

# UMA PROPOSTA DE ESTABILIZAÇÃO DO MÉTODO DE GERAÇÃO DE COLUNAS APLICADO AO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE MÁXIMA COBERTURA

**Marcos Antonio Pereira**\*

**Luiz Antonio Nogueira Lorena**#

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada – LAC  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE  
12227-010 – São José dos Campos – SP  
{\*marcos, #lorena}@lac.inpe.br

**Edson Luiz França Senne**

Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá – FEG  
Universidade Estadual Paulista – UNESP  
12516-410 – Guaratinguetá – SP  
elfsenne@feg.unesp.br

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma implementação do método de geração de colunas para resolver problemas de localização de facilidades baseados no modelo matemático do problema de  $p$ -medianas. A abordagem tradicional de geração de colunas é comparada com uma nova proposta, onde o critério de custos relativos empregado na seleção de colunas é modificado pelo multiplicador da relaxação lagrangeana/*surrogate*. A eficiência da nova abordagem foi comprovada por testes computacionais envolvendo instâncias com dados reais de problemas de máxima cobertura, formulados como problemas de  $p$ -medianas, cuja esparsidade nos vetores de custos e na matriz de restrições representam grande dificuldade para métodos baseados em geração de colunas.

**Palavras-chave:** Localização de Facilidades, Geração de Colunas, Relaxação Lagrangeana/*Surrogate*.

## ABSTRACT

This work presents a column generation algorithm to solve facility location problems that are based on the mathematical formulation of  $p$ -median problems. The traditional column generation approach is compared to a new proposal, where the reduced cost criterion employed at the column selection is modified by the lagrangean/surrogate multiplier. The efficiency of the new approach is tested with real data for maximal covering location problems, formulated as  $p$ -median problems. Computational tests were conducted and showed the impact of sparsity on column generation based methods.

**Keywords:** Facility Location, Column Generation, Lagrangean/Surrogate Relaxation.

## 1. INTRODUÇÃO

A logística de distribuição de produtos e/ou serviços tem recebido atenção crescente, ao longo dos anos, como parte do planejamento estratégico de empresas do setor público e privado. Decisões sobre a melhor configuração para instalação de facilidades destinadas ao atendimento da demanda de uma população são tratadas em uma ampla classe de problemas, conhecida como Problemas de Localização (Drezner, 1995; Daskin, 1995). Estes problemas ocorrem tipicamente em um espaço discreto, ou seja, em um espaço em que o número de locais possíveis e de conexões entre os locais é finito.

Baseando-se no objetivo desejado, duas grandes classes de problemas de localização podem ser definidas. Uma classe trata da minimização de algum valor de distância média ou total entre os

clientes e os centros de atendimento. O modelo clássico utilizado para representação dos problemas desta classe é o do problema de  $p$ -medianas, que visa selecionar  $p$  vértices em uma rede para a instalação de facilidades de forma a minimizar a soma das distâncias entre os vértices de demanda e a facilidade mais próxima. Modelos que buscam minimizar a distância total ou média são mais apropriados para descrever problemas do setor privado, no qual medidas de custo estão diretamente relacionadas às distâncias envolvidas no atendimento das demandas. Hillsman (1984) apresenta uma forma de manipular os coeficientes da função objetivo para adequar vários problemas de localização ao modelo do problema de  $p$ -medianas.

A segunda classe de problemas de localização enfoca a distância máxima entre qualquer cliente e a facilidade designada para atendimento. Tais problemas são conhecidos como problemas de cobertura e a distância máxima de atendimento é denominada distância de cobertura. O modelo do problema de cobertura de conjuntos (Toregas *et al.*, 1971) busca determinar o número mínimo de centros necessários ao atendimento de todos os clientes, para uma dada distância de cobertura. Por sua simplicidade, este modelo não faz distinção da demanda em cada vértice e o número de facilidades necessárias para atendimento de todos os vértices pode ser grande, incorrendo em aumento dos custos fixos de instalação das facilidades. Uma alternativa considera que o número de facilidades a serem instaladas não é suficiente para atendimento de toda a demanda disponível. Neste caso, a restrição de que toda a demanda seja atendida – para uma dada distância de cobertura – é relaxada e procura-se localizar  $p$  facilidades de forma que a configuração de cobertura atenda a maior demanda possível. Este problema é conhecido como o problema de localização de máxima cobertura (PLMC). Modelos de cobertura são freqüentemente utilizados por órgãos públicos para a localização de serviços emergenciais ou não. As primeiras técnicas de resolução do PLMC visavam a obtenção de soluções a partir da formulação de relaxação de programação linear do modelo proposto por Church e ReVelle (1974). Em seu trabalho de apresentação do PLMC, estes autores propõem uma heurística gulosa baseada em troca de vértices. Galvão *et al.* (2000) apresentam uma comparação entre as relaxações lagrangeana e *surrogate* para resolver problemas de máxima cobertura com até 900 vértices. Arakaki e Lorena (2001) apresentam uma implementação do algoritmo genético construtivo para instâncias reais do PLMC com até 500 vértices.

