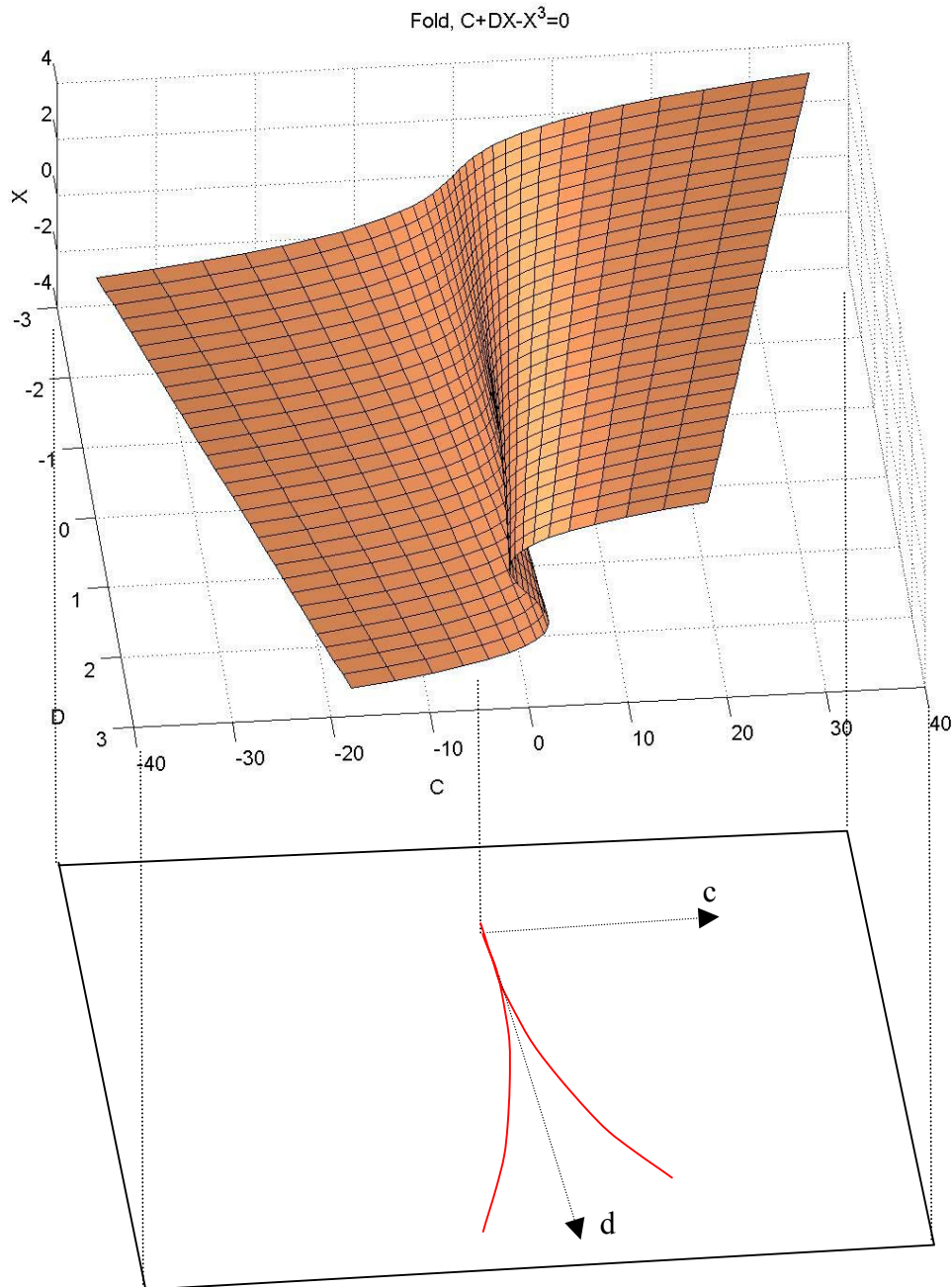


FIGURA 7.1 – Representação tridimensional da dobra (“fold”), função de x , D e C , com sua projeção cúspide no plano c, d .

