

Série Arquimedes, Volume 2, Anais do DINCON 2003, pp. 622-635  
2º Congresso Temático de Aplicações de Dinâmica e Controle da  
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC).  
São José dos Campos, SP, Brasil, 18-22 Agosto de 2003.  
Editores: J. M. Balthazar, G. N. da Silva, M. Tsuchida,  
M. Boaventura, L. S. Góes e J. D. S. Silva.

## **POSICIONAMENTO ABSOLUTO E DIFERENCIAL EM TEMPO REAL PARA NAVEGAÇÃO VIA GPS**

**HÉLIO KOITI KUGA**  
INPE – DMC  
Hkk@dem.inpe.br

### **1. RESUMO**

Este trabalho descreve algumas técnicas de posicionamento em tempo real via GPS (“Global Positioning System”). Ênfase é dada em técnicas de GPS diferencial, que posicionam precisamente um usuário relativamente a uma posição de referência. O trabalho descreve os métodos convencionais e relaciona os principais problemas inerentes à aplicação de cada método.

### **2. PALAVRAS CHAVES**

GPS, posicionamento, navegação em tempo real, GPS diferencial.

### **3. INTRODUÇÃO**

A constelação de satélites que compõe o sistema GPS disponibiliza tempo e medidas com estabilidade tais que podem produzir variados níveis de precisão de posicionamento. Em particular medidas de pseudo-distância têm uma precisão da ordem de 0,5 m em receptores GPS modernos. Já as medidas de fase da portadora tem precisão milimétrica, que infelizmente não podem ser traduzidas diretamente para precisão de posicionamento, a menos que se resolva o chamado problema da resolução de ambiguidades. O presente trabalho tem como objetivo compilar as principais técnicas de posicionamento em tempo real através do GPS (Global Positioning System) utilizadas em veículos aeroespaciais. Ênfase é dada nas técnicas de GPS diferencial, que posicionam o veículo relativamente a uma posição conhecida, situada a certa distância (curta, média ou longa). Em geral,

métodos convencionais de navegação usam as medidas de pseudo-distância produzindo precisão final da ordem de 10 a 20 m atualmente (com disponibilidade seletiva desativada). Essas mesmas medidas, usadas de maneira diferencial, podem produzir precisões da ordem de metros sem grande dificuldade. Ao se usar as medidas de fase do GPS, se resolvido o problema de ambiguidade do sinal, precisões de posicionamento centimétrico seriam lugar comum. Entretanto, em um ambiente de tempo real surgem vários problemas que prejudicam a performance do sistema: latência do sistema, multi-reflexões do sinal, resolução de ambiguidade equivocada, e etc. Neste trabalho, propõe-se investigar os seguintes métodos convencionais e relacionar os principais problemas inerentes à aplicação de cada método:

- posicionamento absoluto;
- GPS diferencial usando correções direto nas coordenadas de posição;
- GPS diferencial usando correções nas medidas de pseudo-range;
- GPS diferencial usando dupla diferença nas medidas de pseudo-range.

#### **4. SISTEMA GPS**

Basicamente, o sistema GPS consiste de uma constelação de 27 satélites operacionais localizados em uma órbita de cerca de 20.000 km de altitude, e 55° de inclinação em relação ao plano do Equador, distribuídos em 6 planos orbitais, separados em 60°. Tais satélites transmitem sinais de navegação gerados a bordo e que consistem de 2 códigos com alta taxa de transmissão, o código C/A (livre) a 1 Mb/s e código P (protegido) com 2 frequências distintas  $L_1$  e  $L_2$  a 10 Mb/s. Estes sinais fornecem dados sobre as efemérides dos satélites GPS (mensagem de navegação) bem como informações de tempo atômico GPS e outras informações consideradas relevantes (saúde dos satélites, almanaque, deriva dos relógios de bordo, etc.) O segmento de controle do GPS, cujo quartel general está localizado nos EUA, é responsável pela monitoração e controle dos satélites da constelação GPS, e pelas mensagens de navegação. O segmento de usuários é constituído pela comunidade de usuários civis e militares, equipados com receptores dos sinais GPS. O acesso ao sinal de código C/A é livre, mas para o sinal P é restrito. Em resumo, os satélites GPS agem como objetos que formam pontos de referência no espaço para navegação sobre a superfície da Terra ou em baixas altitudes e órbitas. Como a maioria dos