Atualmente, o tratamento de problemas combinatoriais de grande porte tem recebido grande impulso, graças ao desenvolvimento de pacotes comerciais de otimização mais rápidos e eficientes (ILOG, 2001). Tais ferramentas permitem que problemas inerentemente complexos também possam ser resolvidos em tempo computacional aceitável, através da utilização de técnicas combinadas como, por exemplo, o Método de Geração de Colunas aplicado a problemas de Programação Inteira. Baseado no trabalho de Dantzig e Wolfe (1960), a primeira aplicação prática desta técnica foi na determinação de padrões de corte unidimensionais (Gilmore e Gomory, 1961; 1963) e, desde então, tem sido explorada em várias aplicações, como o corte de padrões (Vance *et al.*, 1994; Valério de Carvalho, 1999), roteamento de veículos (Desrochers e Soumis, 1989, Desrochers *et al.*, 1992), escala de tripulações (Day e Ryan, 1997; Yunes *et al.*, 2000a; Yunes *et al.*, 2000b) e projetos de circuitos VLSI (Meneses e de Souza, 1998).

A técnica de geração de colunas pode ser aplicada a problemas lineares de grandes dimensões, no caso de não se dispor de todas as colunas *a priori*, ou quando se pretende resolver um problema utilizando a decomposição de Dantzig-Wolfe, onde as colunas correspondem aos pontos extremos do conjunto convexo de soluções factíveis do problema. Neste caso, o algoritmo para resolução alterna entre um problema mestre restrito e um subproblema gerador de colunas. A partir de um conjunto inicial de colunas resolve-se o problema mestre, obtendo-se as variáveis duais que modificarão os coeficientes de custo da função objetivo do subproblema, cuja solução corresponde às novas colunas a serem adicionadas ao problema mestre.

Sabe-se que aplicação direta do método de geração de colunas freqüentemente produz um número muito grande colunas que não são relevantes para a solução final, comprometendo assim a convergência para a solução do problema (*tailing-off*). Nestes casos, observa-se que as variáveis duais

oscilam em torno da solução dual ótima, sendo necessário implementar métodos de estabilização que previnam tal comportamento e possam acelerar a resolução do problema. Senne e Lorena (2001) demonstram a utilização bem sucedida do multiplicador lagrangeano/*surrogate* no processo de geração de colunas para resolver problemas de  $p$ -medianas. Alternativas desenvolvidas para a melhoria da convergência do método são descritas em Neame (1999).

Neste trabalho, será apresentada a aplicação da relaxação lagrangeana/*surrogate* em um algoritmo de geração de colunas desenvolvido para a obtenção de limitantes inferiores para problemas de localização de máxima cobertura. Experimentos computacionais conduzidos com dados da literatura comprovaram que o multiplicador lagrangeano/*surrogate* permite a seleção de colunas mais produtivas, acelerando a convergência dos limitantes e abreviando o processo de geração de colunas, principalmente para instâncias com grande número de vértices. A Seção 2 apresenta a formulação matemática do problema de  $p$ -medianas e a correspondente formulação de particionamento de conjuntos obtida da aplicação da decomposição de Dantzig-Wolfe. Apresenta também uma forma de modelar o PLMC como um problema de  $p$ -medianas. A Seção 3 define o problema mestre restrito e a integração da relaxação lagrangeana/*surrogate* ao método de geração de colunas proposto. A Seção 4 descreve os detalhes das principais rotinas desta implementação e a Seção 5 apresenta os resultados computacionais. As conclusões são apresentadas na Seção 6.

## 2. FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS DO PROBLEMA DE $p$ -MEDIANAS

Considere um grafo  $G = (N, A)$ , com  $|N| = n$ . O problema de  $p$ -medianas consiste em determinar  $p < n$  vértices (medianas) de modo a minimizar a soma das distâncias dos outros vértices do grafo à mediana mais próxima. A matriz de distâncias  $D = [d_{ij}]_{n \times n}$  entre cada par de vértices deve ser conhecida *a priori*.

O problema de  $p$ -medianas considerado neste trabalho pode ser formulado como o seguinte problema de otimização (Hakimi, 1964):

$$PPM \quad v(PPM) = \text{Min} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N \quad (2)$$

$$\sum_{j \in N} x_{jj} = p \quad (3)$$

$$x_{ij} \leq x_{jj}, \quad \forall i, j \in N \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in N \quad (5)$$

onde  $[x_{ij}]_{n \times n}$  é uma matriz de alocação, com  $x_{ij} = 1$  se o vértice  $i$  está alocado à mediana  $j$ , e  $x_{ij} = 0$ , caso contrário;  $x_{jj} = 1$  se o vértice  $j$  é uma mediana e  $x_{jj} = 0$ , caso contrário.

A equação (1) é a função objetivo. As restrições (2) e (4) garantem que cada vértice  $i$  seja alocado a apenas um vértice  $j$ , que deve ser uma mediana. A restrição (3) determina o número de medianas a serem localizadas e a restrição (5) impõe a condição de integralidade sobre as variáveis.

Swain (1974) e Garfinkel *et al.* (1974) propuseram a aplicação da decomposição de Dantzig-Wolfe sobre a formulação *PPM*, permitindo o emprego de técnicas de geração de colunas para resolver problemas de  $p$ -medianas. Sendo  $S = \text{Pot}(N) = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  o conjunto de todos os subconjuntos de  $N$ , Minoux (1987) apresenta o problema de  $p$ -medianas usando a seguinte formulação de um problema de particionamento de conjuntos com restrição de cardinalidade:

$$PPC \quad v(PPC) = \text{Min} \sum_{k \in M} c_k x_k \quad (6)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{k \in M} A^k x_k = 1 \quad (7)$$

$$\sum_{k \in M} x_k = p \quad (8)$$

$$x_k \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in M \quad (9)$$

onde:

- $M = \{1, 2, \dots, m\}$  é o conjunto dos índices dos elementos de  $S$ ;
- $c_k = \text{Min}_{j \in S_k} \left\{ \sum_{i \in S_k} d_{ij} \right\}, \forall k \in M$ ;
- $A^k = [a_{ik}]_{n \times 1}$ , com  $a_{ik} = 1$  se  $i \in S_k$ ;  $a_{ik} = 0$ , caso contrário;
- $x_k = 1$  se o subconjunto (*cluster*)  $S_k \in S$  for escolhido;  $x_k = 0$ , caso contrário.

