

APLICAÇÃO DE RELAXAÇÃO LAGRANGEANA E DO ALGORITMO GENÉTICO CONSTRUTIVO NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA PROBABILÍSTICO DE LOCALIZAÇÃO-ALOCAÇÃO DE MÁXIMA COBERTURA

Francisco de Assis Corrêa

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
São José dos Campos – SP, Brasil
fcorrea@directnet.com.br

Luiz Antonio Nogueira Lorena

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
São José dos Campos – SP, Brasil
lorena@lac.inpe.br

Resumo

O problema de localização de máxima cobertura (MCLP) procura localizar facilidades de forma a maximizar a população atendida considerando uma dada distância ou tempo padrão de serviço. Várias extensões desse modelo têm sido propostas para aumentar a sua aplicabilidade. Dentre elas, existem modelos probabilísticos para localização-alocação de máxima cobertura com restrições no tempo de espera ou no comprimento da fila para sistemas congestionados, considerando um ou vários servidores por facilidade. A proposta deste trabalho é a de resolver um modelo para um servidor por facilidade por meio da relaxação Lagrangeana e do Algoritmo Genético Construtivo. Os resultados dos testes obtidos nessas abordagens são apresentados e comparados.

Palavras-Chaves: Problemas de Localização; Máxima Cobertura; Relaxação Lagrangeana; Algoritmo Genético Construtivo.

Abstract

The Maximal Covering Location Problem (MCLP) maximizes the population that has a facility within a maximum travel distance or time. Numerous extensions have been proposed to enhance its applicability, like probabilistic model for the maximum covering location-allocation with constraint in waiting time or queue length for congested systems, with one or more servers per service center. In this paper we present two solution procedures for that probabilistic model, considering one server per center, using Lagrangian relaxation and Constructive Genetic Algorithm. The results of extensive tests on the solution procedures are presented.

Keywords: Location Problems; Maximal Covering; Lagrangian Relaxation; Constructive Genetic Algorithm.

1. INTRODUÇÃO

O Problema de Localização de Máxima Cobertura (MCLP) tem sido consideravelmente tratado na literatura desde a sua formulação feita por Church e ReVelle (1974) [1]. Esse problema busca obter a configuração para localizar facilidades que atenda o maior número de indivíduos de uma população, considerando uma dada distância ou tempo padrão do ponto de demanda. Uma considerável revisão desse tema pode ser encontrada em

Hale e Moberg (2003) [7], Serra e Marianov (2004) [20] e Galvão (2004) [5]. Não se busca com este modelo atender toda a população, porém, o máximo de atendimento considerando os recursos disponíveis. Vários modelos aplicados a uma grande faixa de problemas são extensões dessa formulação.

Em muitos casos, essa distância (ou tempo) entre pontos de demanda e a facilidade com a qual eles estão sendo alocados são considerados para a tratar a qualidade dos serviços que são prestados a usuários. Entretanto, quando se projeta uma rede de serviços, como sistemas de saúde, bancários ou de vendas de bilhetes distribuídos, a localização dos centros tem uma forte influência no congestionamento de cada um, e, conseqüentemente, na qualidade de seus serviços. Deste modo, além de a sua localização permitir que os usuários cheguem ao centro em um tempo aceitável, deve-se cuidar também que o tempo de espera para atendimento seja o menor possível, ou que a quantidade de pessoas na fila seja mínima, uma vez que estes são parâmetros importantes na medida da qualidade desejada [13].

O congestionamento é um fator que está intimamente ligado à qualidade de serviços prestados por um determinado sistema, tais como saúde, bancário e postal. A localização desses centros deve ser tal que o tempo (distância) de deslocamento do usuário seja aceitável e, uma vez dentro do sistema, o usuário deve permanecer em espera por atendimento o menor tempo possível. O congestionamento ocorre quando um centro não é capaz de atender, simultaneamente, a todas as solicitações de serviços que lhe são feitas. Normalmente, os modelos tradicionais que tratam desse problema adicionam uma restrição de capacidade que força a demanda por serviço (normalmente constante no tempo e igual a uma média) ser menor do que a máxima capacidade do centro. Essa abordagem não considera a natureza dinâmica do congestionamento e trata o problema de forma determinística. Isso faz com que o modelo, dependendo de como a restrição seja obtida, tenha servidores ociosos ou não tenha a capacidade de atender todas as demandas [13] [14].

Os modelos tradicionais de otimização assumem que as demandas por serviços são constantes no tempo e restritas a serem menores que a capacidade de um centro. Isso gera uma contradição, porque existe uma rigorosa restrição que é aplicada a uma média, que é excedida 50% das vezes. Marianov e Serra (1998) [13] propuseram modelos baseados no fato de que o número de solicitações de serviços não é constante no tempo, mas um processo estocástico, cuja estocasticidade de demanda é explicitamente considerada no trato das restrições de capacidade, que, ao invés de limitar o máximo da capacidade do centro, define um limite mínimo para a qualidade dos seus serviços. Essa qualidade é refletida nos itens de tempo de espera ou quantidade de pessoas que aguardam por um atendimento.