sistemas de navegação, o GPS fornece medidas de distância entre a posição desconhecida do usuário e as referências do sistema, ou seja, os satélites da constelação GPS. Parkinson e Spilker (1996), Leick (1995), Strang e Borre (1997), e Hofmann-Wellenhof et al. (1992) são referências que abordam o assunto.

## 5. MEDIDAS GPS

O sistema GPS fornece meios para coletar basicamente dois tipos de medidas brutas para utilização em posicionamento e navegação: pseudo-distância e ciclos da portadora. A pseudo-distância é obtida através da correlação do sinal GPS recebido com um sinal “gabarito” do receptor. Uma vez obtida a correlação, imediatamente obtém-se o tempo de envio do sinal desde o satélite GPS até o receptor, que corresponde a essa pseudo-distância. Essa denominação (pseudo) advém do fato de que tal distância embute ainda erros de propagação do sinal, refração atmosférica, erros de relógio, dentre outros. Este tipo de medida é chamado de “pseudo-range” via código. Já os ciclos são contagens do receptor, do número de ciclos acumulado a partir de um dado instante, da portadora do sinal. Esses ciclos são números fracionários e portanto medem a fase da portadora, sendo sua resolução equivalente a fração do comprimento de onda do sinal, que no caso da banda  $L_1$  corresponde a 19,2cm. Esta tipo de medida contém uma dificuldade inerente que é a determinação da ambiguidade no número de comprimentos de onda (ciclos) do sinal correspondente. A parte fracionária do número de ciclos fornece a fase da portadora, que também pode ser usada para compor a medida denominada de “pseudo-range” via fase.

A pseudo-distância ao  $i$ -ésimo satélite GPS via código pode ser modelada por:

$$\rho_i = |\mathbf{R}_i - \mathbf{r}_u| + c(b_u - B_i) + c(T + I) + v \quad (1)$$

onde  $\rho_i$  é a pseudo-distância medida,  $\mathbf{R}_i$  é o vetor posição do  $i$ -ésimo satélite GPS no instante de transmissão do sinal,  $\mathbf{r}_u$  é o vetor posição do usuário no instante de recepção do sinal,  $c$  a velocidade de propagação da luz,  $b_u$  é o desvio do relógio do usuário,  $B_i$  é o desvio do relógio do  $i$ -ésimo satélite GPS,  $T$  é o atraso devido à troposfera,  $I$  é o atraso devido à ionosfera (atraso de grupo), e  $v$  representa ruídos de multi-caminho, erros entre canais do receptor e demais erros. A magnitude da distância geométrica é representada por  $|\mathbf{R}_i - \mathbf{r}_u|$ .

A pseudo-distância ao  $i$ -ésimo satélite GPS via fase pode ser modelada por:

$$\rho_i = |\mathbf{R}_i - \mathbf{r}_u| + c(b_u - B_i) + c(T - I) + N\lambda + v \quad (2)$$

onde  $N$  é um número inteiro de comprimentos de onda,  $\lambda$  é o comprimento de onda do sinal,  $I$  tem sinal trocado em relação à medida via código (atraso de fase), e o ruído  $v$  tem magnitude muito menor que o ruído da medida de código.