Cada subconjunto  $S_k$  corresponde a uma coluna  $A^k$  do conjunto de restrições (7), representando um *cluster* cuja mediana  $j \in S_k$  é determinada quando o custo  $c_k$  é calculado. Dessa forma, a restrição (4) de *PPM* é considerada implicitamente. No cálculo de  $c_k, \forall k \in M$ , o nó  $j \in S_k$  que corresponder ao menor valor de distância total aos outros nós  $i \in S_k$  será escolhido como mediana, e o valor da distância total calculada corresponderá ao custo do cluster  $k$ . As restrições (2) e (3) são conservadas e atualizadas para (7) e (8), respectivamente.

Sendo  $b_i$  a demanda em cada vértice  $i \in N$  e  $U$  a distância de cobertura, Hillsman (1984) propõe definir novos coeficientes para a função objetivo (1) da formulação *PPM*, da seguinte forma:

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } d_{ij} \leq U \\ b_i, & \text{se } d_{ij} > U \end{cases} \quad (10)$$

permitindo a aplicação de métodos desenvolvidos para o problema de  $p$ -medianas na resolução de problemas de localização de máxima cobertura.

O valor ótimo da função objetivo  $v(PPM)$  com coeficientes dados por (10) reflete a demanda não atendida. Para obter o valor da demanda coberta na solução ótima faz-se:

$$\text{demanda atendida} = \sum_{i \in N} b_i - v(PPM)$$

Lorena e Pereira (2002) apresentam os resultados obtidos com a aplicação de um algoritmo de otimização de subgradientes para resolver a relaxação lagrangeana/*surrogate* da formulação *PPM* com os coeficientes da função objetivos substituídos pelos coeficientes calculados em (10).

### 3. O MÉTODO DE GERAÇÃO DE COLUNAS COM ESTABILIZAÇÃO

A resolução de problemas lineares de grande porte pelo método de geração de colunas é um processo iterativo onde, partindo-se de um subconjunto inicial de colunas, novas colunas são inseridas na formulação de um problema mestre, a cada iteração. Um problema mestre restrito (PMR) para resolver o problema de  $p$ -medianas pode ser definido, considerando-se um subconjunto  $K \subset M = \{1, 2, \dots, m\}$  dos índices das colunas da formulação completa do *PPC*, como a seguinte formulação de relaxação de programação linear de um problema de cobertura de conjuntos com restrição de cardinalidade:

$$\overline{PCC} \quad v(\overline{PCC}) = \text{Min} \sum_{k \in K} c_k x_k \quad (11)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{k \in K} A^k x_k \geq 1 \quad (12)$$

$$\sum_{k \in K} x_k = p \quad (13)$$

$$x_k \in [0, 1] \quad \forall k \in K \quad (14)$$

Neste trabalho, as soluções duais ótimas  $\lambda \in R_+^n$  e  $\mu \in R$ , associadas às restrições (12) e (13) respectivamente, serão utilizadas para o cálculo de novas colunas e também para o cálculo de limitantes inferiores, obtidos como soluções do problema:

$$L_t S_\lambda PPM \quad v(L_t S_\lambda PPM) = \text{Min} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (c_{ij} - t \lambda_i) + t \sum_{i \in N} \lambda_i$$

$$\text{s. a.} \quad (3) - (5).$$

que corresponde à relaxação lagrangeana/*surrogate* de *PPM* (Senne e Lorena, 2000). Para  $\lambda \in R^n$  dado, o melhor valor do multiplicador lagrangeano/*surrogate*  $t$  é obtido como solução ótima do dual do problema  $L_t S_\lambda PPM$ , definido como:

$$D_{t,\lambda} \quad v(D_{t,\lambda}) = \text{Max}_t \{v(L_t S_\lambda PPM)\},$$

ou por busca dicotômica, dado que a função lagrangeana  $l: R \rightarrow R$ ,  $(t, v(L_t S_\lambda PPM))$ , é côncava e linear por partes (Parker e Rardin, 1988).

Para  $t$  e  $\lambda$  dados, tem-se  $v(L_t S_\lambda PPM) \leq v(S_\lambda PPM) \leq v(PPM)$ . Uma característica interessante da relaxação  $L_t S_\lambda PPM$  é que para  $t = 1$  tem-se a relaxação lagrangeana tradicional, no multiplicador  $\lambda$ . O valor ótimo  $v(L_t S_\lambda PPM)$  fornece um limitante melhor que o obtido pela relaxação lagrangeana usual, como comprovam os testes computacionais apresentados neste trabalho.

