

Aplicação do Filtro de Kalman para a Estimação de Estados em um Problema de Rastreamento

Maria Cecília Pereira de Faria, Marcelo Lopes de Oliveira e Souza,

INPE – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais,
Curso de Engenharia e Tecnologia Espaciais-
Mecânica Espacial e Controle,
São José dos Campos, SP
E-mail: sisa@uai.com.br, marcelo@dem.inpe.br

1. Resumo:

Para uma navegação adequada, veículos aeroespaciais precisam conter sensores que medirão grandezas físicas que determinarão sua trajetória e atitude. Porém, estes sensores não oferecem uma medida exata do estado do veículo, uma vez que existem ruídos nas medidas e erros devidos à imprecisão dos instrumentos. Para se obter resultados confiáveis, é necessário fazer uma ponderação entre as medidas obtidas e as previsões feitas pela teoria. Tal ponderação é feita através do algoritmo do filtro de Kalman

Neste trabalho apresentamos a utilização do filtro de Kalman na estimação de estados de um problema de rastreamento de um veículo de dinâmica desconhecida a partir de medidas de outro veículo, tal como o “rendez-vous” entre um navio em mar aberto e um artefato teleguiado.

2. Palavras chaves

Veículos Aeroespaciais, Rastreamento, Estimação de Estados, Filtro de Kalman

3. Introdução

Este trabalho tem como objetivo utilizar as medidas de posição e de velocidade de um veículo, e do ângulo que este faz com um segundo veículo com velocidade muito menor que a velocidade do primeiro para estimar a trajetória do segundo veículo.

Assim, estas estimativas do segundo veículo serão feitas a partir de todas as medidas disponíveis e, caso se perca a habilidade de obtenção da medida do ângulo, o procedimento utilizará sua capacidade de predição para estimar suas posições futuras.

4. Nomenclatura

V1 – Primeiro veículo (rastreador)
V2 – Segundo veículo (rastreado)
 α – ângulo entre o vetor velocidade de V1 e posição de V2 (ângulo da linha de visada)
 \vec{r}_1 - vetor posição de V1
 \vec{v}_1 - vetor velocidade de V1

\vec{r}_2 - vetor posição de V2

\vec{v}_2 - vetor velocidade de V2

\vec{a}_1 - vetor aceleração de V1

\vec{F}_1 - força aplicada em V1 pelos seus atuadores

K – ganho de Kalman

\hat{x} - estado estimado de V2

y – medidas do estado de V1 e do ângulo α

P – covariância das medidas do estado de V1

Q – covariância do processo branco

R – ruído na medida de α

h – função que relaciona o estado de V2 às medidas disponíveis

5. Estimação de estados utilizando o Filtro de Kalman

• Formulação do problema

Este problema de rastreamento envolve dois veículos: o veículo medidor (V1) e o veículo medido (V2). À medida que V1 mede a posição de V2, ele controla a sua direção, rastreando V2. V1 possui uma plataforma inercial que permite a medida de sua posição \vec{r}_1 e velocidade \vec{v}_1 inerciais, além de um autodiretor que mede o ângulo da linha de visada α (ou seja, o ângulo entre seu vetor velocidade e o veículo 2).

Caso V1 esteja impossibilitado de captar o sinal de V2, ele deve ser capaz de prever a posição \vec{r}_2 e a velocidade \vec{v}_2 de V2 a partir dos dados de medidas anteriores (mesmo com incertezas e ruídos) ainda que não conheça a dinâmica de V2.

Para permitir a resolução deste problema, fizemos algumas considerações (simplificações): (i) os movimentos dos veículos se dão em um mesmo plano; (ii) a velocidade de V2 é muito menor que a velocidade de V1; (iii) os veículos são pontuais; (iv) a distância horizontal entre os veículos é tal que o referencial inercial pode ser fixado na Terra; (v) as variáveis de estado a serem estimadas são $[\vec{r}_2, \vec{v}_2]$; (vi) α está sujeito a ruídos do sensor modelados por distribuição gaussiana de média nula e covariância conhecida; (vii) medidas e equações são dadas no referencial do corpo 1, fazendo-se necessária, portanto, uma transformação para

o referencial inercial; (viii) os valores de \bar{r}_1 e \bar{v}_1 são conhecidos exatamente.

Modelamos os veículos seguinte forma: V1 obedecerá as leis de movimento, sendo lançado com velocidade conhecida; o veículo 2 tem dinâmica desconhecida pela própria natureza do problema, de forma que faremos sua modelagem cinemática inicialmente com aceleração nula, havendo movimento retilíneo e uniforme somente na horizontal.