## 6. POSICIONAMENTO ABSOLUTO

O posicionamento absoluto é realizado através da solução cinemática, por vezes chamada de solução de navegação ou solução pontual, que assume uma linearização da equação do pseudo-range (1), através de expansão de Taylor em torno da estimativa de posição atual:

$$\Delta\rho_i = \rho_i - \hat{\rho}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_i^t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{r} \\ c\Delta b \end{bmatrix} + v \quad (3)$$

onde

$$\mathbf{I}_i = \frac{\hat{\mathbf{r}}_u - \mathbf{R}_i}{|\hat{\mathbf{r}}_u - \mathbf{R}_i|}, \quad \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_u - \hat{\mathbf{r}}_u, \quad \Delta b = b_u - \hat{b}_u,$$

e o circunflexo representa estimativa da variável. Definindo o vetor de estado a ser estimado:

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ c b_u \end{bmatrix},$$

com 4 elementos, o problema pode ser resolvido de várias maneiras. Métodos geométricos usam basicamente soluções de busca com varredura da esfera terrestre ou métodos similares (Kleusberg, 1994). Métodos algébricos usam relações algébricas do sistema de equações para resolver o problema e produzem soluções robustas como as propostas por Bancroft (1985). Métodos estatísticos não se limitam ao processamento de 4 medidas, mas usam de alguma forma toda a informação contida nas medidas. Alguns métodos propõem escolher os 4 satélites GPS que fornecem as melhores medidas para produzir a solução. Estes normalmente recorrem ao critério de melhor DOP (“Dilution of Precision”). Outros (Lopes e Kuga, 1988, 1997) minimizam

funcionais para desenvolver um algoritmo numérico baseado em técnicas de otimização. Classicamente se utiliza o método de mínimos quadrados ponderado não-linear:

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{H}^t \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{W} \Delta \boldsymbol{\rho} \quad (4)$$

onde

$$\Delta \boldsymbol{\rho} \equiv \begin{bmatrix} \Delta \rho_1 \\ \Delta \rho_2 \\ \vdots \\ \Delta \rho_i \\ \vdots \\ \Delta \rho_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^t & 1 \\ \mathbf{I}_2^t & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{I}_i^t & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{I}_m^t & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r}_u \\ c \Delta b_u \end{bmatrix},$$

$m$  é a quantidade de satélites GPS sendo rastreados simultaneamente, e  $\mathbf{W}$  uma matriz de peso. O processo é iterativo e, calculado a partir de uma estimativa inicial da posição do usuário.

Gomes et al. (2003) fornece resultados de técnicas de suavização em tempo real usando os resultados de posicionamento absoluto (ou solução de navegação) para uma aplicação estática, mostrando as melhorias obtidas. Técnicas para obter precisão estendida tais como o ppp (“Precise Point Positioning”) foram investigadas (Monico e Perez, 2001) utilizando efemérides precisas dos satélites GPS, correção dos erros dos relógios GPS, melhores modelos da troposfera e ionosfera. Precisões da ordem de poucos metros ou mesmo sub-métricas são exequíveis, em ambiente de pós-processamento. Entretanto estas não são adequadas para tempo real notadamente para aplicação em navegação autônoma.

## 7. GPS DIFERENCIAL

O GPS diferencial, DGPS, é uma técnica que aumenta significativamente a precisão do usuário. O princípio básico consiste em colocar um receptor GPS num local fixo denominado de base, onde as suas coordenadas são precisamente conhecidas. Se as coordenadas são conhecidas, pode-se calcular quais deveriam ser os valores verdadeiros das medidas de pseudo-range. A comparação do valor “verdadeiro” com o pseudo-range

efetivamente medido fornece os valores de correção que devem ser aplicadas a cada medida de pseudo-range provinda de cada satélite GPS. A Figura 1 mostra o conceito do GPS diferencial.