A mediana escolhida como centro do *cluster* de menor contribuição ao valor de  $v(D_{t,\lambda})$  corresponde ao vértice  $j^*$  obtido como solução ótima do subproblema:

$$SGC_t \quad v(SGC_t) = \text{Min}_{j \in N} \left\{ \text{Min}_{a_{ij} \in \{0,1\}} \sum_{i \in N} (d_{ij} - t \lambda_i) a_{ij} \right\}$$

O problema  $SGC_t$  é facilmente resolvido por inspeção, considerando-se cada vértice  $j \in N$  como mediana e fixando-se  $a_{ij}$ ,  $\forall i \in N$ , da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } d_{ij} - t \lambda_i \leq 0. \\ 0, & \text{se } d_{ij} - t \lambda_i > 0. \end{cases}$$

Sendo  $j^*$  o índice do vértice que resultar no menor valor para  $v(SGC_t)$ , define-se um novo subconjunto  $S_{j^*}$  como:

$$S_{j^*} = \{i \in N \mid a_{ij^*} = 1\}$$

e a coluna  $\begin{bmatrix} A^{j^*} \\ 1 \end{bmatrix}$  será incluída em  $\overline{PCC}$  se:

$$\text{Min} \sum_{a_{ij} \in \{0,1\}} \sum_{i \in N} (d_{ij} - \lambda_i) a_{ij} < \mu \quad (15)$$

Na prática, todas as colunas  $\left[ \begin{array}{c} A^j \\ 1 \end{array} \right], j \in N$ , que satisfizerem a condição (15) podem ser adicionadas ao PMR, permitindo acelerar o processo de resolução do problema por métodos de geração de colunas (*multi-pricing*).

#### 4. ALGORITMO DE GERAÇÃO DE COLUNAS

O algoritmo de geração de colunas implementado neste trabalho pode ser descrito pela Figura 1, a seguir. O processo de geração de colunas tradicional é obtido fixando-se  $t = 1$ . Neste caso, o valor  $v(L_1 S_\lambda PPM)$  corresponde ao limite lagrangeano.

As colunas que correspondem ao problema mestre inicial são obtidas com a aplicação da rotina apresentada na Figura 2. Para efeitos de comparação, o mesmo conjunto inicial de colunas foi utilizado tanto no caso lagrangeano quanto no caso lagrangeano/*surrogate*.

Foi implementado também um mecanismo de controle do tamanho do problema, baseado em remoção de colunas (Figura 3). Tal procedimento pode ser executado sempre que a matriz de restrições apresentar um número de colunas maior que um valor estabelecido *a priori*, ou sempre que se desejar eliminar da formulação as colunas com custo reduzido elevado, quando comparadas com um valor médio de referência.

Schiling (2000) destaca que a ausência da propriedade da desigualdade triangular nos coeficientes de custo calculados em (10) podem dificultar a convergência de procedimentos computacionais desenvolvidos para a resolução de problemas de localização. Além disso, métodos de Programação Linear desenvolvidos para resolver problemas com formulações dadas por *PPC* e *PCC* apresentam dificuldades de convergência, devido à ocorrência de soluções básicas com valor nulo. Este fenômeno é conhecido na literatura como degeneração. Esta é uma característica intrínseca de métodos de geração de colunas, pois à medida que o método progride, colunas com custo reduzido nulo podem ser geradas para substituir outras colunas com custo nulo. No caso do PLMC resolvido pela formulação *PPM*, colunas de custo nulo são desejáveis, pois identificam *clusters* onde toda a demanda foi atendida. Dessa forma, o cálculo de soluções para o PLMC pelo algoritmo de geração de colunas apresentado neste trabalho apresenta-se como um grande desafio.

**Algoritmo GC(t):**  
 Obtenha um conjunto inicial de colunas;  
 Faça *condição* ← TRUE;  
 Enquanto (*condição* = TRUE) faça  
   Resolva *PCC* utilizando CPLEX e obtenha os valores ótimos das variáveis duais  $\lambda$  e  $\mu$ ;  
   Obtenha uma solução aproximada para  $D_{t,\lambda}$ ;  
   Resolva o problema  $SGC_t$  e adicione à *PCC* as colunas  $\left[ \begin{array}{c} A^j \\ 1 \end{array} \right]$  que satisfizerem (15);  
   Se não houver tais colunas ou se  $|v(\overline{PCC}) - v(L_t S_\lambda PPM)| < 1$ , faça *condição* ← FALSE;  
   Execute testes para remoção de colunas;  
 Fim

Figura 1 – Algoritmo de geração de colunas.

**Rotina C1:**  
 Defina  $MaxC$  como o número máximo de colunas a serem geradas;  
 Faça  $NumC \leftarrow 0$ ;  
 Repita  
 Seja  $P = \{n_1, \dots, n_p\} \subset N$  um conjunto de vértices escolhidos aleatoriamente;  
 Para  $j = 1, \dots, p$  faça  
 $S_j \leftarrow \{n_j\} \cup \{q \in N - P \mid d_{qn_j} = \min_{i \in P} \{d_{qi}\}\}$   

$$c_j \leftarrow \text{Min} \left\{ \sum_{i \in S_j} d_{it} \right\}$$
  
 Para  $i = 1, \dots, n$  faça  
 Se  $i \in S_j$ , faça  $a_{ij} \leftarrow 1$ ;  
 Se  $i \notin S_j$ , faça  $a_{ij} \leftarrow 0$ ;  
 Adicione a coluna  $\begin{bmatrix} A^j \\ 1 \end{bmatrix}$  ao conjunto inicial de colunas;  
 $NumC \leftarrow NumC + p$ ;  
 Enquanto ( $NumC < MaxC$ );  
 Fim

Figura 2 – Rotina de geração do conjunto inicial de colunas.