Os modelos propostos por esses pesquisadores tratam de localizar uma certa quantidade de postos de saúde, com um ou vários servidores em cada, de modo que a população, à uma distância padrão do centro, seja servida adequadamente, isto é, que ninguém fique na fila por um período maior que um dado tempo limite ou não a encontre com mais de um certo número de outros clientes, com uma probabilidade maior ou igual α , definida a priori. Foram considerados os sistemas de fila M/M/1 e M/M/m [11], em que a taxa de chegada no centro j segue a distribuição de Poisson com taxa λ_j e o tempo de serviço no centro j é exponencialmente distribuído com taxa μ_j , para, respectivamente, um ou vários servidores.

O modelo de localização-Alocação de máxima cobertura considerado neste artigo foi denominado por Marianov e Serra (1998) [13] por “The Queueing Maximal Covering Location-Allocation Model (QM-CLAM)” e foi definido como:

“Localizar p centros e alocar usuários de forma a maximizar a população coberta, onde a cobertura é definida como: a população coberta é alocada a um centro dentro de um tempo ou distância padrão de sua residência (ponto de demanda) e se um usuário é coberto, na sua chegada ao centro, ele vai esperar em uma fila com no máximo b outras pessoas ou será atendido no tempo τ , com probabilidade, no mínimo, α_f .”

O propósito deste artigo é o de examinar o Problema de Localização-Alocação de

Máxima Cobertura Probabilístico proposto por Marianov e Serra (1998) [13], para um servidor por centro, e apresentar outras duas soluções: a primeira, por meio da relaxação Lagrangeana e a segunda, usando o Algoritmo Genético Construtivo (AGC). O próximo capítulo descreve os modelos originais propostos. O capítulo 3 apresenta a solução usando a relaxação Lagrangeana e AGC. O capítulo 4 mostra os resultados computacionais e o capítulo 5, as conclusões.

2. MODELO QM-CLAM

O modelo tradicional de Maximum Covering Location Problem (MCLP) proposto por Church e ReVelle (1974) [1] não pode ser usado para tratar as restrições de congestionamento, pois não contém variáveis de alocação, o que impede de computar as solicitações de serviços que chegam a um centro, e, conseqüentemente, de determinar quando ocorre um congestionamento.

A modelagem matemática proposta para o QM-CLAM foi escrita como um modelo tipo p-mediana, modificado para comportar as variáveis de localização e alocação, tendo como objetivo maximizar a população coberta, considerando uma determinada quantidade de centros de atendimento. Formalmente, as alocações são representadas pelas variáveis binárias x_{ij} , tal que $i \in I$ e $j \in N_i$, onde I é o conjunto dos pontos de demanda a serem alocados e N_i é o conjunto de localizações candidatas que estão dentro de uma distância padrão do nó i . $[x_{ij}]$ é a matriz de alocações, com $x_{ij} = 1$, se o ponto de demanda i for alocado ao centro j , $x_{ij} = 0$, caso contrário. As localizações são representadas pelas variáveis binárias y_j , com $y_j = 1$, se o centro j for selecionado, $y_j = 0$, caso contrário. O parâmetro a_i define a população total no ponto de demanda i . Todo ponto de demanda é um potencial centro de atendimento. O QM-CLAM possui a formulação descrita abaixo:

Problema QM-CLAM

$$\text{Max} \quad \sum_{i,j} a_i x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a} \quad x_{ij} \leq y_j \quad \forall i, j \quad (2)$$

$$\sum_j x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \quad (3)$$

$$P[\text{centro } j \text{ ter } \leq b \text{ pessoas na fila}] \geq \alpha \quad \forall j \quad (4)$$

$$P[\text{tempo de espera no centro } j \leq \tau] \geq \alpha \quad \forall j \quad (4a)$$

$$\sum_i y_i = p \quad (5)$$

$$y_j, x_{ij} = 0,1 \quad j \in N_i \quad \forall i, j \quad (6)$$

A função objetivo (1) maximiza a população alocada a um centro. As restrições (2) definem que somente é possível alocar um ponto de demanda i a um centro j se houver um centro em j . As restrições (3) impõem que cada ponto de demanda seja alocado a, no máximo, um centro. Usam-se as restrições (4) ou (4a) para, respectivamente, tratar de quantidade de pessoas na fila ou o tempo de espera. As primeiras, restrições (4), forçam que cada centro tenha no máximo b pessoas na fila, com a probabilidade, no mínimo, α_f . As segundas, restrições (4a), determinam que o tempo de espera na fila em cada centro seja, no máximo, τ , com a probabilidade, no mínimo, α_f . A restrição (5) define a quantidade de centros a serem abertos. As restrições (6) definem as condições de integralidade.

Para escrever a restrição (4) em uma forma tratável, assume-se que as solicitações de serviços de cada nó de demanda i acontecem de acordo com um processo de Poisson com taxa f_i . A taxa λ_j atribuída a um centro é definida como uma superposição de processos de Poisson:

$$\lambda_j = \sum_{i \in I} f_i x_{ij}$$

o que significa que se a variável x_{ij} for 1, o nó i será alocado ao centro j , e a sua correspondente taxa f_i será incluída no cálculo de λ_j .

Assume-se também que o tempo de serviço tem uma distribuição exponencial, com a média μ_j , onde $\mu_j \geq \lambda_j$, de forma a manter o equilíbrio do sistema.

