



## Inversão gravimétrica usando regularização entrópica

João B. C. Silva, UFPA, Francisco S. Oliveira\*, UFPA, Valéria C. F. Barbosa, LNCC e Haroldo F. C. Velho, INPE

Copyright 2005, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation at the 9<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, 11-14 September 2005.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 9<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society. Ideas and concepts of the text are authors' responsibility and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

### Abstract

We present a new gravity inversion method, which produces an apparent density contrast mapping on the horizontal plane, based on the combination of the minimization of the first-order entropy with the maximization of the zeroth-order entropy. The interpretation model consists of a horizontal grid of 3D vertical prisms, and the parameters to be estimated are the prisms density contrasts. The maximization of the zeroth-order entropy is equivalent to the global smoothness constraint whereas the minimization of the first-order entropy favors solutions presenting abrupt borders, so a judicious combination of both constraints may lead to solutions characterized by regions where the estimated density contrasts are virtually constant, separated by abrupt discontinuities. The method has been applied to synthetic data simulating the presence of intrusive bodies in sediments. The comparison of the results with those obtained with the global smoothness constraint applied to the same data, showed that both methods locate the sources with good precision, but the entropic regularization delineates the contour of the bodies with greater resolution, even in the case of 100 m wide bodies separated by a distance as small as 50 m

### Introdução

Os dados geofísicos não são suficientes para reconstituir de modo único e estável a distribuição de propriedades físicas na subsuperfície, sendo assim classificado como um problema mal posto (Hadamard 1902). Desta forma para se transformar o problema mal posto em bem posto se faz necessário introduzir informação geológica a priori a respeito das fontes (Tikhonov e Arsenin, 1977) em que a informação proveniente da geologia é incorporada ao problema através de um funcional estabilizador. Destaca-se o fato que para cada tipo de informação geológica, um funcional estabilizador específico deve ser empregado.

Durante os últimos anos, diversos métodos de estabilização aplicados a dados de campos potenciais foram desenvolvidos com o objetivo de delinear, no plano horizontal, os contatos entre diferentes unidades geológicas, contribuindo assim para o mapeamento geológico. Nessas aplicações, estima-se uma distribuição discreta de propriedade física presumidamente limitada a

uma camada horizontal. A propriedade física dentro dessa camada é suposta variar apenas em função das coordenadas horizontais. As regularizações mais comumente usadas pertencem a duas categorias: 1) minimização da norma Euclideana do vetor-solução e 2) maximização da suavidade espacial da estimativa da distribuição discreta de propriedades físicas, ambas produzindo perda da resolução na imagem da variação espacial de propriedade física em troca de aumento da estabilidade. Na primeira categoria citamos Silva e Hohmann (1984), que utilizaram uma técnica de interpretação automática para dados aeromagnéticos, usando redução ao pólo e camada equivalente, e estabilização das soluções via "Ridge Regression". Na segunda categoria, Medeiros e Silva (1996) usaram vínculos de igualdade absoluta em parâmetros onde a informação é proveniente de poços e/ou afloramentos e no restante dos parâmetros a estabilização é imposta por meio de vínculo de suavidade.

Velho e Ramos (1997), desenvolveram uma técnica de inversão, combinando a minimização da entropia de primeira ordem com a maximização da entropia de ordem zero e aplicaram-na a dados magnetotélúricos. Este método de regularização é substancialmente diferente dos métodos clássicos de regularização que empregam a maximização da suavidade espacial da distribuição das propriedades físicas ou variantes dela, sempre havendo perda de resolução na delimitação das fontes. A minimização da entropia de primeira ordem, por sua vez, leva a soluções apresentando contatos mais abruptos, permitindo desse modo uma melhor delimitação dos corpos geológicos detectados.

Este trabalho aplica a maximização da entropia de ordem zero combinada com a minimização da medida de entropia de primeira ordem, proposta por Velho e Ramos (1997) à inversão gravimétrica da distribuição espacial de densidade, presumida variar apenas com as coordenadas horizontais. Essa minimização da medida de entropia resulta na restrição do espaço de busca das soluções a um conjunto de modelos geológicos compostos por regiões localmente suaves separadas por descontinuidades abruptas, permitindo assim uma maior resolução e um melhor delineamento dos limites horizontais das fontes gravimétricas.