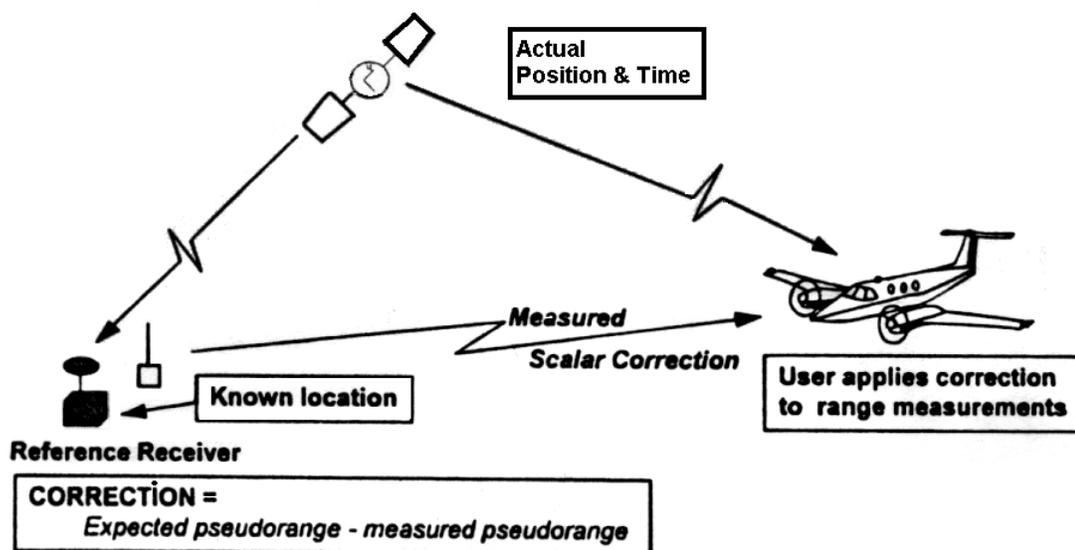


Fig. 1 Conceito de GPS diferencial  
Fonte: Parkinson e Spilker (1996)

Esta técnica também é chamada de GPS diferencial da área local (“Local Area DGPS”). As principais características e hipóteses desta técnica são:

- usuário deve estar próximo da base de referência (até 50km),
- Para um mesmo satélite GPS, a mesma correção calculada na medida da base deve ser aplicada na medida do usuário,
- As correções nas medidas da base abrangem os erros de variação lenta (em geral os erros atmosféricos) .

A Tabela 1 fornece um balanço de erros compreendendo os diversos tipos de erros que afetam a precisão do DGPS, usando-se as medidas de pseudo-range. A nomenclatura para as siglas é a seguinte: RMS (“Root Mean Square”) é a raiz média quadrática, UERE (“User Equivalent Range Error”) é o erro em distância equivalente ao usuário, e DOP (“Dilution of Precision”) é a diluição de precisão na vertical (VDOP) ou na horizontal (HDOP).

O DOP representa o traço da matriz de covariância dos erros a menos de um fator de escala, e valores padrão de VDOP e HDOP são dados na Tabela 1.

Tabela 1 - Balanço de erros do DGPS para usuários a 50km da base de referência.

Fonte: Parkinson e Spilker (1996)

| Fonte do erro                 | Sistemático (m) | Aleatório (m) | Total (m) |
|-------------------------------|-----------------|---------------|-----------|
| Efemérides GPS                | 0.0             | 0.0           | 0.0       |
| Relógio do GPS                | 0.0             | 0.7           | 0.7       |
| Ionosfera                     | 0.0             | 0.5           | 0.5       |
| Troposfera                    | 0.0             | 0.5           | 0.5       |
| Multi-caminho                 | 1.0             | 1.0           | 1.4       |
| Medida do receptor            | 0.0             | 0.2           | 0.2       |
| Base de referência            | 0.3             | 0.2           | 0.4       |
| UERE (RMS)                    | 1.0             | 1.4           | 1.8       |
| UERE Filtrado (RMS)           | 1.0             | 0.4           | 1.1       |
| 1 sigma vertical VDOP = 2.5   |                 |               | 2.8       |
| 1 sigma horizontal HDOP = 2.0 |                 |               | 2.2       |