Utilizando-se as equações definidas para um sistema de filas M/M/1 [21] e definindo o estado k como o número de usuários no sistema (sendo atendido e na fila), o diagrama de transição de estados é mostrado na figura 1.

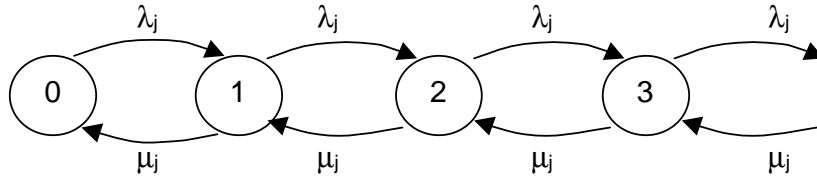


Figura 1 – Diagrama de transição de estados

A partir do sistema M/M/1, obtém-se a equação (7), que trata do máximo número de pessoas no sistema, equivalente à restrição (4), cujo desenvolvimento pode ser visto em Marianov e Serra (1998) [13].

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq \mu_j^{b+2} \sqrt{1 - \alpha_f} \quad (7)$$

Da mesma referência, a restrição (4a), que trata do tempo máximo de espera por atendimento, é convertida na equação (8).

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq \mu_j + \frac{1}{\tau} \ln(1 - \alpha_f) \quad (7a)$$

Com isto, pode-se obter a formulação final para o modelo desejado:

Problema QM-CLAM

$$v(\text{QM-CLAM}) = \text{Max} \sum_{i,j} a_i x_{ij} \quad (1)$$

Sujeito a

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall ij \quad (2)$$

$$\sum x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq \mu_j^{b+2} \sqrt{1 - \alpha_f} \quad \forall j, \text{ (para a quantidade de pessoas na fila)} \quad (7)$$

$$\text{ou} \sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq \mu_j + \frac{1}{\tau} \ln(1 - \alpha_f) \quad \forall j, \text{ (para o tempo de espera)} \quad (7a)$$

$$\sum_i y_i = p \quad (5)$$

$$y_j, x_{ij} = 0,1, \quad j \in N_i \quad \forall i, j \quad (6)$$

O lado direito das equações 7 e 7a são valores constantes, calculados para μ_j , α_f , b e

τ , definidos a priori, onde μ_j é o tempo de serviço no centro j , b é a quantidade máxima de pessoas na fila, τ é o tempo máximo de espera na fila e α_f é a probabilidade de encontrar, no máximo, b pessoas na fila ou de esperar, no máximo, um tempo τ para ser atendido. Para efeito de simplificação serão substituídos, respectivamente, por $K_{\mu b \alpha_f}$ e por $K_{\mu \tau \alpha_f}$.

O problema QM-CLAM pertence à classe dos problemas NP-Completo [19]. *Softwares* comerciais podem resolver algumas pequenas instâncias desse problema. Entretanto, o tempo de computação se torna inviável para problemas de tamanhos razoáveis. Por isso, buscam-se soluções alternativas eficientes para formulações desse tipo. No próximo capítulo duas abordagens são apresentadas: uma baseada na aplicação da relaxação Lagrangeana com o algoritmo de otimização por subgradientes, e outra, por meio do Algoritmo Genético Construtivo.

3. SOLUÇÕES PROPOSTAS

3.1. RELAXAÇÃO LAGRANGEANA

A relaxação Lagrangeana tem sido aplicada na solução de vários problemas de otimização combinatória, incluindo o problema do caixeiro viajante, problemas de localização, o problema de atribuição generalizado, de recobrimento e particionamento de conjuntos e problemas de roteamento [3]. Essa relaxação é obtida multiplicando um conjunto de restrições por um vetor λ de multiplicadores de Lagrange, adicionando-se o produto à função objetivo. O desenvolvimento dessa relaxação para o Problema de Localização de Máxima Cobertura pode ser visto em Daskin (1995) [2]. Para o problema (QM-CLAM), relaxando as restrições (3), tem-se:

$$V(L_\lambda \text{QM-CLAM}) = \text{Max} \sum_i \sum_j a_i x_{ij} - \sum_i \lambda_i \left(\sum_j x_{ij} - 1 \right), \text{ que desenvolvido, obtém-se:}$$

Problema L_λ QM-CLAM:

$$V(L_\lambda \text{QM-CLAM}) = \text{Max} \sum_i \sum_j (a_i - \lambda_i) x_{ij} + \sum_i \lambda_i$$

Sujeito a (2), (5), (6) e (7) ou (7a).

Considerando implicitamente a restrição (5), o problema (L_λ QM-CLAM) pode ser resolvido decompondo-o em m problemas da mochila 0-1 [12] [19]. As restrições (2) podem ser incorporadas nas restrições de capacidade (7) e (7a) [16], ficando:

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq K_{\mu b \alpha_f} y_j \quad \forall j, \quad (9)$$

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq K_{\mu \tau \alpha_f} y_j \quad \forall j \quad (9a)$$

Assim, o problema original pode ser reescrito com um conjunto de subproblemas:

Para $j = 1, 2, \dots, |I|$,

$$v(\text{Knap}^j) = \text{Max} \sum_{i \in I} (a_i - \lambda_i) x_{ij} \quad (8)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq K_{\mu b \alpha_f} \quad \forall j, \quad (9)$$

$$\text{ou} \quad \sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq K_{\mu \tau \alpha_f} \quad \forall j \quad (9a)$$

$$x_{ij} = 0,1, \quad j \in N_i \quad \forall i, j \quad (10)$$

Cada problema é resolvido usando o código Horowitz e Sahni [15]. Esse código ofereceu bons resultados, embora tenha sido desenvolvido para problemas inteiros de mochila.