### Metodologia

Considere um conjunto de fontes gravimétricas homogêneas com diferentes densidades e apresentando topo e base planos e com profundidades conhecidas (Figura 1). Deseja-se aproximar tais fontes por um modelo interpretativo constituído por uma malha horizontal de  $M$  prismas 3-D retangulares, justapostos, definidos dentro de uma área discretizada que presumivelmente contém as fontes anômalas (Figura 2).

Admite-se que a densidade de cada célula é constante, que as células apresentem a mesma extensão nas direções  $x$  e  $y$ , e que, a profundidade do topo e da base de cada prisma coincida com as profundidades do topo e base das fontes verdadeiras.

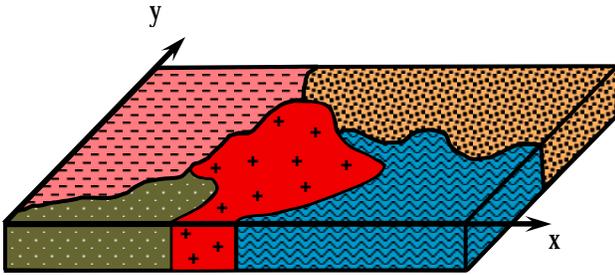


Figura 1 – Representação esquemática do problema geológico que consiste em efetuar o mapeamento em planta das diversas unidades geológicas a partir de medidas gravimétricas.

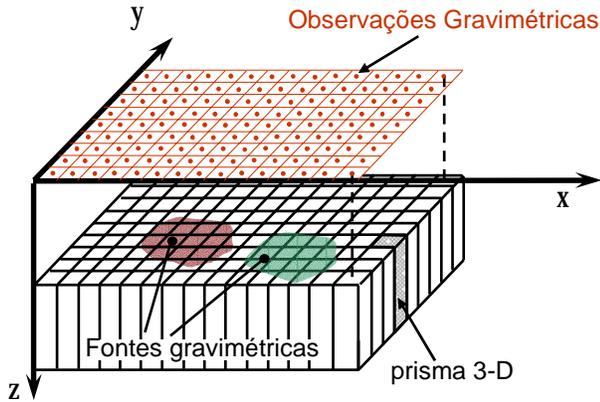


Figura 2 - Modelo interpretativo constituído por uma malha horizontal de  $M$  prismas 3-D retangulares, justapostos, em que o contraste de densidade de cada prisma ( $p_j$ ,  $j=1, \dots, M$ ) são os parâmetros a serem estimados a partir das observações gravimétricas (pontos vermelhos) produzidas por fontes anômalas (polígonos coloridos).

A inversão gravimétrica consiste em estimar, a partir de um vetor  $\mathbf{g}^0(\mathbf{p}) \equiv [g_1^0, \dots, g_N^0]^T$  da anomalia gravimétrica observada, o vetor de contrastes de densidade  $\mathbf{p} \equiv [p_1, \dots, p_M]^T$  de cada célula do modelo interpretativo. Para tanto, a distribuição bidimensional de densidade é transformada em um vetor através de uma ordenação padrão das posições das células. Para estimar o vetor  $\mathbf{p}$  minimizamos o funcional não linear

$$\|\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}(\mathbf{p})\|^2 \quad (1)$$

em que  $\mathbf{g}(\mathbf{p})$  é um vetor  $N$ -dimensional contendo a anomalia computada através do modelo interpretativo, nos mesmos pontos de observação e  $\|\cdot\|$  é a norma Euclidiana. Este problema inverso é mal posto em decorrência da instabilidade das soluções. Assim, é necessário incorporar informação geológica a priori. Isto pode ser efetuado através de técnicas clássicas de regularização como a *suavidade global*, em que é imposta a condição que a estimativa de cada parâmetro  $\hat{p}_i$  (contraste de densidade da  $i$ -ésima célula) seja a mais próxima possível da estimativa do parâmetro  $\hat{p}_j$  (contraste de densidade da célula vizinha em ambas as direções  $x$  e  $y$ ), sujeito aos dados serem explicados pelo modelo interpretativo dentro da precisão experimental dos dados. Matematicamente, esta condição é expressa por