A interseção da Dobra com o plano $C=0$: dá a bifurcação “*pitchfork*” supercrítica como vemos na figura 7.2.

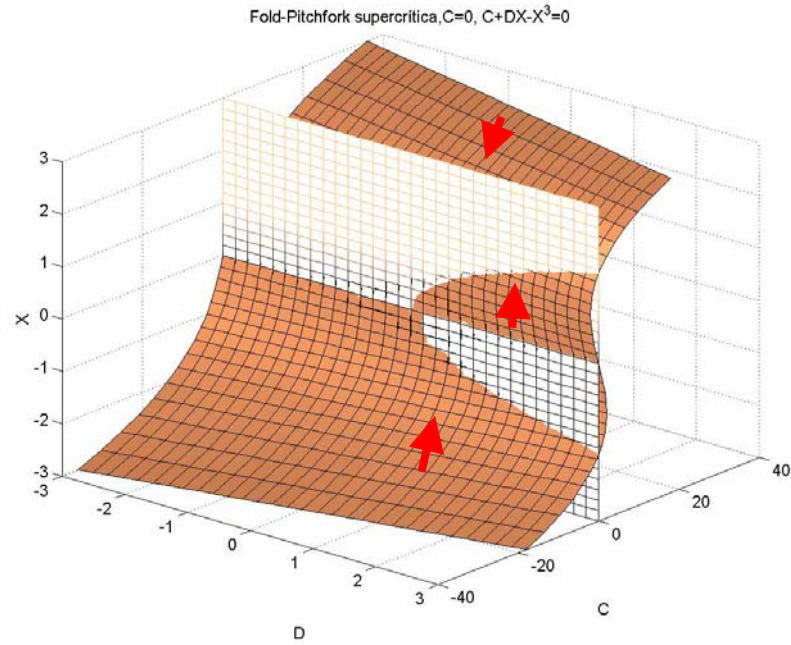


FIGURA 7.2 – a bifurcação “*pitchfork*” supercrítica obtida da dobra.

Para o caso em que $C=1$ temos uma bifurcação sela-nó supercrítica como apresentado na Figura 7.3.

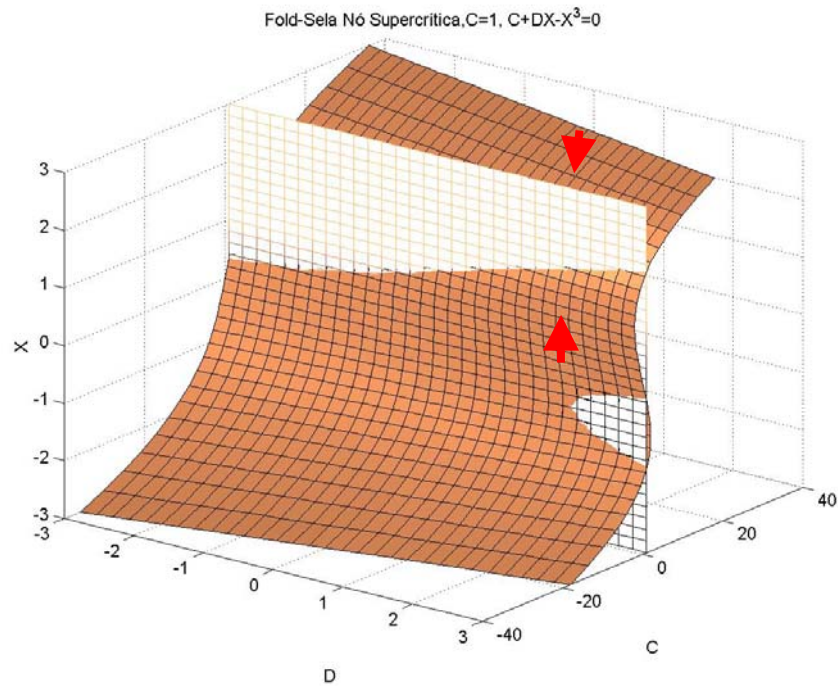


FIGURA 7.3 – a bifurcação sela-nó supercrítica obtida da dobra.

