



## Órbitas Periódicas, Regiões de Estabilidade e Manobras Orbitais no Sistema Terra-Lua

Othon Cabo Winter<sup>(1,2)</sup>, Cristiano Fiorilo de Melo<sup>(2)</sup> e Ernesto Vieira Neto<sup>(1)</sup>

(1) Grupo de Dinâmica Orbital e Planetologia – UNESP  
Caixa Postal 205 – CEP 12.516- 410 - Guaratinguetá – SP

(2) Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE  
Av. dos Astronautas 1758 - CEP 12.227- 010 - São José dos Campos - SP  
E-mail: [ocwinter@feg.unesp.br](mailto:ocwinter@feg.unesp.br) [cristianofiorilo@terra.com.br](mailto:cristianofiorilo@terra.com.br) [ernesto@feg.unesp.br](mailto:ernesto@feg.unesp.br)

### 1 Introdução

#### 1.1 Motivação

A exploração do espaço teve início em outubro de 1957 com o lançamento do *Sputnik* (satélite artificial) pela ex-União Soviética. Nos anos seguintes, década de 60 e início da década de 70, a Lua foi o alvo de diversas missões espaciais, inclusive tripuladas. O último vôo tripulado para a Lua ocorreu em dezembro de 1972 e nenhuma outra missão tripulada retornou à superfície Lunar. Entretanto, a exploração espacial não cessou e diversos estudos das principais agências espaciais do mundo prevêm a exploração do solo e do subsolo Lunar, bem como consideram a Lua como “trampolim” para futuros vôos interplanetários.

Neste contexto, a utilização de órbitas estáveis ao redor da Lua possibilitaria considerável economia de combustível propiciando o transporte de maior quantidade de carga útil. Assim, o estudo de regiões de estabilidade no sistema Terra-Lua onde existem trajetórias estáveis é de grande relevância para a exploração espacial.

#### 1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é investigar numericamente a existência de regiões de estabilidade no sistema Terra-Lua, identificar a razão da estabilidade e fazer um mapeamento global em duas e três dimensões destas regiões. Com isso, reuniremos informações suficientes para propor o uso de trajetórias estáveis que ocorrem

nestas regiões como órbitas alternativas de baixo custo de manutenção ao redor da Lua. Também apresentaremos um conjunto de procedimentos para manobras de aquisição e manutenção para estas órbitas.

#### 1.3 Sistema Terra-Lua

Neste trabalho, estaremos chamando de sistema Terra-Lua toda região contida dentro da esfera de influência da Terra cujo raio é de aproximadamente 900.000km. As trajetórias de veículos espaciais neste sistema podem ser classificadas de maneira simplista por (Roy, 1988):

- Órbitas terrestres;
- Transferências de órbitas das vizinhanças da Terra para as vizinhanças da Lua e vice-versa;
- Órbitas Lunares;
- Aterrissagem sobre a Terra ou sobre a Lua.

Um bom exemplo da combinação dos quatro tipos de trajetórias acima foram as missões do projeto Apollo.

As principais forças que atuam sobre um veículo espacial no sistema Terra-Lua são devido:

- 1 – Aos propulsores do próprio veículo;
- 2 – Campo gravitacional da Terra;
- 3 – Arrasto atmosférico;
- 4 – Campo gravitacional da Lua;
- 5 – Campo gravitacional do Sol;
- 6 – Campos gravitacionais dos outros planetas do Sistema Solar;
- 7 – Pressão de Radiação solar;

8 – Marés;

9 – Campos Eletromagnéticos e fluxos de plasmas provenientes do Sol.

É difícil expressar imediatamente a importância relativa de cada uma destas interações, mesmo porque, isto dependeria muito da missão do veículo espacial. Por isso, tendo em vista os objetivos descritos na seção anterior, não é nosso interesse principal estudar as forças experimentadas pelo veículo devido aos seus próprios propulsores, nem devido ao arrasto atmosférico. Por outro lado, também vamos negligenciar completamente os efeitos dos campos gravitacionais dos outros planetas e do fluxo de plasma do Sol. Assim, daremos ênfase às interações do veículo com os campos gravitacionais da Terra (incluindo o achatamento), da Lua e do Sol, à pressão de radiação solar e devido às marés.