$$\min_{\mathbf{p}} \{ \mathbf{p}^T \mathbf{W} \mathbf{p} \}, \quad (2)$$

sujeito a

$$\|\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}(\mathbf{p})\|^2 = \delta, \quad (3)$$

em que  $\delta$  é uma estimativa da variância do ruído contido nos dados e a matriz  $\mathbf{W}$  é igual ao produto  $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$ , sendo  $\mathbf{R}$  uma matriz cujas linhas contém apenas dois elementos não nulos iguais a 1 e -1, localizados nas colunas correspondentes aos parâmetros  $i$  e  $j$  cujas estimativas devem estar o mais próximas possível. O problema acima é resolvido minimizando a função

$$\rho(\mathbf{p}) = \|\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}(\mathbf{p})\|^2 + \mu \mathbf{p}^T \mathbf{W} \mathbf{p}, \quad (4)$$

em que  $\mu$  é um escalar não negativo escolhido de acordo com o critério descrito adiante.

A técnica da *máxima entropia de ordem zero* introduz informação semelhante à da *suavidade global*, pois tem como característica assegurar que a variação entre estimativas de contrastes de densidade de células contíguas seja limitada, isto é, que as soluções produzidas apresentem uma variação espacial suave. A inserção desta informação nos dados é obtida por meio de um funcional baseado no *método da máxima entropia* (Shannon's e Weaver, 1949) através da maximização da medida de entropia de ordem zero  $Q_0(\mathbf{p})$ .

Neste trabalho empregamos na inversão gravimétrica uma nova função de regularização fundamentada no *método da mínima entropia de primeira ordem*, a qual se baseia na minimização da medida de entropia  $Q_1(\mathbf{p})$  do vetor de derivadas de ordem 1 de  $\mathbf{p}$  (Velho e Ramos, 1997; Ramos et al., 1999), o que possibilita a obtenção de estimativas de distribuições espaciais de densidade essencialmente suaves, mas apresentando bordas mais abruptas que aquelas obtidas com o funcional estabilizante da suavidade. Desta forma, a inversão gravimétrica será formulada como um problema de minimização das medidas de entropia de ordens zero e um, sujeita aos dados serem explicados dentro da precisão experimental. Matematicamente, temos:

$$\min[-\gamma_0 Q_0(\mathbf{p})/Q_{0\max} + \gamma_1 Q_1(\mathbf{p})/Q_{1\max}], \quad (5)$$

sujeito a

$$\|\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}(\mathbf{p})\|^2 = \delta, \quad (6)$$

em que  $Q_{0\max}$  e  $Q_{1\max}$  são constantes de normalização,

$$Q_\alpha(\mathbf{p}) = -\sum_{k=1}^K S_k \log(S_k), \quad \alpha = 0 \text{ ou } 1, \quad (7)$$

são medidas de entropia de ordens zero (se  $\alpha=0$ ) e um (se  $\alpha=1$ ), sendo

$$S_k = r_k / \sum_{k=1}^K r_k, \quad (8)$$

$$r_k = \begin{cases} p_k & \text{se } \alpha = 0 \\ |p_k - p_{k-1}| + \varepsilon & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \quad (9)$$

e  $\varepsilon$  uma constante positiva que garante que teremos em qualquer situação um valor definido para a entropia de primeira ordem (Velho e Ramos, 1997). A função  $Q_\alpha(\mathbf{p})$  alcança seu máximo quando todos os seus elementos  $r_k$  forem os mesmos, e  $Q_\alpha(\mathbf{p})$  alcançará o valor mínimo quando todos os elementos  $r_k$  forem nulos com exceção de um único elemento.