Para o caso em que $D=c^{te}$ temos uma bifurcação histerese como apresentado na Figura 7.4.

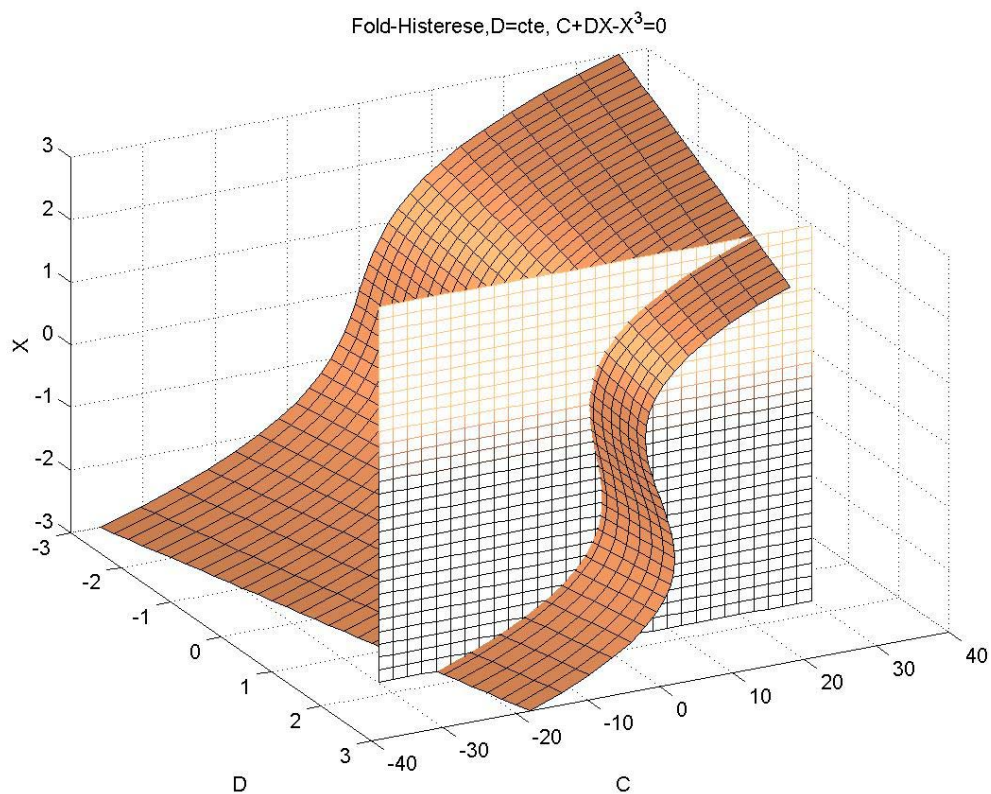


FIGURA 7.4 – a bifurcação histerese obtida da dobra.

Script MatLab desenvolvido especialmente para gerar a dobra e suas variantes:

```
clf;
[D,X] = meshgrid(-3:.2:3, -3:.2:3);
C = X.^3-D.*X;
figure(1);
mesh(D,C,X);
hold on;
surfl(D,C,X);
[e,f]=size(C);Z1=ones(e);
mesh(D*1,Z1*(1),X*1);
xlabel('D'); ylabel('C'); zlabel('X');
shading faceted;
colormap(copper)
title('Fold-Sela Nó Supercrítica,C=1, C+DX-X^3=0')
```

FIGURA 7.5 – script Matlab da dobra.