#### 1.4 Metodologia

Para atingirmos a meta de fazer um mapeamento global das regiões de estabilidade no sistema Terra-Lua, dividimos nosso trabalho em etapas a fim de obtermos, gradativamente, informações que nos permitam descrever estas regiões detalhadamente. Assim, primeiramente, estudamos os efeitos da atração gravitacional da Terra e da Lua sobre o veículo (partícula) considerando o caso planar no qual o veículo se move no mesmo plano que contém as órbitas da Terra e da Lua. Para isto, consideramos o problema circular, planar, restrito de três corpos, Terra-Lua-Partícula. Tomamos este problema como ponto de partida, pois o mesmo já foi estudado por vários pesquisadores (Broucke, 1968; Hénon, 1970; Jefferys, 1971; Winter, 2000 e Winter e Vieira Neto, 2002) que relatam em seus trabalhos a existência de regiões de estabilidade onde ocorrem órbitas lunares estáveis, periódicas e quase-periódicas, prógradas e retrógradas, distantes do corpo central (Lua).

Em aplicações à Astronomia, estudos sobre a existência de tais regiões, baseados no problema restrito de três corpos, têm sido realizados na tentativa de explicar a origem de satélites naturais irregulares que orbitam alguns dos planetas do Sistema Solar externo (Huang e Innanen, 1983; Brunini, 1996; Winter e Vieira Neto, 2001).

Associado ao problema circular, planar, restrito de três corpos utilizamos as superfícies de seção de Poincaré, como técnica de mapeamento, para encontrarmos a estrutura das regiões de estabilidade no espaço de fase. Com este procedimento, podemos medir a estabilidade de uma órbita periódica em termos da amplitude de máxima oscilação em torno dela (Winter 2000).

Depois do estudo prévio considerando o problema planar, circular, restrito de três corpos, investigamos, ainda no caso planar, a influência da atração gravitacional do Sol sobre as possíveis regiões de estabilidade. Feito isto, terminamos a fase inicial das investigações numéricas.

As próximas etapas consistiram em, primeiramente, considerar o caso tridimensional, isto é, a inclinação da órbita da Lua além das excentricidades das órbitas da Terra e da Lua. Posteriormente, consideramos outras interações relevantes ao problema como a pressão de radiação e as marés.

Ainda como forma de mapear as regiões de estabilidade, tanto no caso planar como no caso tridimensional, as investigações numéricas geraram dados que nos permite compreender uma enorme gama de propriedades de eventuais trajetórias estáveis de uma partícula ao redor da Lua, tais como a evolução temporal da excentricidade, semi-eixo maior, velocidade, energia e etc. Com este conjunto de dados temos condições de verificar a viabilidade do uso de tais trajetórias em futuras missões espaciais, bem como, os procedimentos necessários para as manobras de aquisição e manutenção das mesmas.

## 2 Determinação de Regiões de Órbitas Diretas Estáveis ao Redor da Lua - Família H2

### 2.1. Reprodução de Resultados de Winter e Vieira Neto (2002)

A meta desta etapa do trabalho é dar continuidade à investigação iniciada por Winter e Vieira Neto (2002) sobre regiões de órbitas estáveis diretas ao redor da Lua adotando como sistemas dinâmicos Terra-Lua-partícula (problema circular planar restrito de três corpos) e Sol-Terra-Lua-partícula (problema circular planar restrito

de quatro corpos). Aqui, estamos chamando de estável toda órbita que permanece em torno da Lua por um período de integração mínimo de 1000 dias com energia da partícula em relação à Lua menor que zero. Primeiramente, com a intenção de continuar este estudo de maneira sistemática reproduzimos alguns resultados de Winter e Vieira Neto (2002). A Figura 1 mostra as reproduções dos diagramas *exa* (excentricidade versus semi-eixo maior) para os problemas circular planar restrito de três corpos Terra-Lua-partícula (Fig. 1.a), e quatro corpos Sol-Terra-Lua-partícula (Fig. 1.b), tal como mostrado na Figura 10 de Winter e Vieira

Neto (2002). Cada ponto dos diagramas das Figuras 1.a e 1.b corresponde aos valores da excentricidade e semi-eixo maior da órbita osculadora inicial da partícula em relação a um sistema de coordenadas fixo à Lua (sistema lunicêntrico). Os demais elementos orbitais da órbita osculadora inicial são  $\omega = \pi$  e  $\Omega = i = \tau = 0$ . O tempo de captura, ou de permanência da partícula em torno da Lua com energia de dois corpos em relação à Lua menor que zero, é dado por um código de cores cuja legenda mostrando os intervalos de tempo considerados está do lado superior direito de cada diagrama. As regiões brancas