Este problema de otimização vinculada é resolvido minimizando-se o funcional

$$\tau(\mathbf{p}) = \|\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}(\mathbf{p})\|^2 - \gamma_0 Q_0(\mathbf{p})/Q_{0\max} + \gamma_1 Q_1(\mathbf{p})/Q_{1\max} \quad (10)$$

Como o funcional (9) é não linear em  $\mathbf{p}$ , ele é minimizado via um método Quasi-Newton, usando a implementação do método BFGS (Gill e Murray, 1981) para a atualização da matriz Hessiana em cada iteração. As escolhas de  $\mu$ ,  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  são feitas do seguinte modo. Os parâmetros  $\mu$  e  $\gamma_0$  controlam a estabilidade da solução às custas do decréscimo da resolução. Desse modo, eles devem ser iguais ao menor valor positivo ainda produzindo soluções estáveis. O parâmetro  $\gamma_1$  por sua vez, procura introduzir descontinuidades nas estimativas das propriedades físicas de células contíguas. Um valor pequeno de  $\gamma_1$  produz uma solução com bordas difusas, semelhantes às obtidas com o estimador de suavidade, ao passo que um valor muito alto produz soluções exibindo muitas oscilações e descontinuidades nas estimativas das densidades das células. Essas oscilações entretanto não são devidas à instabilidade. Assim,  $\gamma_1$  deve ser o maior valor positivo que produza soluções estáveis sem, no entanto, apresentar mais oscilações ou descontinuidades que as esperadas para o corpo geológico sendo interpretado. A caracterização de uma solução instável é feita adicionando-se, para valores fixos de  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ , diversas seqüência de números pseudo-aleatórios aos dados observados e obtendo-se as correspondentes soluções, que serão estáveis se estiverem suficientemente próximas entre si.

O processo iterativo é interrompido de acordo com o critério descrito a seguir. Considere a distribuição  $\tau(\mathbf{p})$  (equação 10) ao longo das iterações (Figura 3). Uma medida da razão de decaimento de  $\tau(\mathbf{p}_k)$  na  $k$ -ésima iteração é dada por  $d_k^{(1)} = \tau(\mathbf{p}_k) - \tau(\mathbf{p}_{k-1})$ . A diminuição dessa medida ao longo de iterações sucessivas indica a presença de um patamar em  $\tau(\mathbf{p})$ . O limite direito desse patamar no gráfico da Figura 3 será detectado por um aumento no valor absoluto de  $d_k^{(1)}$ . Assim, definindo-se uma medida da razão de decaimento de  $d_k^{(1)}$  como  $d_k^{(2)} = d_{k+1}^{(1)} - d_k^{(1)}$ , o processo iterativo será interrompido na primeira iteração,  $k$ , em que  $d_k^{(2)}$  registrar uma mudança de sinal de positivo para negativo. Em resumo, o critério de parada interrompe o processo iterativo ao encontrar o primeiro patamar aproximadamente horizontal da função  $E(\mathbf{p})$ . O primeiro patamar é selecionado porque soluções pertencentes a patamares produzindo valores mais baixos de  $E(\mathbf{p})$  apresentarão mais oscilações ou descontinuidades estáveis na solução que o esperado para o corpo geológico sendo interpretado.

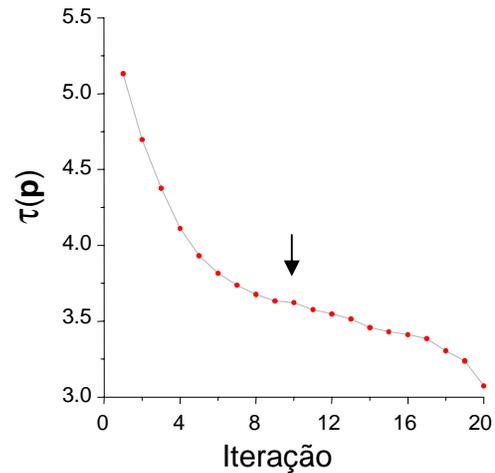


Figura 3 – Variação da função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo das iterações. O critério de parada adotado interrompeu o processo na iteração 10 (seta vertical).

### Testes com Dados Sintéticos

Nesta seção compararemos através de aplicações a dados sintéticos, as soluções do problema gravimétrico inverso no plano  $x$ - $y$  usando o método clássico da suavidade [minimante da equação (4)] com o método da combinação da mínima entropia de ordem um [minimante da equação (10) usando-se  $\gamma_0 = 0$  e  $\gamma_1 \neq 0$ ] com a máxima entropia de ordem zero [minimante da equação (10) usando-se  $\gamma_1 = 0$  e  $\gamma_0 \neq 0$ ].