Em síntese, o DGPS consiste em 2 fases bem definidas:

- Gerar correções na base de referência
- Aplicar correções no receptor usuário

A correção deve ser calculada a partir da base de referência. Prova-se a partir da Equação 1 que o o vetor de medidas de “pseudo-range” pode ser modelada na forma (Parkinson e Spilker, 1996):

$$Hx = AR - \rho - \Delta\rho_c \quad (5)$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} I_1' & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & I_m' \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}$$

Logo, a correção ao vetor de medidas de “pseudo-range” é dada por:

$$\Delta\rho_c = AR - \rho - Hx \quad (6)$$

Esta correção corresponde às correções individuais que devem ser aplicadas às medidas de “pseudo-range” do usuário distante da base. Existe uma sutileza aqui com relação ao “bias”  $b_u$  que deve ser zerada, para que somente correções necessárias sejam repassadas ao usuário. Portanto, o usuário remoto dispõe agora da seguinte equação para resolver o problema, dadas as suas medidas de “pseudo-range”  $\rho$  coletadas:

$$Hx = AR - \rho - \Delta\rho_c, \quad (7)$$

que deverá ser resolvido pelos métodos usuais, por exemplo, uma das soluções cinemáticas já descritas nas técnicas de posicionamento absoluto. Neste ponto existe margem para proposta de algoritmos para melhorar a precisão (por exemplo, uso da medida de fase), que serão devidamente investigados. Em geral, os seguintes cuidados devem ser tomados na aplicação desta técnica:

- Ambos, a base e o usuário, não devem aplicar a correção ionosférica provinda da mensagem de navegação do GPS,
- Ambos devem utilizar o mesmo conjunto de efemérides mesmo que algum deles disponha já de uma atualização,
- A base não deve introduzir erros que não são mensuráveis pelo usuário, por exemplo o multi-caminho,
- O tempo da correção deve ser passado ao usuário, já que existirá uma latência devido ao enlace de comunicação utilizado para transmitir as correções.

Tendo em vista estes cuidados, os seguintes tipos de algoritmos são passíveis de utilização em tempo real para navegação:

- Posicionamento absoluto,
- GPS diferencial usando correções nas coordenadas de posição,
- GPS diferencial usando correções nas medidas de pseudo-range,
- GPS diferencial usando dupla diferença nas medidas de pseudo-range.

## 7.1. GPS diferencial em posição

Essencialmente esta técnica aplica correções diretamente nas coordenadas de posição. Dois passos são necessários: inicialmente usando as medidas brutas de pseudo-range, cada receptor GPS (onde um está na base de referência e o outro é o usuário) calcula suas posições pelo mesmo algoritmo, e.g. Bancroft (1985) ou o método convencional de Mínimos Quadrados, Equação 4. Então a correção na posição da base é calculada e aplicada também na estimativa de posição do usuário.

Seja o receptor GPS base colocado propositalmente em um marco conhecido com coordenadas  $\mathbf{r}_{ref} = (x_{ref}, y_{ref}, z_{ref})$  no sistema de coordenadas WGS84, e seja  $\mathbf{r}_b = (x_b, y_b, z_b)$  as coordenadas calculadas usando-se as medidas de pseudo-range. Logo, a correção para a posição da base é inferida diretamente por comparação:  $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_{ref} - \mathbf{r}_b$ .