Seja J o conjunto dos p maiores $v(\text{Knap}^j)$, $j \in I$. O valor da relaxação Lagrangeana é dado por:

$$v(\text{L}_\lambda \text{QM-CLAM}) = \sum_{j \in J} v(\text{Knap}^j) + \sum_{i \in I} \lambda_i$$

A otimização do dual Lagrangeano é obtida por meio do algoritmo de subgradientes [12] [19]. Dado um vetor de multiplicadores $(\lambda)^0$, a seqüência de multiplicadores é obtida por:

$$\lambda^{k+1} = \text{Max}\left(0, \lambda^k + \theta_k \left(\sum x_{ij}^\lambda - 1\right)\right),$$

onde x^λ é a solução ótima do problema $\text{L}_\lambda \text{QM-CLAM}$ com multiplicadores $(\lambda)^k$ e θ_k é um escalar positivo definido por:

$$\theta = \frac{\pi(v(\text{QM-CLAM}) - \text{lb})}{\left\| \sum x_{ij}^\lambda - 1 \right\|^2},$$

onde $v(\text{QM-CLAM})$ é o melhor valor do limitante superior, lb é o melhor valor do limitante inferior (solução viável de QM-CLAM) e π é o parâmetro de controle definido por Held e Karp (1970) [8]. O valor de π inicial é 2 e é dividido à metade se o valor de $v(\text{QM-CLAM})$ não diminuir por 30 iterações sucessivas.

Os critérios de parada mais utilizados na literatura e aplicados na resolução dos problemas deste artigo são:

- a) $\pi \leq 0,0005$
- b) $v(\text{QM-CLAM}) - \text{lb} < 1$
- c) $\left\| \sum x_{ij}^\lambda - 1 \right\|^2 = 0$
- d) Quantidade de iterações = 500.

As soluções x^λ obtidas não são necessariamente viáveis, porém o conjunto J indica as facilidades que podem ser usadas para se obter soluções viáveis. Essas soluções primais foram obtidas por meio do algoritmo MTHG, de Martello e Toth (1990) [15], e melhoradas pelo algoritmo descrito em Pereira e Lorena (2001) [18]. O melhor valor viável a cada iteração do método subgradientes é usado em θ como lb .

3.2. ALGORITMO GENÉTICO CONSTRUTIVO

O algoritmo genético foi concebido por Holland, em 1960, e aperfeiçoado nas décadas de 1960 e 1970, por ele próprio e por seus colegas da Universidade de Michigan. Vários refinamentos do método surgiram nas décadas seguintes. Alguns deles e informações básicas podem ser vistas em Goldberg (1989) [6] e em Lacerda (1999) [10].

O Algoritmo Genético Construtivo (AGC) [4] trabalha com uma população inicial composta por esquemas, isto é, uma população de soluções candidatas parciais ou incompletas, que servirão de base para a construção de uma população com soluções melhores completas (chamadas estruturas), ao longo do processo evolutivo. O AGC possui os operadores tradicionais de seleção, cruzamento e mutação, e difere dos algoritmos tradicionais na forma de avaliar os esquemas (avaliação-fg), no tratamento de uma população de tamanho variável e na possibilidade de usar heurísticas para definir a função de avaliação da aptidão dos indivíduos [17].

A avaliação-*fg* trata de uma dupla avaliação de cada indivíduo S_k e, no caso da maximização, o valor de f reflete a função objetivo, e o valor de g é calculado a partir de uma heurística tal que $g(S_k) \geq f(S_k)$. Essa avaliação é aplicada da mesma forma para qualquer tipo de indivíduo S_k , assim considerados os esquemas e estruturas.

Um problema a ser modelado em ACG deve ser tratado como um problema de otimização bi-objetivo (PBO):

$$\begin{cases} \min & \{g(S_k) - f(S_k)\} \\ \max & \{f(S_k)\} \\ \text{Sujeito a} & g(S_k) \geq f(S_k) \end{cases}$$

Para qualquer problema de otimização, o PBO é formulado da mesma forma: maximizar a função objetivo e minimizar o intervalo ($f-g$). O processo evolutivo considera um limiar de rejeição adaptativo que contempla ambos os objetivos do PBO, que é calculado a partir de um ranking δ atribuído a cada indivíduo da população, dado pela fórmula:

$$\delta = \frac{d \cdot G_{\max} - [g(S_k) - f(S_k)]}{d \cdot [G_{\max} - g(S_k)]}$$

onde $d \in [0, 1]$ e G_{\max} é um limitante superior, cujo valor é 10% acima da soma da população de todos os pontos de demanda.

É definido, ainda, o parâmetro α , que está relacionado com o tempo de evolução da população e serve para eliminar os indivíduos mal adaptados ($\delta(S_k) \leq \alpha$). Considerando-se que os bons esquemas precisam ser preservados para serem recombinados, α é iniciado com o valor 0 (zero) e é lentamente incrementado, de geração em geração.