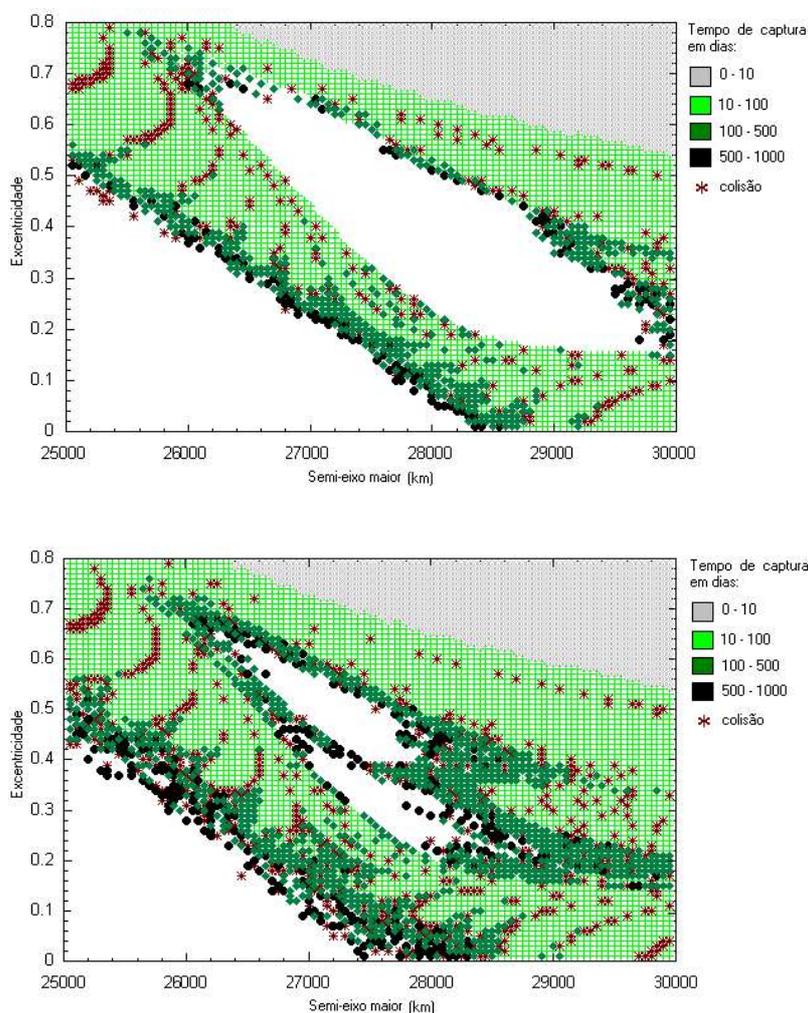


Figura 1. Regiões de estabilidade em termos do tempo de captura. Cada condição inicial tem seu tempo de captura indicado por um código de cores. As áreas brancas dentro das regiões coloridas correspondem a condições iniciais que permanecem capturadas para um período de integração de 1000 dias. Dois sistemas dinâmicos foram considerados: (a) Problema restrito de três corpos Terra- Lua-partícula e (b) Problema restrito de quatro corpos Sol-Terra- Lua-partícula .

dentro das áreas coloridas são as regiões de órbitas estáveis da família H2 ora estudadas. Analisando os diagramas da Figura 1, podemos verificar claramente que a perturbação devido ao Sol reduz pela metade o tamanho da região de estabilidade.

Há uma sutil diferença entre o sistema de referências adotado por Winter e Vieira Neto e o sistema adotado para obter os diagramas da Figura 1. Estamos considerando um sistema de referência cuja origem está fixa no centro de massa do sistema Sol-Terra-Lua (neste sistema o Sol possui um movimento orbital em torno do centro de massa). Portanto, nossas equações de movimento estão escritas em um sistema de coordenadas inercial, enquanto as equações de movimento de Winter e Vieira Neto (2002) foram escritas em um sistema de coordenadas cuja origem estava fixa ao Sol. Apesar desta diferença, nenhuma mudança significativa no tamanho das regiões ou na estrutura dos diagramas foi detectada.

As Figuras 2 e 3 são reproduções das Figuras 11 e 12 de Winter e Vieira Neto (2002) respectivamente. Nelas são mostradas duas trajetórias que permanecem estáveis nos dois sistemas considerados. Nas colunas da esquerda para o problema restrito de três corpos e nas colunas da direita para o problema restrito de quatro corpos. Na primeira linha, estão as trajetórias da partícula no sistema baricêntrico girante Terra-Lua para 1000 dias, na segunda e terceira linhas são mostradas respectivamente a variação do semi-eixo maior e excentricidade da partícula, ambos em relação ao sistema luncêntrico para um intervalo de tempo de 100 dias. Aqui, o sistema de referência adotado é o mesmo, ou seja, considera a origem fixa no centro de massa do sistema Sol-Terra-Lua.