**Rotina RC:**  
 Defina  $TotC$  como o número total de colunas de  $\overline{PCC}$  ;  
 Defina  $fator\_cr$  como um número positivo;  
 Defina  $cr\_médio$  como o custo reduzido médio das colunas do conjunto inicial;  
 Obtenha  $cr_j, j = 1, \dots, TotC$ , o custo reduzido de cada coluna  $j$  de  $\overline{PCC}$  ;  
 Para  $j = 1, \dots, TotC$  faça  
 Se  $cr_j > fator\_cr * cr\_médio$ , remova a coluna  $j$  de  $\overline{PCC}$  ;  
 Fim

Figura 3 – Rotina de remoção de colunas.

Em testes computacionais preliminares com instâncias do PLMC foi possível verificar que o processo de obtenção de soluções pelo algoritmo de geração de colunas, originalmente implementado para resolver instâncias de problemas de  $p$ -medianas (Senne e Lorena, 2001), não apresentava convergência satisfatória. Constatou-se que, na maioria dos casos, os limites inferiores fornecidos pela resolução do problema  $L_r S_\lambda PPM$  permaneciam inalterados por muitas iterações, indicando que o conjunto de colunas do  $\overline{PCC}$  produzia sempre a mesma solução dual  $\lambda$ .

Numa tentativa de provocar alterações significativas nos valores obtidos para  $\lambda$ , permitiu-se a inclusão em  $\overline{PCC}$  de todas as colunas obtidas da resolução do subproblema gerador de colunas, mesmo as que apresentavam custos reduzidos positivos, após um número pré-determinado de iterações consecutivas sem melhoria em  $v(L_r S_\lambda PPM)$ . Com isso, os valores duais se alteravam e os limites inferiores voltavam a aumentar. Esse procedimento foi denominado perturbação, podendo ser aplicado no método de geração de colunas para os casos lagrangeano e lagrangeano/surrogate.

A idéia de incluir mais colunas no  $\overline{PCC}$  numa única iteração serviu de inspiração para outro procedimento, para inserir ainda mais colunas no PMR. Iniciando com valores próximos de 0, o

multiplicador lagrangeano/*surrogate*  $t$  converge para 1 à medida que o algoritmo  $GC(t)$  prossegue. Visando aumentar o desempenho do algoritmo nos passos iniciais, em todas iterações do algoritmo  $CG(t)$  seriam acrescentadas à formulação do PMR as colunas com custo reduzido calculadas com o valor de  $t$  obtido do procedimento de busca dicotômica e também as calculadas com valores do conjunto  $T = \{0,50; 0,55; 0,60; 0,65; 0,70; 0,75; 0,80; 0,85; 0,90; 1,0\}$  maiores que  $t$  corrente, tentando antecipar informação que só estaria disponível em iterações avançadas do algoritmo. Este procedimento foi denominado ampliação, e é válido apenas para o caso lagrangeano/*surrogate*.

Em testes computacionais, foi observado que o emprego da perturbação em algumas instâncias resolvidas pelo algoritmo de geração de colunas, caso lagrangeano/*surrogate*, provocou fortes alterações no comportamento crescente do valor do limitante inferior, quando  $t$  já havia convergido para 1. A seqüência foi interrompida, com  $v(L_t S_\lambda PPM)$  assumindo valores muito inferiores aos anteriormente obtidos. Por esse motivo, um mecanismo de controle foi implementado, evitando que se faça a perturbação quando  $t = 1$  no caso lagrangeano/*surrogate*.

## 5. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Os algoritmos e rotinas apresentados neste trabalho foram implementadas em linguagem C, utilizando o compilador Borland C++ Builder 5 com opções padrão para obtenção de um programa executável em linha de comando. Os testes foram conduzidos em um computador equipado com processador Intel Pentium 4 (2.6 GHz HT) e 1 GB de RAM, executando o sistema operacional Windows XP (com *Service Pack 2*). Os subproblemas de geração de colunas foram resolvidos considerando os casos lagrangeano tradicional ( $t = 1$ ) e lagrangeano/*surrogate* ( $t$  obtido como solução aproximada de  $D_{t,\lambda}$ ). A resolução dos problemas lineares foi feita pelo aplicativo comercial ILOG CPLEX versão 7.5. A legenda usada nas Tabelas 1 a 5 é a seguinte:

- $n$ : número de vértices da rede;
- $p$ : número de facilidades;
- **iterações**: número de iterações executadas pelo algoritmo  $CG(t)$ ;
- **colunas geradas**: número total de colunas geradas;
- **colunas aproveitadas**: número total de colunas aproveitadas no PMR;
- **limite inferior**: melhor valor  $v(L_t S_\lambda PPM)$  encontrado;
- **gap**: diferença percentual entre  $v(\overline{PCC})$  e o limitante inferior;
- **tempo**: tempo computacional total (em segundos).

Tabela 1 - Resultados obtidos para instâncias de S. J. dos Campos com 324 vértices.