Desde que são criados, os esquemas e estruturas recebem os seus correspondentes valores de ranking (δ), que são comparados com o parâmetro α . Todo indivíduo com $\delta(S_k) \leq \alpha$ é considerado mal adaptado e é eliminado da população. Conseqüentemente, os indivíduos com maiores δ são os melhores em relação ao PBO, sobrevivem por mais gerações e se reproduzem mais. Com isso, a população no tempo de evolução α (P_α) possui tamanho dinâmico de acordo com o valor de α , podendo ser esvaziada durante o processo. Sempre o melhor indivíduo de cada geração é guardado e define a melhor solução encontrada.

O operador de seleção escolhe duas estruturas para o cruzamento. A primeira, denominada base, é obtida dos 20% melhores indivíduos da população. A segunda, denominada guia, é selecionada na população total. O operador de cruzamento compara essas duas estruturas em posições correspondentes, gerando uma nova estrutura filha. Na implementação do AGC, foram utilizados os operadores de seleção e de cruzamento sugeridos em Furtado (1998) [4] para o problema das p -medianas. O operador de mutação faz uma troca de um centro com um vizinho que não tem a sua demanda atendida por alguém. Isso aumenta a chance de todos os pontos de demanda serem centros.

As restrições apresentadas na formulação do problema foram tratadas na avaliação da função objetivo ou na própria definição do indivíduo, que utiliza o dígito 1 para o vértice que representa um centro (no máximo p centros), 2 para o vértice que representa um ponto de demanda e 3 para o vértice curinga. Este último é um ponto ainda não definido para o problema, que poderá tornar-se um centro ou um ponto de demanda durante a evolução do processo. A figura 2 mostra um possível indivíduo para um problema com quatro centros e trinta nós.

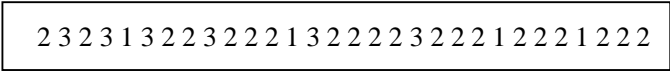


Figura 2 – Possível indivíduo para um problema com quatro centros e trinta nós

4. EXPERIÊNCIA COMPUTACIONAL

A heurística Lagrangena e o AGC foram testados na rede de 30 vértices, fornecida em Marianov e Serra (1998) [13], e em uma de 324 vértices, obtidos de uma base de dados geográficos da cidade de São José dos Campos-SP, acrescida da população fictícia em cada ponto de demanda. Esta última está disponível em <http://www.lac.inpe.br/~lorena/instancias.html>. Vários problemas foram montados, variando-se os parâmetros p , b , μ , α_f e τ . Os resultados dessas duas abordagens foram comparados aos obtidos pelo uso do *software* comercial CPLEX 7.5 [9]. Os valores apresentados no artigo de Marianov e Serra (1998) [13] foram obtidos pelo uso do mesmo *software* comercial, porém na versão 3.0. A nova versão, 7.5, mostrou melhores resultados.

Para a implementação do problema de máxima cobertura, os centros de serviços foram considerados postos de saúde, com um médico em cada centro. Cada ponto de demanda é um potencial centro de atendimento e as distâncias são euclidianas. Para os problemas com 30 pontos foram considerados: raio de cobertura igual a 1,5 milhas, tempo de atendimento igual a 20 min; taxa de chamada igual a 0,015 x população do ponto de demanda para as restrições do comprimento da fila e 0,006 x população do ponto de demanda para as restrições do tempo de espera na fila. Para os problemas com 324 pontos considerou-se: raio de cobertura igual a 250m, tempo de atendimento igual a 15 min; taxa de chamada igual a 0,010 x população do ponto de demanda, tanto para as restrições do comprimento da fila, como para as restrições do tempo de espera.

As tabelas 1 e 2 mostram os resultados obtidos na avaliação da função objetivo por todos os métodos. Os valores de *Gap Cplex* e *Gap Lag* iguais a zero definem que o valor ótimo foi obtido para o respectivo método. Esses valores são calculados por: $100 * (\text{Limite Superior} - \text{Limite Inferior}) / (\text{Limite Inferior})$, e fornece, em porcentagem, o *gap* entre esses limitantes.

Os nomes dos problemas foram codificados do seguinte modo: quantidade de pontos, quantidade de centros, tipo de restrição (0 para a quantidade de pessoas na fila e 1 para o tempo de espera), quantidade de pessoas na fila ou tempo de espera, e probabilidade. Exemplo: 324_20_0_2_95, que significa 324 pontos, 20 centros, restrição para a quantidade de pessoas na fila, máximo de 2 pessoas na fila com probabilidade, no mínimo, de 95%.

Os problemas com 324 pontos foram resolvidos em um computador Pentium IV 3GHz com 1GB RAM, e os de 30 pontos, em uma máquina Pentium III 800MHz com 384 MB RAM. Os programas para o acionamento do CPLEX e para a relaxação Lagrangena foram codificados em C++ e o AGC, em Object Pascal.