Como podemos observar, há uma excelente concordância entre as Figuras 2 e 3 com as Figuras 11 e 12 de Winter e Vieira Neto (2002).

Cabe reportar dois problemas encontrados no desenvolvimento desta etapa do trabalho. Um deles relacionado ao movimento médio da Lua que deixa de ser constante quando a perturbação devido ao Sol é considerada, e outro com relação à definição das coordenadas da Terra e da Lua no sistema baricêntrico girante Terra-Lua.

## 2.2. Efeitos das Propriedades Dinâmicas Intrínsecas do Sistema Sol-Terra-Lua

Após reproduzir os resultados de Winter e Vieira Neto (2002) e com o objetivo de investigar todos os efeitos perturbativos que podem afetar a estabilidade da família H2, nós passamos a analisar os efeitos perturbativos sobre as órbitas estáveis devido às excentricidades da Terra e da Lua e à inclinação da Lua. Estes parâmetros são introduzidos em nossos programas via condições iniciais dos corpos considerados no sistema dinâmico. Nas subseções a seguir discutiremos como definimos as condições iniciais da Terra, da Lua e da Partícula levando em conta suas excentricidades e inclinação.

É necessário escrever as equações de movimento em um sistema de coordenadas que garanta o máximo de precisão possível e que permita a introdução das propriedades dinâmicas dos corpos considerados de maneira simples. Temos trabalhado com três sistemas de referências até o momento: o primeiro com a origem fixa no Sol, sistema heliocêntrico, o segundo tem origem fixa no centro de massa do sistema Sol-Terra-Lua, e o terceiro possui sua origem fixa no centro de massa do sistema solar (Sol mais os nove planetas). Em primeira aproximação, todos podem ser considerados como sistemas inerciais, no entanto, o terceiro é o mais preciso. No caso de órbitas periódicas no sistema Terra-Lua observa-se que as correções devido a atração gravitacional dos outros planetas do sistema solar não é significativa. Portanto, estaremos adotando o segundo sistema de referências cuja origem se encontra no centro de massa do sistema Sol-Terra-Lua.

Para estabelecer as condições iniciais exatas dos quatro corpos envolvidos em nossas investigações numéricas é fundamental conhecer os parâmetros orbitais da Terra e da nossa Lua. Em especial, suas excentricidades e inclinações orbitais. Um fator relevante na geometria das condições iniciais é a obliquidade da eclíptica, ou seja, o ângulo entre o eixo perpendicular ao equador terrestre e o plano orbital da Terra.