A Figura 1 a seguir esquematiza o problema:

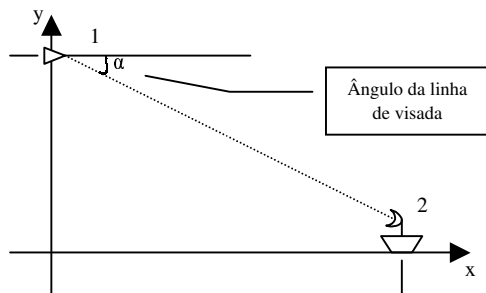


Figura 1: Formulação do problema

As leis dinâmicas que governam o movimento de V1 [1], [2] são:

- $r_{1x} = v_{1x}$
- $r_{1y} = v_{1y}$
- $m v_{1x} = 0$
- $m v_{1y} = -mg$

Este veículo está submetido às condições iniciais:

$$\begin{aligned} r_{1x}(0) &= 0 \\ r_{1y}(0) &= h \\ v_{1x}(0) &= v_{1x0} \\ v_{1y}(0) &= v_{1y0} \end{aligned}$$

Pela própria natureza do problema, tanto a massa quanto a dinâmica do veículo 2 são desconhecidas, de forma que não podemos utilizar equações dinâmicas para modelá-la. Portanto, para que suas equações possam ser utilizadas na formulação do Filtro de Kalman, consideraremos apenas suas equações cinemáticas [1], [2]. Como uma primeira abordagem, consideraremos que o veículo 2 tem movimento apenas horizontal, com aceleração nula, e velocidade constante.

• Qualificação do procedimento

Para se qualificar o procedimento em tempo real do filtro de Kalman no problema abordado, utilizamos a metodologia descrita abaixo.

Inicialmente, simulamos a dinâmica de V1. Simulamos também o estado real de V2 para avaliação do desempenho do filtro de Kalman. Escolhemos então valores para P_0 , R , Q para utilização no filtro. Simulamos a medida de α com acréscimo de ruído, para representar as incertezas envolvidas na medida. A partir destes elementos, o filtro de Kalman deve propagar o estado de V2 e a respectiva covariância. Havendo mais medidas de α , o filtro atualiza o estado de V2. No caso de não haver mais medidas de α , o filtro realiza somente uma propagação do estado. Depois de o filtro de Kalman estimar o estado de V2, comparamos os valores estimados com os reais, simulados anteriormente. Caso a diferença seja menor que uma tolerância escolhida, aceitamos o desempenho do filtro. Caso contrário, escolhemos outros valores de P_0 , R , Q , a fim de melhorar os resultados obtidos.

• Implementação do filtro de Kalman

Para se estimar a posição e a velocidade de V2, implementamos um filtro de Kalman, que se constitui de duas etapas: propagação e atualização. Na fase de propagação do estado, utilizamos as equações de movimento dos veículos, considerando uma dinâmica contínua, com medidas discretas [3], [4]. Para a propagação da covariância, faremos uma suposição de valor inicial da covariância do processo branco, Q , que será ajustado para melhor desempenho do filtro. Assim, as equações de propagação do estado do veículo são:

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= r_k + v_k \Delta t \\ v_{k+1} &= v_k \end{aligned}$$

enquanto a equação de propagação da covariância é:

$$\bar{P}_{k+1} = \phi_{k,k-1} \hat{P}_{k-1} \phi_{k,k-1}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T$$

onde a matriz de transição Φ é dada por:

$$\phi_{k,k-1} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na fase de atualização, utilizamos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} K_k &= \bar{P}_k H_k^T (H_k \bar{P}_k H_k^T + R_k)^{-1} \\ \hat{P}_k &= (I - K_k H_k) \bar{P}_k \\ \hat{x}_k &= \bar{x}_k + K_k (y_k - h(x_k)) \end{aligned}$$

onde $H = \frac{\partial}{\partial r_{2x}} \left(\arctg \frac{r_{1y}}{r_{1x} - r_{2x}} \right)$ para este problema não linear específico.

6. Resultados

Implementamos em MATLAB o filtro de Kalman, estimando-se com ele o estado (posição e velocidade horizontais) de V2.

Os resultados apresentados abaixo foram obtidos com 30s de simulação para os seguintes dados:

- Altura inicial de V1: 5000 m;
- Distância horizontal entre V1 e V2: 8000 m;
- Velocidade horizontal de V1: 150 m/s;
- Velocidade vertical inicial de V1: 5 m/s;
- Velocidade horizontal de V2: 10 m/s;
- Desvio padrão do erro de medida de α : $1e-3 \text{ rad} \cong 6e-5^\circ$;
- Incerteza inicial na posição horizontal de V2: 100 m;
- Incerteza inicial na velocidade horizontal de V2: 1m/s;
- Erro inicial de medida da posição horizontal de V2: 10 m;
- Erro inicial de medida da velocidade horizontal de V2: 1 m/s;

Simulamos a posição e a velocidade horizontais de V2 exatas (estado real) para uma comparação com os valores estimados pelo filtro.