$n$	$p$	iterações	colunas geradas	colunas usadas	limite inferior	gap	tempo
324	20	881 (100000)	510866 (11702106)	28675 (1915)	4763,06 (4522,45)	- (3,244)	523,23 (40944,96)
	30	2257 (59937)	1376214 (13421937)	23069 (18688)	2911,73 (2160,09)	- (29,675)	530,38 (16451,18)
	40	1313 (7478)	1114176 (1913483)	6783 (30082)	1537,18 (1075,44)	- (40,152)	292,24 (1219,45)
	50	438 (2423)	326096 (700628)	5344 (9876)	689,11 (386,53)	- (58,024)	83,92 (299,70)
	60	1043 (952)	176719 (156259)	85681 (12580)	108,81 (124,31)	18,692 (-)	74,66 (222,30)
	80	9 (33)	27627 (11290)	27627 (11290)	0,00 (0,00)	- (-)	1,81 (2,14)
	108	5 (16)	16238 (6429)	16238 (6429)	0,00 (0,00)	- (-)	0,53 (0,58)



Tabela 2 - Resultados obtidos para instâncias de S. J. dos Campos com 402 vértices.

<i>n</i>	<i>p</i>	iterações	colunas geradas	colunas usadas	limite inferior	gap	tempo
402	30	10441 (100000)	7862281 (34654329)	96104 (20847)	4499,20 (2826,46)	3,512 (42,107)	3393,48 (55877,57)
	40	3146 (100000)	3885112 (30366135)	3095 (7562)	2816,95 (1977,76)	– (41,166)	1285,91 (28147,48)
	50	3453 (26872)	3512811 (9101114)	4245 (25563)	1789,38 (683,55)	– (69,954)	1133,55 (6364,61)
	60	1837 (6189)	1918008 (2368197)	22955 (30318)	962,86 (– 725,18)	– (> 100)	372,21 (1122,58)
	70	1222 (2170)	1897366 (830359)	6109 (19081)	255,35 (– 610,41)	20,792 (> 100)	223,74 (312,17)
	80	1039 (292)	87151 (56664)	23895 (27280)	32,05 (41,06)	30,336 (–)	31,64 (28,05)
	100	8 (32)	27883 (12892)	27883 (12892)	0,00 (0,00)	– (–)	1,62 (2,38)
	134	5 (15)	21216 (7120)	21216 (7120)	0,00 (0,00)	– (–)	0,59 (0,62)

Tabela 3 - Resultados obtidos para instâncias de S. J. dos Campos com 500 vértices.

<i>n</i>	<i>p</i>	iterações	colunas geradas	colunas usadas	limite inferior	gap	tempo
500	40	10797 (100000)	21422705 (47947348)	3146 (2334)	5382,43 (2942,82)	– (55,219)	11403,01 (87822,27)
	50	29107 (100000)	29005863 (49810865)	178519 (18372)	4168,67 (779,87)	9,048 (85,513)	8032,36 (63239,42)
	60	24108 (100000)	28507334 (48017859)	205444 (6621)	3379,67 (640,88)	3,692 (85,428)	6826,83 (40509,12)
	70	668 (100000)	2027369 (46476364)	570 (25249)	1854,00 (649,12)	– (81,682)	597,89 (29953,01)
	80	8526 (52658)	10943885 (25102301)	17265 (18739)	1792,27 (– 260,48)	– (> 100)	1824,89 (12270,24)
	100	108 (9618)	403308 (4703855)	1182 (1217)	433,99 (– 1077,10)	– (> 100)	74,89 (2420,87)
	130	20 (336)	95257 (130206)	870 (11262)	6,83 (0,36)	– (–)	7,22 (46,19)
	167	7 (43)	35617 (22010)	11276 (22010)	0,00 (0,00)	– (–)	1,84 (4,40)

Tabela 4 - Resultados obtidos para instâncias de S. J. dos Campos com 708 vértices.

<i>n</i>	<i>p</i>	iterações	colunas geradas	colunas usadas	limite inferior	gap	tempo
708	70	9467 (100000)	37654385 (70801933)	1438 (30268)	3262,17 (– 8569,14)	– (> 100)	23566,19 (182079,69)
	80	7353 (100000)	28081728 (70801933)	1024 (30236)	2651,88 (– 6273,93)	– (> 100)	13826,58 (127565,43)
	90	9949 (100000)	30628953 (70796775)	14076 (28100)	2305,90 (– 4943,89)	– (> 100)	10563,38 (84151,88)
	100	2358 (100000)	10326618 (70719646)	920 (1138)	1446,75 (– 3148,53)	– (> 100)	3222,66 (52267,47)
	120	52 (16382)	383893 (11582316)	783 (24534)	272,47 (– 3,00)	– (> 100)	155,55 (38174,01)
	140	164 (3198)	1053089 (2199458)	739 (12958)	139,61 (– 877,93)	– (> 100)	185,02 (3856,92)
	180	243 (95)	97573 (57986)	25538 (28363)	0,30 (3,01)	– (–)	21,18 (18,62)
	236	7 (25)	45613 (18105)	15731 (18105)	0,00 (0,00)	– (–)	2,43 (2,50)

Tabela 5 - Resultados obtidos para instâncias de S. J. dos Campos com 818 vértices.

$n$	$p$	iterações	colunas geradas	colunas usadas	limite inferior	gap	tempo
818	80	29947 (84679)	130865821 (69268588)	25159 (2070)	4173,99 (- 3,00)	25,059 (> 100)	100206,88 (206442,80)
	90	8084 (100000)	40231415 (81801981)	827 (14514)	2901,62 (- 15780,4)	- (> 100)	27721,61 (178731,16)
	100	4948 (100000)	24244186 (81801981)	20287 (14414)	2411,37 (- 11254,1)	32,192 (> 100)	16630,18 (131980,80)
	120	334 (100000)	2797745 (81535844)	9558 (28897)	820,88 (- 3117,13)	- (> 100)	1597,38 (46365,92)
	140	397 (21744)	2665881 (17627162)	660 (19117)	509,47 (- 2602,10)	- (> 100)	716,29 (6055,78)
	160	197 (6845)	1352662 (5599300)	852 (1208)	176,26 (- 9,00)	- (> 100)	384,90 (2289,91)
	200	1070 (418)	115052 (295776)	18156 (28315)	8,02 (6,13)	65,228 (-)	103,55 (101,070)
	273	8 (29)	53002 (23892)	33296 (23892)	0,00 (0,00)	- (-)	3,26 (4,48)

Os números entre parênteses são os valores obtidos para o caso lagrangeano tradicional.