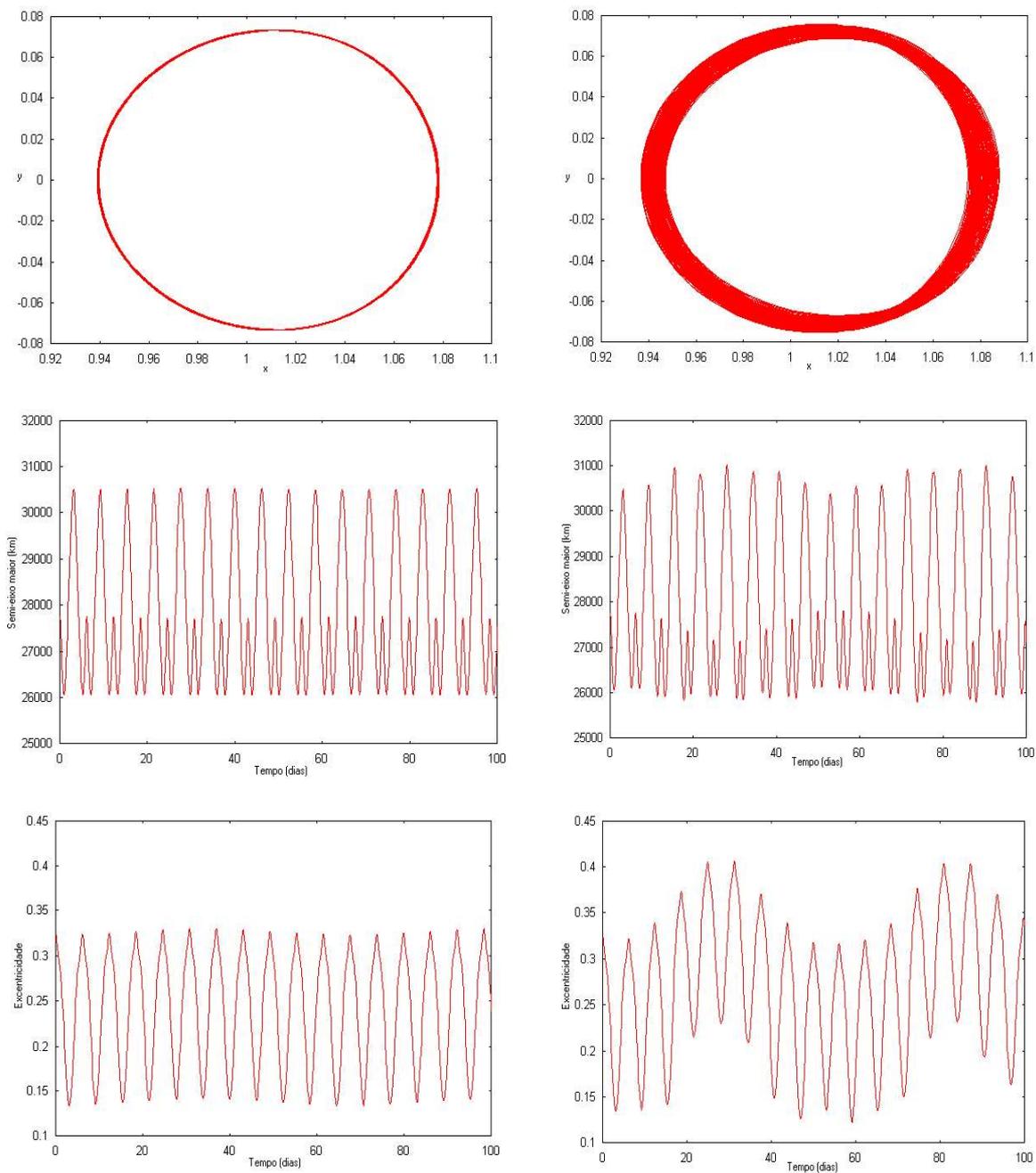


Figura 2. Exemplo de trajetória com condição inicial  $a = 27.751,7$  km e  $e = 0,3227$ , a qual é estável em ambos os sistemas dinâmicos: Terra-Lua-partícula (coluna da esquerda), e Sol-Terra-Lua-partícula (coluna da direita). Na primeira linha é mostrada a trajetória no sistema baricêntrico girante Terra-Lua para 1000 dias. As variações do semi-eixo maior e da excentricidade no tempo são mostradas para 100 dias, mas o comportamento é o mesmo para 1000 dias.