Assumindo que ambos os receptores GPS estejam próximos, pode-se assumir que a posição, em analogia com o modelo da medida de pseudo-range, pode ser modelada por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_g + \mathbf{b} - \mathbf{B} + \mathbf{I} + \mathbf{T} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

onde  $\mathbf{r}_g$  é a posição geométrica,  $\mathbf{b}$  são erros do relógio do receptor,  $\mathbf{B}$  são erros do relógio do satélite GPS,  $\mathbf{I}$  são os erros devidos à ionosfera,  $\mathbf{T}$  são erros devidos à troposfera, e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  representa outros erros não-modelados (multi-reflexões, atrasos internos, etc.) assumidos como ruídos gaussianos brancos. É evidente que se ambos os receptores GPS estão suficientemente próximos, os efeitos atmosféricos  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{T}$  são quase os mesmos. Os erros  $\mathbf{B}$  também se o mesmo conjunto de satélites GPS é utilizado no cálculo, e  $\mathbf{b}$  é conhecido ou calculado por cada receptor. Portanto, a correção  $\delta\mathbf{r}$  calculada para o receptor base pode ser aplicada diretamente para o receptor usuário:

$$\hat{\mathbf{r}}_u = \mathbf{r}_u + \delta\mathbf{r}$$

onde  $\hat{\mathbf{r}}_u$  é a estimativa de posição do receptor usuário corrigida diferencialmente, e  $\mathbf{r}_u$  é a posição absoluta calculada.

Baroni et al. (2003) fornece resultados para um caso estático. Precisões em torno de 3 m foram obtidos para uma campanha de 30 minutos, embora alguns picos de 5 a 6 m de erro tenham ocorrido.

## 7.2. GPS diferencial via medidas de pseudo-range

Este método aplica correções diretamente nas medidas de pseudo-range. Se as coordenadas de posição da base são conhecidas, então o valor verdadeiro da medida de pseudo-range pode ser calculada. Assim sendo, para um dado satélite GPS, a diferença entre o pseudo-range medido e o verdadeiro é a correção a ser aplicada nas medidas coletadas com base neste satélite, para o receptor usuário. É fácil verificar que esta correção cobre a maior parte dos efeitos atmosféricos, devido à proximidade dos receptores. De maneira simplificada, a correção é dada portanto por  $\delta\rho_i = \rho_i - \rho_{bi}$  onde  $\rho_i$  é o pseudo-range medido, e  $\rho_{bi}$  é o pseudo-range verdadeiro, conforme a Equação 6.

A correção  $\delta\rho_i$  do receptor base é usado para corrigir a medida de pseudo-range do satélite GPS correspondente  $\hat{\rho}_{ui} = \rho_{ui} + \delta\rho_i$ , onde  $\hat{\rho}_{ui}$  é a medida de pseudorange corrigida, e  $\rho_{ui}$  é a medida de pseudo-range no receptor usuário, conforme a Equação 7. Finalmente, este conjunto de medidas corrigidas deve ser processado por alguma técnica para se obter a posição do receptor usuário.

Em geral, para aplicações de tempo real utiliza-se o filtro de Kalman (e.g. Baroni et al., 2003). Precisões em torno de 1 m foram obtidas após estabilização do filtro. Em outras investigações, Dal Poz et al. 2003 e Matsuoka et al. (2003) analisam o efeito da latência da correção na precisão do posicionamento, bem como o efeito da distância entre a base e o usuário.

## 7.3. GPS diferencial via medidas de pseudo-range e dupla diferença

De acordo com a Equação 1, a medida de pseudo-range pode ser modelada por:

$$y = |\mathbf{R} - \mathbf{r}_u| + c(b_u - B) + c(T + I) + v$$

onde define-se  $\rho = |\mathbf{R} - \mathbf{r}_u|$  como o range geométrico que depende do instante de recepção  $t$  e do tempo de trânsito  $\tau$ ,  $I$  e  $T$  são os atrasos ionosféricos e troposféricos respectivamente,  $b_u$  é o "bias" do relógio do receptor GPS,  $B$  é o "bias" do relógio do satélite GPS, e  $v$  são os erros remanescentes. A diferença simples de fase entre o usuário e a referência (base) é dada por:

$$y_{ur} = y_u - y_r = (\rho_u - \rho_r) + c(b_u - b_r) + (v_u - v_r) = \rho_{ur} + c\Delta b_{ur} + v_{ur}$$