O número máximo de iterações permitido foi fixado em 100.000. O procedimento de perturbação era aplicado sempre que não houvesse melhora em  $v(L_r S_\lambda PPM)$  por 10 iterações consecutivas. O símbolo “-” na coluna **gap** indica que os limitantes convergiram para o mesmo valor, ou que  $v(PCC) < v(L_r S_\lambda PPM)$ .

O desempenho do algoritmo de geração de colunas com os procedimentos de perturbação, ampliação e controle mencionados pode ser comprovado nas figuras 4 a 6. Os gráficos mostram a evolução dos valores das soluções duais  $v(L_r S_\lambda PPM)$  (curva inferior) e das soluções primais (curva superior) para a instância  $n = 324$ ,  $p = 20$  e  $U = 150$ . Na Figura 4 a execução de  $CG(t)$  foi interrompida após 80 iterações, por falta de colunas de custo reduzido negativo. Na Figura 5, o processo se estendeu até a iteração 1.972, sendo interrompido pela falta de melhoria em  $v(L_r S_\lambda PPM)$  por 1.000 iterações consecutivas. Na Figura 6 foram executadas 374 iterações do método até a convergência dos valores dos limitantes.

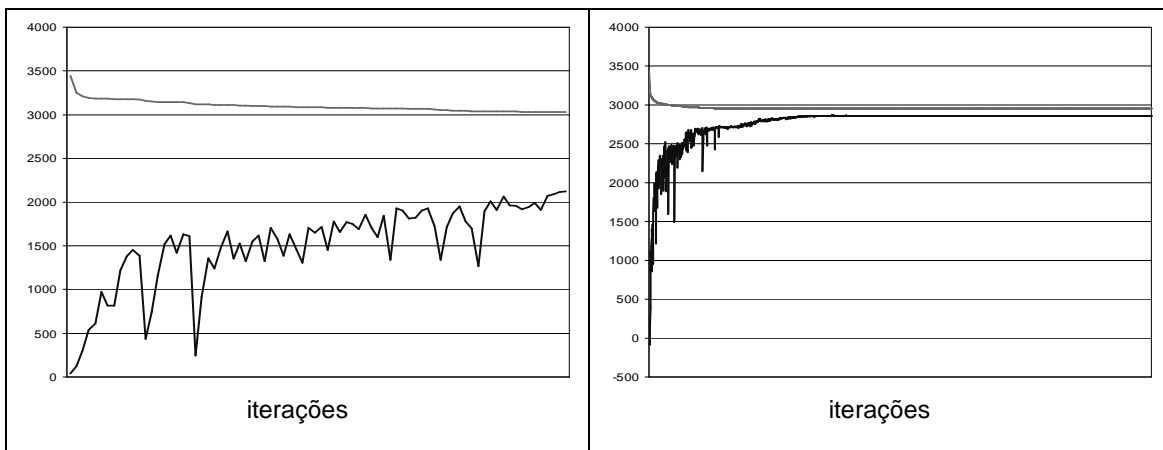


Figura 4 -  $GC(t)$  sem ampliação ou perturbação:  
 $v(L_r S_\lambda PPM) = 2121,40$ .

Figura 5 -  $GC(t)$  com ampliação:  
 $v(L_r S_\lambda PPM) = 2862,21$ .

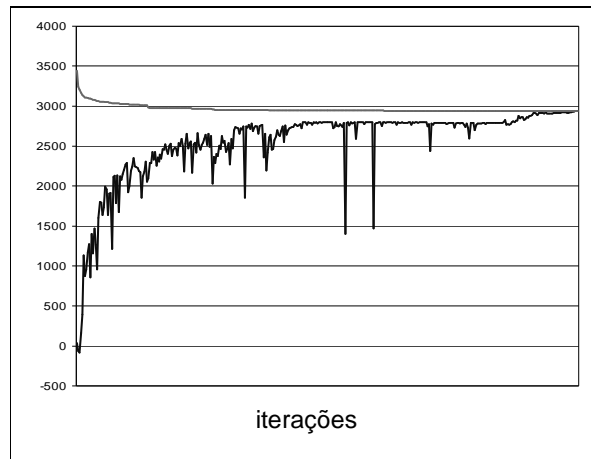


Figura 6 -  $GC(t)$  com ampliação e controle de perturbação:  
 $v(L_t S_\lambda PPM) = 2936,49$ .

## 6. CONCLUSÃO

O número de colunas geradas na relaxação lagrangeana/*surrogate* é um indicativo da qualidade superior das mesmas, quando comparadas com as obtidas pela relaxação lagrangeana tradicional. Isto também pode ser verificado pelo fato que para um número significativo de instâncias, o algoritmo de geração de colunas baseado na relaxação lagrangeana tradicional atingiu o número máximo de iterações permitido sem obter limitantes razoáveis. A relaxação lagrangeana/*surrogate* conseguiu encontrar os melhores valores de limitantes inferiores na maioria dos casos. O pequeno valor para a relação entre o número de colunas aproveitadas e o número de colunas geradas reflete a utilização intensa do procedimento de perturbação.