A estatística do erro de α está representada na figura 2:

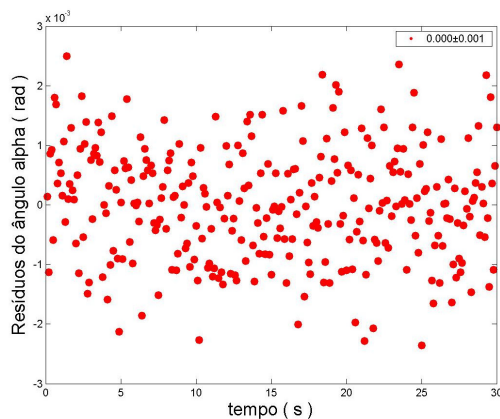


Figura 2: Estatística dos resíduos do ângulo α

Podemos observar que o resíduo na medida do ângulo α se distribuiu ao redor do zero, com valores positivos e negativos, como era esperado. O desvio padrão deste resíduo, como esperado, é da ordem do desvio padrão no erro da medida.

O desempenho do filtro mostrado nas figuras 3 e

4 foi obtido para um valor da covariância do processo branco, Q , que assumiu o valor de $1e-6$ ao longo de todo o período testado.

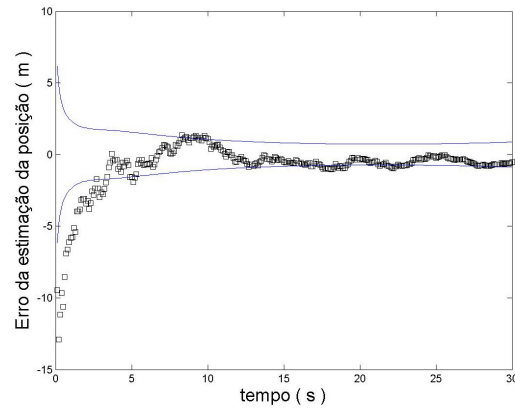


Figura 3: Erro da estimação da medida da posição horizontal do veículo 2

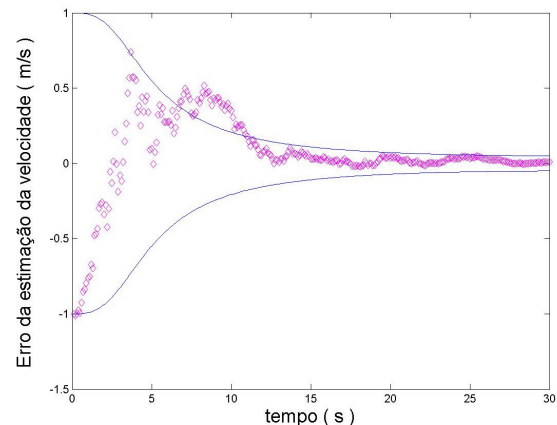


Figura 4: Erro da estimação da medida de velocidade horizontal do veículo 2

Podemos observar que o filtro faz com que os valores de estado converjam para o valor correto, embora tenhamos começado a simulação com um erro de 10 m na posição horizontal e 1m/s na velocidade horizontal. A covariância tende a se estabilizar e o erro no estado tende a ficar dentro da faixa estabelecida pela covariância. Com isto, percebemos que o desempenho do filtro na estimação do estado do veículo 2 foi eficiente, embora não tivéssemos nenhuma informação sobre sua dinâmica.

7. Conclusões

Este trabalho mostra uma investigação preliminar para o tratamento de um problema de rastreamento mais complexo, onde se consideram incertezas em outras medidas, como as da plataforma inercial de V1, além de mais graus de liberdade no problema. Com uma abordagem mais realista, o estado estimado, tanto de V2, como de V1 e do ângulo α , poderá ser utilizado para o projeto de um controle [5] que permita o “rendez-vous”

entre os veículos 1 e 2, e não apenas medida e estimação de estados.

Concluimos que, para esta primeira abordagem, o filtro desenvolvido foi adequado, produzindo estimativas de estado bem próximas do estado real.

O filtro de Kalman apresentou:

- resíduos consistentes com a formulação do problema;
- estimativas de erro próximas da realidade;
- tempo de convergência bastante favorável.

8. Agradecimentos

Agradecemos ao professor Dr. Hélio Koiti Kuga, pela orientação e acompanhamento deste trabalho, que é um trabalho final da disciplina CMC-306-4, Otimização de Sistemas Dinâmicos II do Curso ETE/CMC do INPE.

Agradecemos ainda ao colega Yasser Mahmud Abdallah que auxiliou na utilização do MATLAB na compreensão e implementação do filtro de Kalman.

Referências

- [1] H. Goldstein, Classical Mechanics, *Addison-Wesley Publishing Company, Inc.*, Massachusetts, (1962)
- [2] S.H. Stovall, Basic Inertial Navigation, *Naval Air Warfare Center Weapons Division, China Lake, CA, USA*, (1997) - (NAWCWPNS TM 8128)
- [3] P.S. Maybeck, Stochastic Models, Estimation, and Control, V1, *Academic Press*, New York, USA, (1979)
- [4] H.K. Kuga, Sobre a Utilização Prática de Técnicas de Estimação, Notas de Aula, (2004)
- [5] D. E. Kirk, Optimal Control Theory – Na Introduction, *Prentice-Hall, Inc.*, Englewood Cliffs, New Jersey, (1970)