A figura 4a mostra em linha contínua verde a anomalia Bouguer produzida por dois corpos prismáticos com seções horizontais mostradas na Figuras 4b em linha branca espessa. Estes corpos têm seus topos e bases localizados nas profundidades de 0.0105 km e 0.2105

km, respectivamente. Eles simulam intrusões de rochas ígneas com contraste de densidade uniforme de 0.3 g/cm<sup>3</sup> em relação à rocha sedimentar encaixante. Os dados teóricos foram contaminados com ruído pseudo-aleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0.01 mGal.

O modelo interpretativo consiste de uma malha de 16 × 24 prismas retangulares verticais nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, com a mesma dimensão de 0.025 km ao longo de ambas as direções horizontais, e, tendo topos e bases coincidentes com o topo e a base do corpo anômalo. A Figura 4b apresenta curvas de isovalores e vista em perspectiva da distribuição de densidade estimada usando como estabilizador a suavidade espacial com  $\mu = 0.02$ . O campo ajustado é mostrado na Figura 4a em linha tracejada preta. A Figura 4c apresenta em linha verde contínua, a mesma anomalia da Figura 4a. A Figura 4d mostra em curvas de isovalores e em perspectiva a distribuição de densidade estimada usando como estabilizador a combinação da mínima entropia de ordem 1 e máxima entropia de ordem zero com  $\gamma_0 = 1$  e  $\gamma_1 = 0.5$ . O campo ajustado é mostrado na Figura 4c em linha tracejada preta.

Comparando as Figuras 4b e 4d notamos que as posições, as formas gerais dos corpos intrusivos e seus contrastes de densidade são recuperadas com boa aproximação por ambos os métodos. No entanto, as bordas dos corpos são mais bem definidas no *método da máxima entropia de ordem zero combinado com a mínima entropia de ordem 1* (Figura 4d). Isto pode ser verificado pela comparação da projeção horizontal do corpo verdadeiro com o gradiente das curvas de isovalores da densidade estimada nos dois métodos. Fica também melhor caracterizada a homogeneidade do corpo, indicada pelo patamar das estimativas do contraste de densidade em torno de 0.3 g/cm<sup>3</sup> (vista em perspectiva da Figura 4d).

A Figura 5 é semelhante à Figura 4, a única diferença sendo a contaminação da anomalia teórica com uma seqüência diferente de ruído pseudo-aleatório, mostrando a estabilidade das soluções obtidas com ambos os métodos.

As figuras 6 e 7 são semelhantes às Figuras 4 e 5, as únicas diferenças sendo a presença de corpos mais próximos entre si e os valores dos parâmetros  $\mu = 0.02$ ,  $\gamma_0 = 1.2$  e  $\gamma_1 = 2.1$ . As densidades estimadas mostram que o *método da máxima entropia de ordem zero combinado com a mínima entropia de ordem um* apresenta um desempenho superior em relação ao método da suavidade na delimitação de corpos muito próximos entre si.

## Conclusões

Apresentamos um método para inversão gravimétrica da distribuição espacial bidimensional de densidade no plano horizontal. A estabilização das soluções é feita através da minimização da entropia de ordem um combinada com a maximização da entropia de ordem zero. As soluções obtidas são caracterizadas por

distribuições de densidade apresentando bordas mais bem definidas em relação às soluções obtidas pelo método da suavidade global. O método apresenta assim, potencial utilidade no uso da gravimetria como auxiliar no mapeamento geológico, permitindo uma melhor definição dos contatos geológicos.

Uma limitação do método é o maior tempo de computação em comparação com o método da suavidade global, uma vez que a regularização entrópica torna o problema não linear, necessitando de métodos iterativos para sua resolução.

## Acknowledgments

Os autores J.B.C.S., V.C.F.B. e H.F.C.V. agradecem o apoio financeiro recebido através do CNPq via bolsas de Pesquisa. O autor F.O.S. recebeu apoio financeiro do CNPq na forma de bolsa de mestrado. Adicional suporte financeiro aos autores J.B.C.S. e V.C.F.B. foi fornecido pelo CNPq pelos projetos definidos nos contratos no. 505265/2004-4 e no. 504419/2004-8. H.F.C.V. agradece a FAPESP pelo apoio financeiro a projetos de pesquisa. V.C.F.B. também recebeu apoio de projetos de pesquisa financiados pelo CNPq (contrato no. 472229/03-6) e pelo CNPq/FAPERJ (contrato no. E-26/170.733/2004).