**Agradecimentos:** Os autores agradecem à CAPES e ao CNPq pelos apoios financeiros recebidos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Arakaki, R.G.I.; Lorena, L.A.N. A constructive genetic algorithm for the maximal covering location problem. In: *Proceedings of the 4<sup>th</sup> Metaheuristics International Conference (MIC'2001)*, 16-20 jul., Porto, Portugal, 13-17, 2001.
2. Church, R.L.; ReVelle, C.S. The maximal covering location problem. *Papers of the Regional Science Association* 32: 101-118, 1974.
3. Dantzig, G.B.; Wolfe, P. Decomposition principle for linear programs. *Operations Research* 8: 101-111, 1960.
4. Daskin, M. *Network and discrete location: models, algorithms and applications*. New York: Wiley Interscience, 1995. 500p.
5. Day, P.R.; Ryan, D.M. Flight attendant rostering for short-haul airline operations. *Operations Research* 45: 649-661, 1997.
6. Desrochers, M.; Soumis, F. A column generation approach to the urban transit crew scheduling problem. *Transportation Science* 23: 1-13, 1989.
7. Desrochers, M.; Desrosiers, J.; Solomon, M. A new optimization algorithm for the vehicle routing problem with time windows. *Operations Research* 40: 342-354, 1992.

8. Drezner, Z. (Editor) *Facility location: a survey of applications and methods*. New York: Springer-Verlag, 1995. 571p.
9. Galvão, R.D.; Espejo, L.G.A.; Boffey, B. A comparison of Lagrangean and surrogate relaxations for the maximal covering location problem. *European Journal of Operational Research* 124: 377-389, 2000.
10. Garfinkel, R.S.; Neebe, W.; Rao, M.R. An algorithm for the m-median location problem. *Transportation Science* 8: 217-236, 1974.
11. Gilmore, P.C.; Gomory, R.E. A linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research* 9: 849-859, 1961.
12. Gilmore, P.C.; Gomory, R.E. A linear programming approach to the cutting stock problem: Part II. *Operations Research* 11: 863-888, 1963.
13. Hakimi, S. L. Optimum location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Operations Research* 12: 450-459, 1964.
14. Hillsman, E.L. The p-median structure as a unified linear model for location-allocation analysis. *Environmental and Planning A* 16: 305-318, 1984.
15. ILOG CPLEX 7.1 *User's Manual*. ILOG Inc., CPLEX Division, 2001.
16. Lorena, L. A. N.; Pereira, M. A. A Lagrangean/surrogate heuristic for the maximal covering location problem using Hillsman's edition. *International Journal of Industrial Engineering* 9(1): 57-67, 2002.
17. Meneses, C.N.; de Souza, C.C. *Exact solutions of rectangular partitions via integer programming*. Campinas: UNICAMP, 1998. 48p. (IC-98-35).
18. Minoux, M. A class of combinatorial problems with polynomially solvable large scale set covering/partitioning relaxations. *R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle* 21(2): 105-136, 1987.
19. Neame, P.J. *Nonsmooth dual methods in integer programming*. Tese de Doutorado. University of Melbourne, Melbourne, 1999, 172p.
20. Parker, R.G.; Hardin, R.L. *Discrete Optimization*. New York: Academic Press, 1988, 472p.
21. Schilling, D.A.; Rosing, K.E.; ReVelle, C.S. Network distance characteristics that affect computational effort in p-median location problems. *European Journal of Operational Research* 127: 525-536, 2000.
22. Senne, E.L.F.; Lorena, L.A.N. Lagrangean/surrogate heuristics for p-median problems. In *Computing Tools for Modeling, Optimization and Simulation: Interfaces in Computer Science and Operations Research*, M. Laguna and J.L. Gonzalez-Velarde (eds.) Kluwer Academic Publishers, pp. 115-130, 2000.
23. Senne, E.L.F.; Lorena, L.A.N. Stabilizing column generation using lagrangean/surrogate relaxation: an application to p-median location problems. In: *European Operations Research Conference – EURO XVIII*, 9-11 julho 2001, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands. Disponível em: <http://www.lac.inpe.br/~lorena/ejor/EURO2001.pdf>
24. Swain, R.W. A parametric decomposition approach for the solution of uncapacitated location problems. *Management Science* 21: 955-961, 1974.
25. Toregas, C.; Swain, R.; ReVelle, C.; Bergman, L. The location of emergency service facilities. *Operations Research* 19: 1363-1373, 1971.
26. Valério de Carvalho, J.M. Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound. *Annals of Operations Research* 86: 629-659, 1999.
27. Vance, P.H.; Barnhart, C.; Johnson, E.L.; Nemhauser, G.L. Solving binary cutting stock problems by column generation and branch-and-bound. *Computational Optimization and Applications* 3: 111-130, 1994.
28. Yunes, T.H.; Moura, A.V.; de Souza, C.C. *Hybrid column generation approaches for solving real world crew management problems*. Campinas: UNICAMP, 2000a. 38p. (IC-00-18).
29. Yunes, T.H.; Moura, A.V.; de Souza, C.C. Solving very large crew scheduling problems to optimality. In: *Proceedings of the Symposium on Applied Computing* (ISBN: 1-58113-240-9), 19-21 mar. Como, Italy, 446-451, 2000b.