Calculemos a equação da projeção cúspide. Sabe-se que as bifurcações ocorrem quando,

$$F(c,d,x) = 0 \tag{7.2}$$

e

$$\frac{\partial F(c,d,x)}{\partial x} = 0 \tag{7.3}$$

Daí, de (7.1) e (7.2) temos,

$$c + dx - x^3 = 0 \tag{7.4}$$

$$d - 3x^2 = 0 \tag{7.5}$$

Juntando (7.3) com (7.4) no intuito de eliminar o x teremos a equação da cúspide,

$$4d^3 = 27c^2 \tag{7.6}$$

O respectivo gráfico de (7.5) está representado na Figura 7.6.

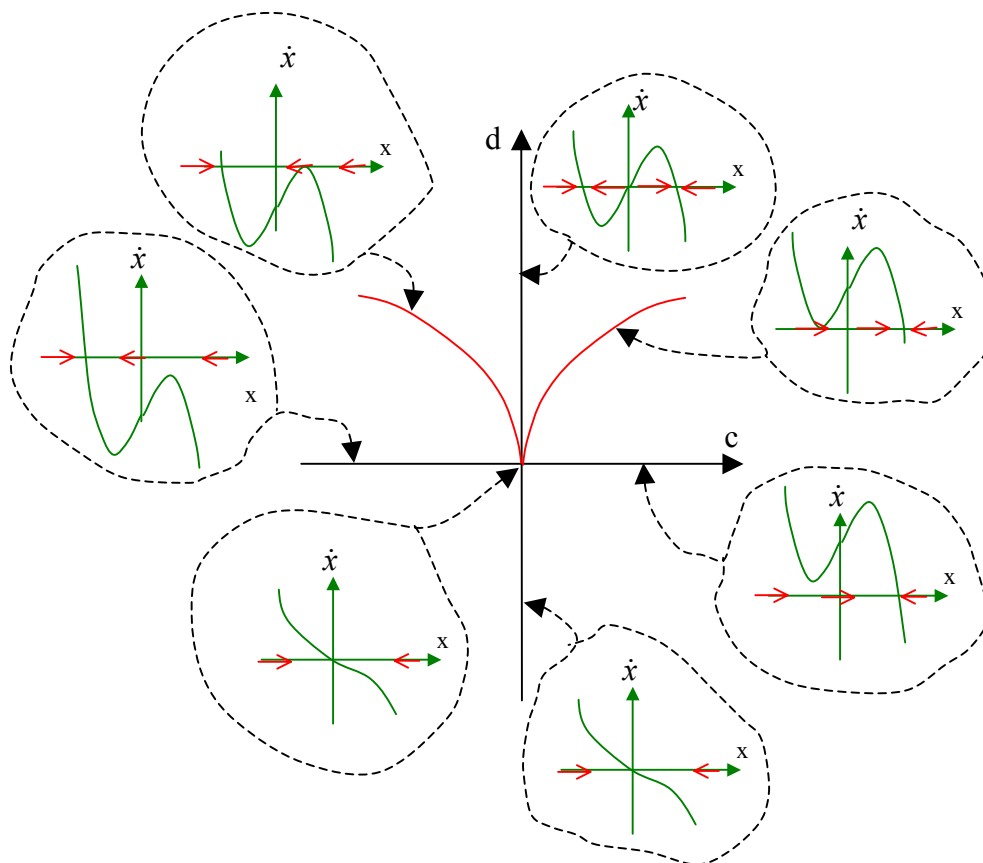


FIGURA 7.6 – cúspide $4d^3 = 27c^2$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Koçak, H.; Hale, J. **Dynamics and Bifurcations**. Springer-Verlag, 1991. 566p.

Thompson, J.M.T.; Stewart, H.B. **Nonlinear Dynamics and Chaos – Geometrical Methods for Engineers and Scientists**. John Wiley, 1991. 376p.

Kaplan, W. **Ordinary Differential Equations**. Addison-Wesley, 1967. 534p.

Notas de aula de **Teoria Geométrica das Equações Diferenciais Ordinárias**. INPE. Professores: Marcelo L. O. Souza, Mário C. Ricci, Leonardo O. Ferreira. São José dos Campos, 1999.

Software Matlab 6.5. The Mathworks.