onde se supõe que os erros ionosféricos e troposféricos se cancelam devido à proximidade do usuário e da referência. A diferença dupla entre os satélites  $i$  e  $m$  (master) é dada por:

$$y_{ur}^{im} = y_{ur}^i - y_{ur}^m = (\rho_{ur}^i - \rho_{ur}^m) + (v_{ur}^i - v_{ur}^m) = \rho_{ur}^{im} + v_{ur}^{im}$$

onde os erros dos relógios dos receptores se cancelam. Esta é uma característica marcante da dupla diferença. A parte determinística desta equação contém os ranges geométricos:

$$\rho_{ur}^{im} = (\rho_{ur}^i - \rho_{ur}^m) = (\rho_u^i - \rho_r^i) - (\rho_u^m - \rho_r^m)$$

Fazendo uma expansão de Taylor de primeira ordem para o range geométrico têm-se:

$$\rho \cong \bar{\rho} + \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x}$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor posição que se deseja determinar. Como o range geométrico pode ser calculado por:

$$\rho = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2}$$

onde  $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$  são as coordenadas do satélite GPS, e  $\mathbf{r}_u = (x, y, z)$  são as coordenadas do receptor, então as derivadas parciais são representadas pelo vetor linha de visada do satélite GPS  $i$  até o usuário  $u$ :

$$\mathbf{U}_u^i = \frac{\partial \rho_u^i}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{X_i - x}{\rho_u^i} & \frac{Y_i - y}{\rho_u^i} & \frac{Z_i - z}{\rho_u^i} \end{pmatrix}$$

Então a expansão de Taylor para a dupla diferença fica:

$$\rho_{ur}^{im} = (\rho_u^i - \rho_r^i) - (\rho_u^m - \rho_r^m) = (\bar{\rho}_u^i + \mathbf{U}_u^i \Delta \mathbf{x} - \rho_r^i) - (\bar{\rho}_u^m + \mathbf{U}_u^m \Delta \mathbf{x} - \rho_r^m)$$

e se a linearização for em torno da referência, i.e., o usuário está próximo da referência e  $\bar{\rho}_u = \rho_r$ , vale:

$$\rho_{ur}^{im} = (\mathbf{U}_u^i - \mathbf{U}_u^m) \Delta \mathbf{x}$$

Portanto a equação das medidas de dupla diferença ficam na forma:

$$y_{ur}^{im} = \rho_{ur}^{im} + v_{ur}^{im} \cong (\mathbf{U}_u^i - \mathbf{U}_u^m) \Delta \mathbf{x} + v_{ur}^{im}$$

Colocando a equação na forma padrão:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{v}$$

então  $\mathbf{y}$  é o vetor de observações,  $\mathbf{H}$  é a matriz relacionando as observações ao estado,  $\Delta \mathbf{x}$  é o estado, e  $\mathbf{v}$  o ruído das observações. Como as medidas de dupla diferença são as observações, têm-se:

$$\mathbf{y} \equiv \mathbf{y}_{ur}^{im} = (\mathbf{U}_u^i - \mathbf{U}_u^m) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{v}_{ur}^{im}$$

onde

$$\mathbf{H} = \left[ \begin{array}{ccc} \underbrace{(\mathbf{U}_u^i - \mathbf{U}_u^m)_x}_{m-1,1} & \underbrace{(\mathbf{U}_u^i - \mathbf{U}_u^m)_y}_{m-1,1} & \underbrace{(\mathbf{U}_u^i - \mathbf{U}_u^m)_z}_{m-1,1} \end{array} \right]_{m-1, m-1}$$

A estimativa de  $\Delta \mathbf{x}$ , por algum método estatístico tipo Mínimos Quadrados ou filtro de Kalman fornece diretamente a correção para calcular a posição do usuário via  $\hat{\mathbf{r}}_u = \mathbf{r}_b + \Delta \mathbf{x}$ .