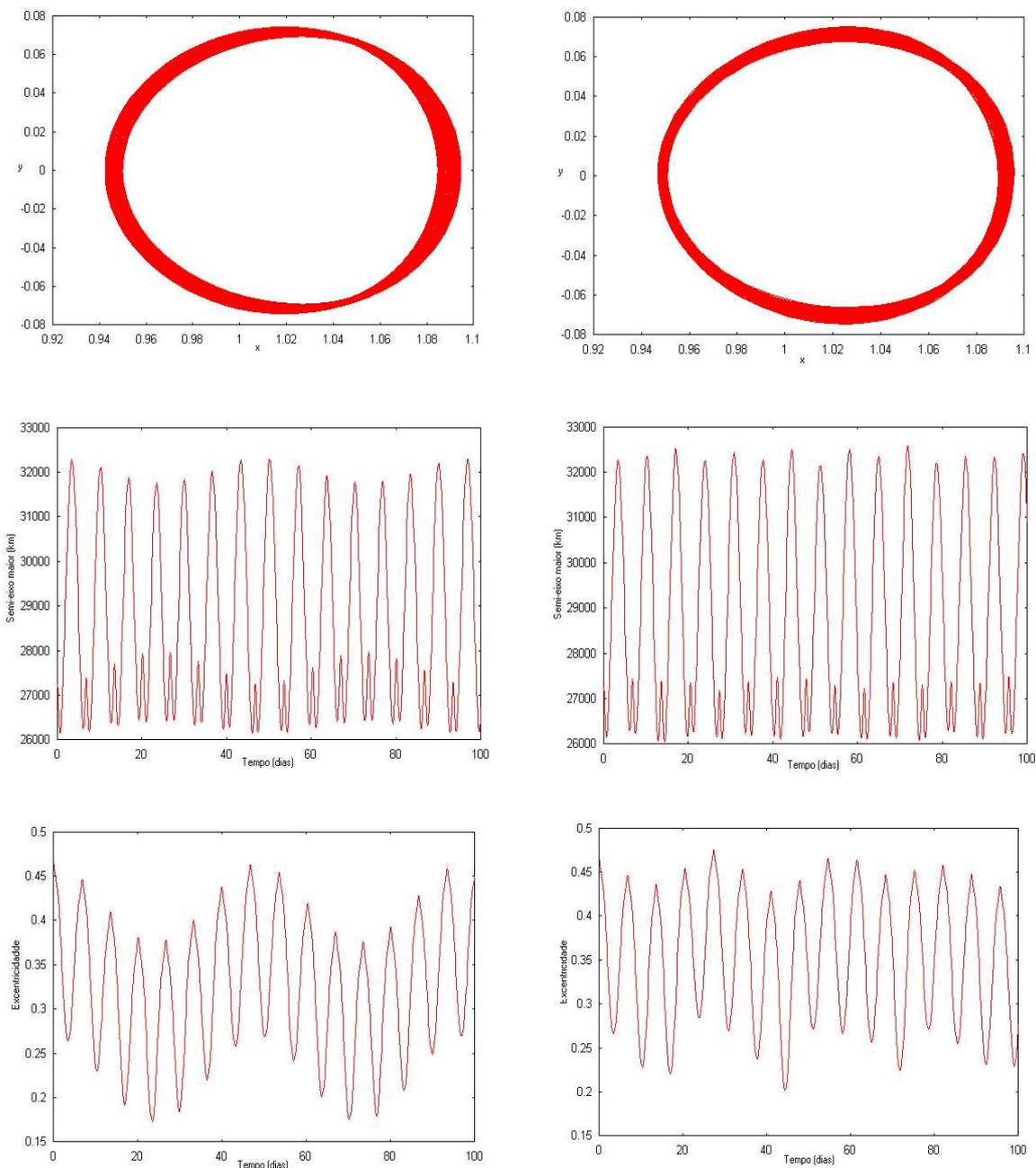


Figura 3. Exemplo de trajetória com condição inicial  $a = 27.248,3$  km e  $e = 0,4638$ , a qual é estável em ambos os sistemas dinâmicos: Terra-Lua-partícula (coluna da esquerda), e Sol-Terra-Lua-partícula (coluna da direita). Na primeira linha é mostrada a trajetória no sistema baricêntrico girante Terra-Lua para 1000 dias. As variações do semi-eixo maior e da excentricidade no tempo são mostradas para 100 dias, mas o comportamento é o mesmo para 1000 dias.

O eixo de rotação da Terra possui uma inclinação de  $23^{\circ} 27'$  em relação ao plano de sua órbita. Esta inclinação é a responsável pelas estações do ano. A Figura 4 mostra esta inclinação para um sistema de coordenadas fixo no Sol de tal forma que os eixos  $xy$  deste sistema definem o plano orbital da Terra. Nas subseções anteriores, adotamos um sistema de coordenadas semelhante a esse, porém com a origem fixa no centro de massa do sistema Sol-Terra-Lua.

A Figura 5 mostra a inclinação do eixo de rotação da Terra em relação ao seu eixo orbital supondo que este seja perpendicular ao plano da página. O plano orbital da Lua por sua vez, possui uma inclinação de  $5,1454$  graus em relação ao plano equatorial da Terra, tal como ilustra a Figura 6.

Desta forma, levando em conta estes dois aspectos das órbitas da Lua e da Terra podemos concluir que o plano orbital da Lua possui uma inclinação de  $18,3546$  graus em relação ao plano orbital da Terra, assim como mostra a Figura 7

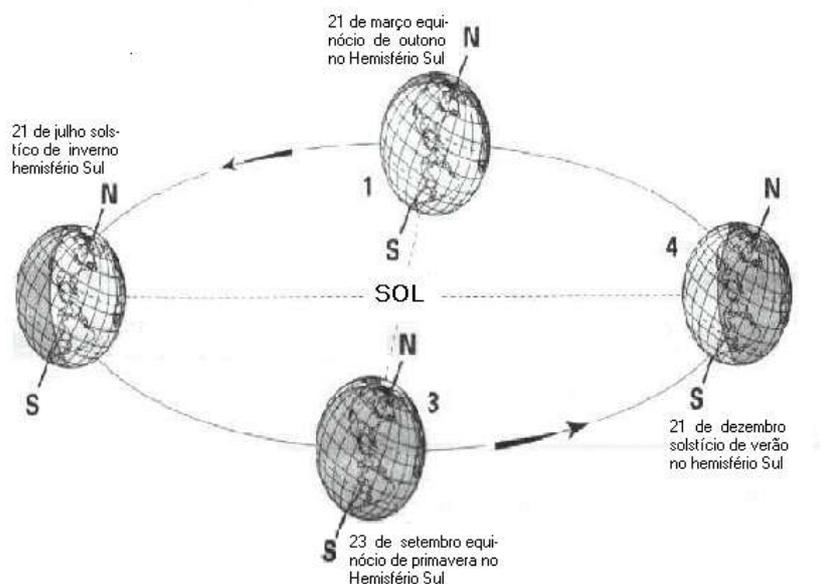


Figura 4. Inclinação do eixo de rotação da Terra em relação ao seu plano orbital e o início das estações do ano.