## References

- Gill, P. E., Murray, W., e Wright, M. H., 1981, Practical Optimization: Academic Press.
- Hadamard, J., 1902, Sur les prolemes aux derivees partielles et leur signification physique: Bull. Princeton Univ., **13**, 1-20.
- Medeiros, W. E., e Silva, J. B. C., 1996, Geophysical inversion using approximate equality constraints: Geophysics, **61**, 1678–1688.
- Ramos, F. M., Velho, H. F. C., Carvalho, J. C. e Ferreira, N. J., 1999, Novel Approaches on Entropic Regularization: Inverse Problems, **15**, 1139 – 1148.
- Shannon, C. E. e Weaver, W., 1949, The Mathematical Theory of Communication, Univ. of Illinois Press, Urbana.
- Silva, J. B. C. e Hohmann, G. W., 1984, Airborne magnetic susceptibility mapping: Exploration Geophysics, **15**, 1-13.
- Tikhonov, A. N., e Arsenin, V. Y., 1977, Solutions of ill-posed problems: V. H. Winston & Sons.
- Velho, H. F. C. e Ramos, F.M., 1997 Numerical Inversion of Two-Dimensional Geoelectric Conductivity Distributions From Eletromagnetic Ground Data: Revista brasileira de Geofísica, **15**, 133-144.