As soluções encontradas para o AGC são uma média de 05 (cinco) execuções. O tempo para a obtenção das soluções do CPLEX foi limitado em 2 horas (7200s). Os valores do campo “Desvio” refletem o erro relativo da solução média do AGC em relação à melhor solução primal encontrada e é calculada pela fórmula:

$$\text{Desvio} = \frac{(\text{Max}(\text{SoluçãoCplex}, \text{Lb da relaxação Lagrangeana}) - \text{Solução média do AGC})}{\text{Max}(\text{SoluçãoCplex}, \text{Lb da relaxação Lagrangeana})}$$

Portanto, os valores negativos do desvio indicam que a solução média do AGC foi melhor do que as demais.

A tabela 1 compara os métodos utilizados em 24 problemas em uma rede de 324 pontos. As colunas são divididas em quatro classes: o nome do problema, a solução do CPLEX, a solução da relaxação Lagrangena e a do AGC. Na coluna referente ao CPLEX são fornecidos: a solução inteira viável e o *gap* obtidos do CPLEX, com o tempo de todos os problemas limitados em 7200s, exceto para os problemas marcados com um *, que define uma parada na execução por falta de memória. Na coluna referente à relaxação Lagrangena são fornecidos os limitantes inferior (Lb) e superior (Ub) com o *gap* entre eles e o tempo de execução. Os resultados do AGC são apresentados com a melhor solução, o valor médio para

cinco execuções de cada problema e o desvio. Para cada problema, o valor em negrito mostra a melhor solução. De modo geral, a relaxação Lagrangeana apresentou melhores resultados do que o CPLEX em um tempo computacionalmente menor. O AGC forneceu melhores resultados em 18 problemas, 75%, em tempos bastante competitivos em relação às demais soluções.

Problema	CPLEX		Relaxação Lagrangeana				AGC			
	Solução	Gap Cplex (%)	Lb	Ub	Gap Lag (%)	Tempo (s)	Melhor solução	Solução média	Tempo (s)	Desvio %
324_10_0_0_95	21365	0,47	21351	21460	0,51	3466	21379	21316	4,61	0,23
324_10_0_1_95	35050 *	0,90	35292	35360	0,19	4671	35266	35247	5,22	0,13
324_10_0_2_95	45232	0,36	45183	45390	0,46	1468	45093	45026	6,12	0,46
324_10_0_0_85	36802	1,03	36928	37180	0,68	5554	36899	36825	5,85	0,28
324_10_0_1_85	50037	1,25	50562	51000	0,87	1042	50795	50578	6,82	-0,03
324_10_0_2_85	58516	2,10	59277	59740	0,78	930	59414	59226	7,11	0,09
324_20_0_0_95	41676	3,01	41998	42920	2,20	2660	42429	42312	10,72	-0,75
324_20_0_1_95	68443	3,35	70340	70720	0,54	4391	70266	70187	13,19	0,22
324_20_0_2_95	88269	2,86	89488	90780	1,44	2156	89921	89703	19,18	-0,24
324_20_0_0_85	71119	4,56	73047	74360	1,80	2143	73303	73031	14,48	0,02
324_20_0_1_85	95917	6,36	99569	102000	2,44	2088	99959	99131	23,27	0,44
324_20_0_2_85	112691 *	6,03	116905	119480	2,20	2320	116912	116736	31,65	0,14
324_10_1_40_85	27307	1,45	27560	27700	0,51	5125	27551	27489	9,58	0,26
324_10_1_41_85	28710 *	2,30	29137	29360	0,77	5655	29188	29140	9,62	-0,01
324_10_1_42_85	30735	0,72	30866	30950	0,27	5665	30904	30808	9,45	0,19
324_10_1_48_90	26360	2,13	26799	26920	0,45	5219	26833	26745	5,14	0,20
324_10_1_49_90	28249	0,29	28210	28330	0,46	5159	28232	28131	10,21	0,42
324_10_1_50_90	29338	1,19	29585	29680	0,32	6508	29608	29523	10,43	0,21
324_20_1_40_85	53198 *	4,15	54512	55400	1,63	3216	54625	54362	21,82	0,28
324_20_1_41_85	55740 *	5,38	57841	58720	1,52	4190	58073	57749	24,35	0,16
324_20_1_42_85	60783 *	1,86	60635	61900	2,09	4726	61458	61345	24,87	-0,92
324_20_1_48_90	52617	2,33	53067	53840	1,46	3284	52909	52796	12,71	0,51
324_20_1_49_90	54097 *	4,75	55570	56660	1,96	3095	55934	55723	24,10	-0,28
324_20_1_50_90	57974	2,45	58804	59360	0,95	4643	58898	58637	25,63	0,28

Tabela 1 – Comparação entre os resultados para a rede de 324 nós

A tabela 2 compara os métodos utilizados para uma rede de 30 pontos em 55 problemas. As colunas também são divididas nas mesmas quatro classes, porém a primeira contém um item a mais, que mostra o tempo de execução do CPLEX, ainda limitado em 7200s. Vários valores ótimos foram encontrados em todos os métodos. Em 36 casos, cerca de 65%, todos os métodos encontraram os mesmos valores para a solução. Apesar de problemas pequenos, com poucos pontos, em 27 casos, cerca de 49%, o CPLEX não encontrou o valor ótimo no tempo limite estipulado. Dentre esses, 17 casos, cerca de 31%, a relaxação Lagrangeana encontrou o valor ótimo em poucos segundos. O AGC continua fornecendo bons resultados em tempos bastante competitivos em relação às demais soluções. Para cada problema, o valor em negrito mostra a melhor solução.