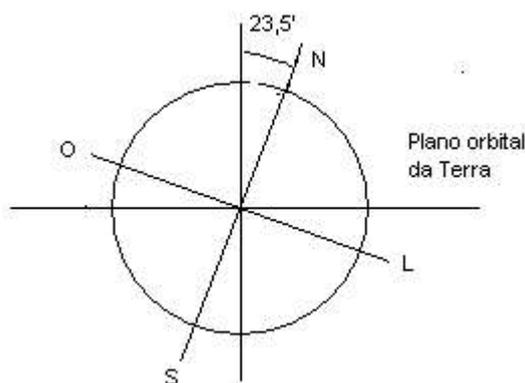


Figura 5. Inclinação da Terra em relação ao seu plano orbital supondo que este seja perpendicular ao plano da página.

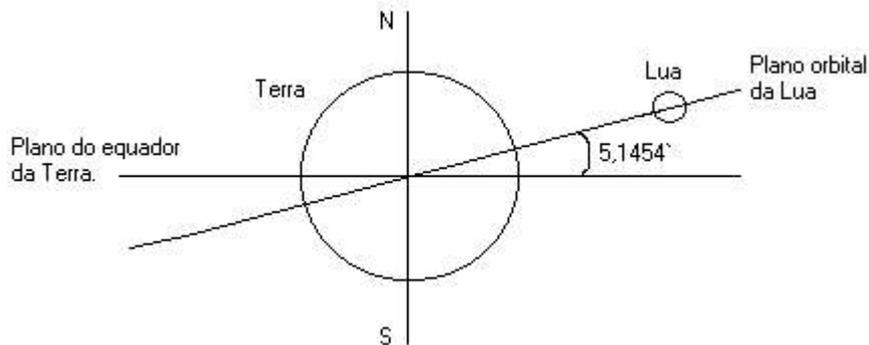


Figura 6. Inclinação da Lua com relação ao plano equatorial da Terra.

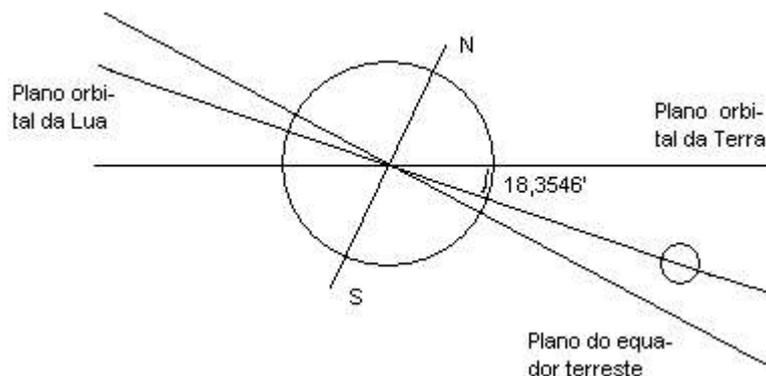


Figura 7. Posições relativas entre os planos orbitais da Terra e da Lua e do plano do equador terrestre. Todos os três planos da figura são perpendiculares ao plano da página.

A introdução das excentricidades da Terra e da Lua e da inclinação da Lua leva a um número infinito de configurações iniciais que podem ser tomadas para alimentar os programas que irão determinar a região de órbitas estáveis. No entanto, após efetuarmos vários testes com diferentes configurações iniciais verificamos que a posição relativa da Terra e da Lua em suas respectivas órbitas não afeta o resultado final.

A partir destas considerações nós definimos as condições iniciais dos quatro corpos considerados: Sol, Terra, Lua e partícula  $e$ , então, passamos a investigar, um a um, os efeitos das excentricidades da Terra e da Lua

e da inclinação da Lua sobre a região de estabilidade que define a família H2. A Figura 8 exibe cinco diagramas  $exa$  em função do tempo de captura na seguinte ordem: Figura 8.a diagrama  $exa$  considerando apenas a excentricidade da Terra, com a Lua em órbita circular sem inclinação; Figura 8.b diagrama  $exa$  considerando apenas a excentricidade da Lua, sem inclinação e com a Terra em órbita circular; Figura 8.c diagrama  $exa$  levando em conta apenas a inclinação da órbita da Lua em relação ao plano orbital da Terra, e com a Terra e a Lua em órbitas circulares; finalmente, a Figura 8.d mostra o diagrama  $exa$  considerando a excentricidade e a inclinação da Lua. Figura

8.e mostra o diagrama *eXa* levando em conta todos estes parâmetros ao mesmo tempo.