Testes numéricos intensivos ainda não foram implementados. Entretanto investigações preliminares mostram resultados equivalentes ao GPS diferencial via correção de medidas, para um ensaio em vôo típico de aeroplano da Embraer. A vantagem deste método reside no fato de não ser necessário o uso de estimadores sequenciais (filtro de Kalman) para tempo real. Desde que num dado instante haja medidas suficientes (mais de 4 satélites GPS em visada), um algoritmo de Mínimos Quadrados estima a posição relativa do usuário em relação a uma referência (base).

## 8. CONCLUSÕES

Este trabalho descreveu algumas técnicas de posicionamento via GPS viáveis para aplicação em navegação. Métodos convencionais de posicionamento absoluto foram descritas. Em seguida abordou-se técnicas de GPS diferencial que aumentam a precisão do posicionamento absoluto. Foram descritas a correção diferencial em

posição e a correção diferencial das medidas para posterior processamento. Estas técnicas produzem precisões da ordem de metros de acordo com a literatura. A utilização de diferença dupla nas medidas de pseudo-range fornecem uma maneira robusta de estimar a linha de base com precisão de posicionamento relativo também da ordem de metros. Um passo futuro é a utilização de medidas de fase para obtenção de precisões sub-métricas. Neste caso entretanto deve-se ensejar o desenvolvimento de técnicas de resolução de ambiguidade. Este tipo de técnica é denominado comumente de RTK (Real Time Kinematic), porém robustez ainda é um ponto a ser investigado, quando o algoritmo de resolução da ambiguidade produz um resultado equivocado.

## 9. AGRADECIMENTOS

O autor agradece o suporte da Fapesp via processo 01/08751-8.

## 10. REFERÊNCIAS

Bancroft, S. "An algebraic solution of the GPS equations." *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, V. 21, p. 56-59, 1985.

Baroni, L., Kuga, H.K., Lopes, R.V.F., 2003, "Experiments on real time positioning of a GPS receiver using differential GPS", submitted to COBEM 2003.

Dal Poz, W.R.; Aguiar, C.R.; Camargo, P.O.; Monico, J.F.G. "Posicionamento com o DGPS: Análise dos resultados em função da variação espacial e da taxa de atualização das correções". Anais do III CBGC Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, Curitiba, 2003.

Gomes, V.M., Kuga, H.K., Lopes, R.V.F. "Filtering GPS navigation solutions for static positioning" submitted to COBEM 2003.

Hofmann-Wellenhof, B.; Lichtenegger, H.; Collins, J. *GPS theory and Practice*. New York, Springer, 1992.

Kleusberg, A., 1994, "Direkte lösung des räumlichen Hyperbelschnitts", *Zeitschrift für Vermessungswesen*, No. 119, pp. 188-192.

Leick, A. *GPS satellite surveying*. New York, John Wiley, Second edition, 1995.

Lopes, R.V.F.; Kuga, H.K. "Optimal estimation of local orbit from GPS measurements." *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, V.11, n.2, p.186-188, 1988.

Lopes, R.V.F.; Kuga, H.K. "ORBEST- A GPS navigation solution algorithm without DOP analysis." *Advances In The Astronautical Sciences*, San Diego, CA, v.95, p.153-166, 1997.

Matsuoka, A.T.; Marra, D.B.; Souza, E.M.; Monico, J.F.G. "GPS diferencial: Conceitos básicos, implementação e análise de resultados". Anais do III CBGC Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, Curitiba, 2003.

Monico, J.F.G.; Perez, J.A.S. "Integration of regional GPS network to ITRF using precise point positioning." Proceedings of IAG 2001 Scientific Assembly, Budapest, Hungary, 2-7 Sep. 2001.

Parkinson, B.W.; Spilker, J.J. *Global Positioning System: Theory and Applications*, Vol. 1-2, Washington, AIAA, 1996.

Strang, G.; Borre, K. *Linear algebra, Geodesy, and GPS*. Wellesley, Cambridge Press, 1997.