Problema	CPLEX			Relaxação Lagrangeana				AGC			
	Solução	Gap (%)	Tempo (s)	Lb	Ub	Gap (%)	Tempo (s)	Melhor solução	Solução média	Tempo (s)	Desvio %
30_2_0_0_85	3700	0,49	7200	3700	3700	0	5	3700	3700	3,29	0,00
30_3_0_0_85	5390	0	2	5390	5517	2,36	109	5390	5390	2,64	0,00
30_4_0_0_85	5470	0	1	5470	5473	0,05	31	5470	5470	3,12	0,00
30_2_0_1_85	5100	0	38	5060	5100	0,79	23	5090	5090	2,39	0,20
30_3_0_1_85	5390	0	2	5390	5431	0,77	33	5390	5390	2,97	0,00
30_4_0_1_85	5470	0	0	5470	5470	0	14	5470	5470	3,28	0,00
30_2_0_2_85	5210	0	0	5210	5279	1,33	32	5210	5210	2,57	0,00
30_3_0_2_85	5390	0	1	5390	5430	0,77	33	5390	5390	2,85	0,00
30_4_0_2_85	5470	0	0	5470	5470	0	11	5470	5470	3,32	0,00
30_2_0_0_95	2140	0	0	2140	2140	0	0	2140	2140	1,74	0,00
30_3_0_0_95	3210	0	1	3210	3210	0	1	3210	3210	2,10	0,00

30_4_0_0_95	4280	0,31	7200	4280	4280	0	0	4280	4280	2,68	0,00
30_5_0_0_95	5330	0,69	7200	5330	5350	0,38	50	5330	5330	3,15	0,00
30_6_0_0_95	5410	0	44	5410	5468	1,07	31	5410	5394	3,40	0,30
30_2_0_1_95	3520	0,48	7200	3520	3520	0	4	3520	3520	2,21	0,00
30_3_0_1_95	5270	0	390	5260	5280	0,38	170	5240	5240	2,57	0,57
30_4_0_1_95	5390	0	0	5390	5467	1,44	31	5390	5390	3,32	0,00
30_5_0_1_95	5470	0	0	5470	5470	0	11	5470	5470	4,03	0,00
30_2_0_2_95	4520	0,43	7200	4520	4520	0	1	4520	4512	3,29	0,18
30_3_0_2_95	5390	0	0	5390	5425	0,65	32	5390	5390	2,92	0,00
30_4_0_2_95	5470	0	0	5470	5470	0	14	5470	5470	5,09	0,00
30_3_1_48_90	1440	0,93	7200	1440	1440	0	0	1440	1440	2,07	0,00
30_4_1_48_90	1920	1,47	7200	1920	1920	0	0	1920	1920	2,49	0,00
30_5_1_48_90	2400	1,47	7200	2400	2400	0	2	2390	2390	2,50	0,42
30_6_1_48_90	2880	1,47	7200	2880	2880	0	1	2840	2840	2,69	1,39
30_7_1_48_90	3350	1,78	7200	3350	3360	0,30	23	3320	3296	3,15	1,61
30_8_1_48_90	3500	0	0	3500	3693	5,53	33	3500	3500	3,36	0,00
30_3_1_49_90	2160	0	2	2150	2160	0,47	20	2160	2160	2,09	0,00
30_4_1_49_90	2880	0	0	2870	2880	0,35	21	2880	2878	2,53	0,07
30_5_1_49_90	3600	0,28	7200	3590	3600	0,28	23	3590	3590	3,10	0,28
30_6_1_49_90	4320	0,28	7200	4310	4320	0,23	24	4310	4310	3,04	0,23
30_7_1_49_90	5020	0,68	7200	5030	5035	0,10	33	5010	5010	3,35	0,40
30_3_1_50_90	2820	0,81	7200	2820	2820	0	2	2820	2820	2,46	0,00
30_4_1_50_90	3760	0,81	7200	3760	3760	0	1	3760	3758	2,95	0,05
30_5_1_50_90	4700	0,81	7200	4700	4700	0	8	4700	4700	3,08	0,00
30_6_1_50_90	5390	0	1	5390	5613	4,13	45	5390	5390	3,60	0,00
30_7_1_50_90	5470	0	1	5470	5487	0,31	32	5470	5470	4,01	0,00
30_2_1_40_85	1220	0	1122	1170	1220	4,27	18	1220	1212	2,09	0,66
30_3_1_40_85	1830	1,19	7200	1780	1830	2,81	20	1830	1814	2,11	0,87
30_4_1_40_85	2440	1,19	7200	2390	2440	2,09	23	2440	2420	2,38	0,82
30_5_1_40_85	3050	1,19	7200	3000	3050	1,67	23	3000	3000	2,65	1,64
30_6_1_40_85	3600	2,88	7200	3610	3650	1,12	33	3610	3610	3,02	0,00
30_7_1_40_85	4060	0	1	4060	4195	3,34	33	4060	4060	3,35	0,00
30_8_1_40_85	4140	0	0	4140	4158	0,45	32	4140	4140	3,94	0,00
30_2_1_41_85	1780	0	0	1780	1780	0	1	1780	1780	2,19	0,00
30_3_1_41_85	2670	0,55	7200	2670	2670	0	0	2670	2662	2,16	0,30
30_4_1_41_85	3560	0,55	7200	3560	3560	0	1	3550	3550	2,45	0,28
30_5_1_41_85	4450	0,55	7200	4450	4450	0	0	4430	4430	3,00	0,45
30_6_1_41_85	5330	0,74	7200	5330	5340	0,19	34	5300	5276	3,61	1,01
30_7_1_41_85	5410	0	27	5410	5470	1,19	31	5390	5390	3,89	0,37
30_8_1_41_85	5470	0	0	5470	5470	0	16	5470	5470	4,06	0,00
30_2_1_42_85	2300	0,81	7200	2300	2300	0	1	2300	2300	1,89	0,00
30_3_1_42_85	3450	0,81	7200	3450	3450	0	0	3450	3450	2,29	0,00
30_4_1_42_85	4600	0,81	7200	4600	4600	0	1	4600	4600	2,81	0,00
30_5_1_42_85	5390	0	1	5390	5670	5,2	65	5390	5390	3,19	0,00