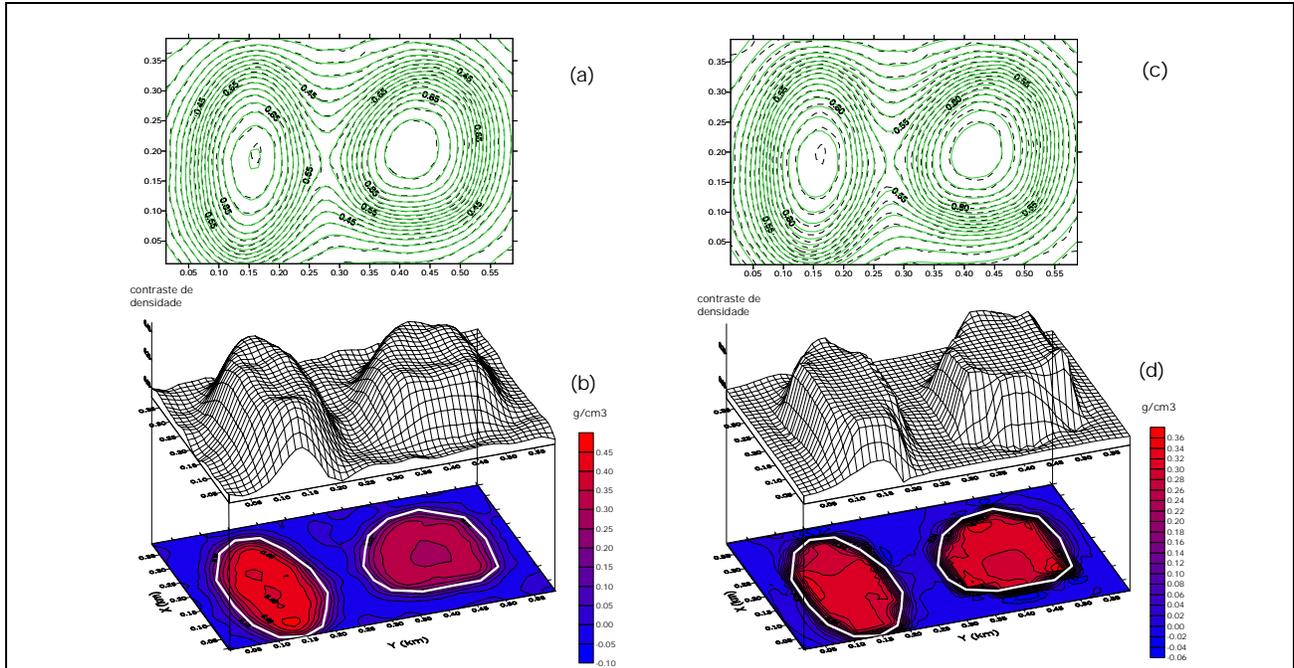


Figura 4– (a) Anomalias Bouguer observada contaminada com a primeira seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução da suavidade global (linha tracejada preta). (b) Estimativa das densidades usando a suavidade global com  $\mu = 0.02$ . A linha contínua branca representa o contorno horizontal do corpo. (c) Anomalias Bouguer observada contaminada com a primeira seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução da regularização entrópica (linha tracejada preta). (d) Estimativa das densidades usando a regularização entrópica com  $\gamma_0 = 1.0$  e  $\gamma_1 = 0.5$ . A linha contínua branca representa o contorno horizontal do corpo.

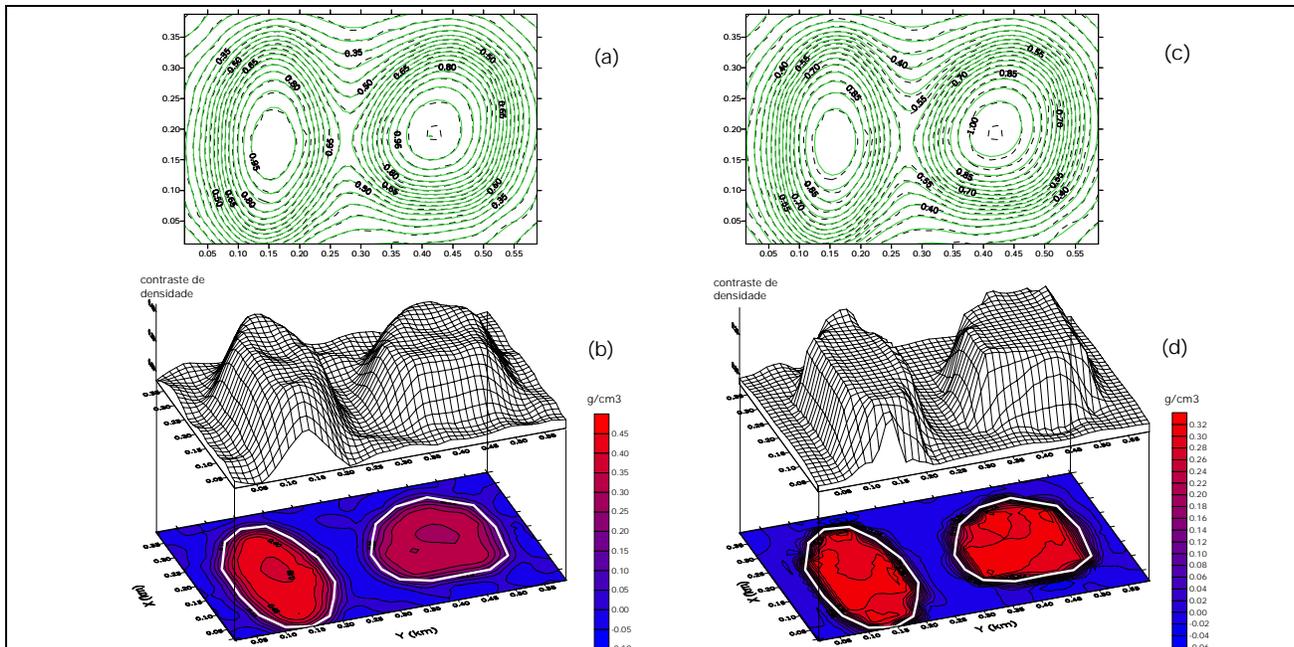


Figura 5 – (a) Anomalias Bouguer observada contaminada com a segunda seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução da suavidade global (linha tracejada preta). (b) Estimativa das densidades usando a suavidade global com  $\mu = 0.02$ . A linha contínua branca representa o contorno horizontal do corpo. (c) Anomalias Bouguer observada contaminada com a segunda seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução da regularização entrópica (linha tracejada preta). (d) Estimativa das densidades usando a regularização entrópica com  $\gamma_0 = 1.0$  e  $\gamma_1 = 0.5$ . A linha contínua branca representa o contorno horizontal do corpo.