Tabela 2 – Comparação entre os resultados para a rede de 30 nós

5. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma comparação entre soluções para uma formulação encontrada na literatura para o Problema Probabilístico de Localização-Alocação de Máxima Cobertura. Os resultados obtidos mostram que as abordagens da relaxação Lagrangeana e AGC são competitivas para a resolução desse problema, em tempos computacionais razoáveis. Para várias instâncias de 30 nós, os valores ótimos foram encontrados. Portanto, esses resultados validam a aplicação dessas abordagens para o QM-CLAM.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Church, R. L.; ReVelle, C. Maximal covering location problem, Papers of the Regional Science Association, v. 32, p. 101-118, 1974.
- [2] Daskin, M. S. **Network and discrete location: models, algorithms and applications**. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc, 1995.

- [3] Espejo, L. G. A.; Galvão, R. D. O uso das relaxações Lagrangeana e Surrogate em problemas de programação inteira. *Pesquisa Operacional*, v. 22, n. 3, p. 387-402, 2002.
- [4] Furtado, J. C. Algoritmos genéticos construtivos na otimização de problemas combinatoriais de agrupamentos. 1998. 112 p. Tese (Doutorado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 1998.
- [5] Galvão, R. D. Uncapacitated facility location problems: contributions, *Pesquisa Operacional*, v. 24, p. 7-38, 2004.
- [6] Goldberg, D. E. **Genetic algorithms in search, optimization and machine learning**. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
- [7] Hale, T.S.; Moberg, C.R. Location science review, *Annals of Operations Research*, v. 123, p. 21-35, 2003.
- [8] Held, M.; Karp, R.M. The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees, *Operations Research*, v. 18, p. 1138-1162, 1970.
- [9] ILOG CPLEX 7.5 Reference Manual 7.5v. 610p. Copyright by ILOG, France, 2001.
- [10] Lacerda, E.G.M; de Carvalho, A.C.P.L.F. Introdução aos algoritmos genéticos. In: XIX Congresso Nacional da Sociedade Brasileira de Computação, 19., 1999. Rio de Janeiro. Anais... v II, p. 51-126.
- [11] Larson, R. C.; Odoni, A. R. **Urban operations research**. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1981.
- [12] Lorena, L.A.N.; Senne, E.L.F. Local search heuristics for capacitated p-median problems. *Networks and Spatial Economics*, v. 3, p. 407-419, 2003.
- [13] Marianov, V.; Serra, D. Probabilistic, maximal covering location-allocation models for congested systems, *Journal of Regional Science*, v. 38, n. 3, p. 401-424, 1998.
- [14] Marianov, V.; Serra, D. Hierarchical location-allocation models for congested systems, *European Journal of Operational Research*, v. 135, p. 195-208, 2001.
- [15] Martello, S.,; Toth, P. **Knapsack Problems – Algorithms and computer implementations**. Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons Ltd, 1990.
- [16] Murray, A. L.; Gerrard, R. A. Capacitated service and regional constraints in location-allocation modeling. *Location Science*, v. 5, p. 103-118, 1997.
- [17] Oliveira, A. C. M. Algoritmos evolutivos híbridos com detecção de regiões promissoras em espaços de busca contínuos e discretos. 2004. 202 p. Tese (Doutorado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 2004.
- [18] Pereira, M. A.; Lorena, L.A.N. A heurística Lagrangeana/Surrogate aplicada ao problema de localização de máxima cobertura. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO), 2001, Campos do Jordão. Anais...p. 1326-1337.
- [19] Pirkul, H.; Schilling, D. A. The maximal covering location problem with capacities on total workload, *Management Science*, v. 37, n 2, p. 233-248, 1991.
- [20] Serra, D.; Marianov, V. New trends in public facility location modeling, *Universitat Pompeu Fabra Economics and Business Working Paper*, n° 755, 2004. Disponível em <<http://www.econ.upf.edu/docs/papers/downloads/755.pdf>>. Acesso em 16 Nov 2004.
- [21] Wolf, R. **Stochastic modeling and the theory of queues**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.