Nota-se, após uma análise comparativa entre os diagramas da Figura 8 e os diagramas da Figura 1, uma variação no tamanho da região de estabilidade definido pela família de órbitas estáveis H2. A excentricidade da Terra não afetou o tamanho da região de estabilidade, por outro lado, a excentricidade e a inclinação da Lua não contribuíram para diminuir ainda mais o tamanho da região de órbitas estáveis como também alteraram a estrutura do diagrama. São estas duas propriedades dinâmicas da órbita da Lua que determinam, de fato, a

forma e o tamanho da região de estabilidade como podemos observar comparando as Figuras 11.d e 11.e. Com relação ao tamanho da região de estabilidade, quando comparada com a região encontrada para o problema circular, planar, restrito de três corpos por Winter e Viera Neto (2002), Figura 1.a, verifica-se que ela ficou aproximadamente cinco vezes menor. Mesmo assim, e embora, tenhamos simulado um sistema dinâmico muito próximo do real, o tamanho da região de estabilidade é significativo o que viabiliza a utilização das trajetórias estáveis nela contidas em futuras missões com destino à Lua.

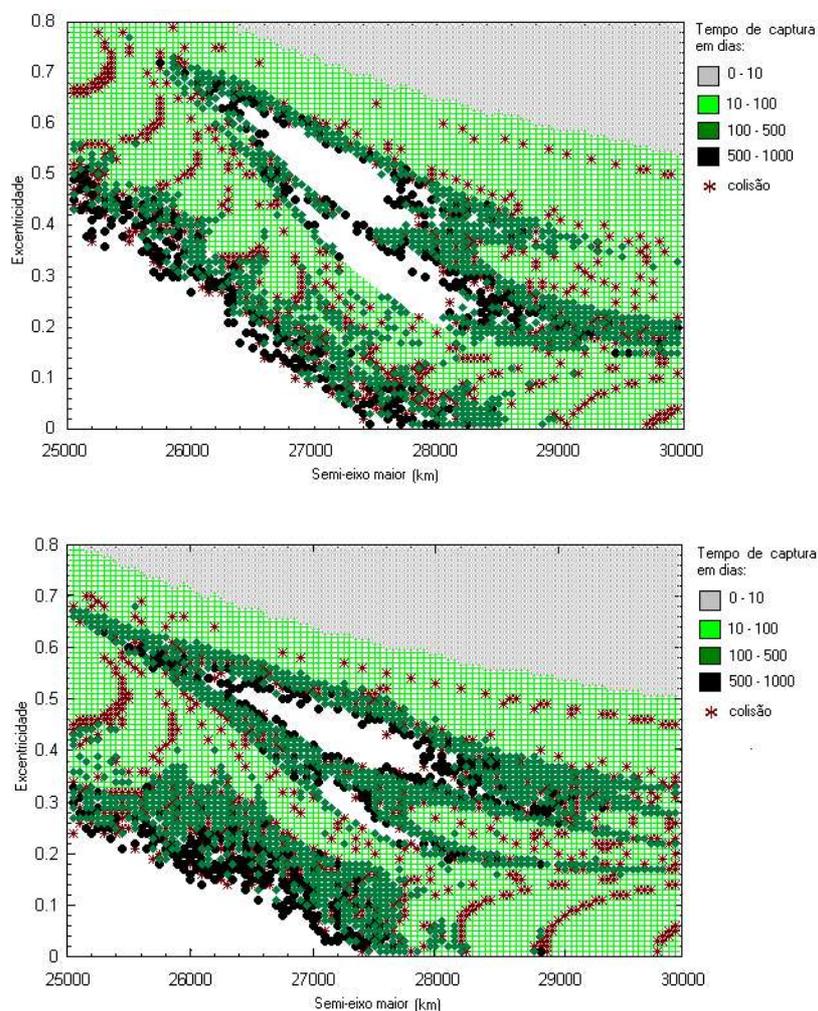


Figura 8. Regiões de estabilidade em termos do tempo de captura. Cada condição inicial tem seu tempo de captura indicado por um código de cores. As áreas brancas dentro das regiões coloridas correspondem a condições iniciais que permanecem capturadas para um período de integração de 1000 dias. O sistema dinâmico considerado é o problema restrito de quatro corpos levando em conta: (a) a excentricidade da Terra, (b) a excentricidade da Lua, (c) a inclinação da Lua, (d) a excentricidade e a inclinação da Lua, (e) todos juntos.

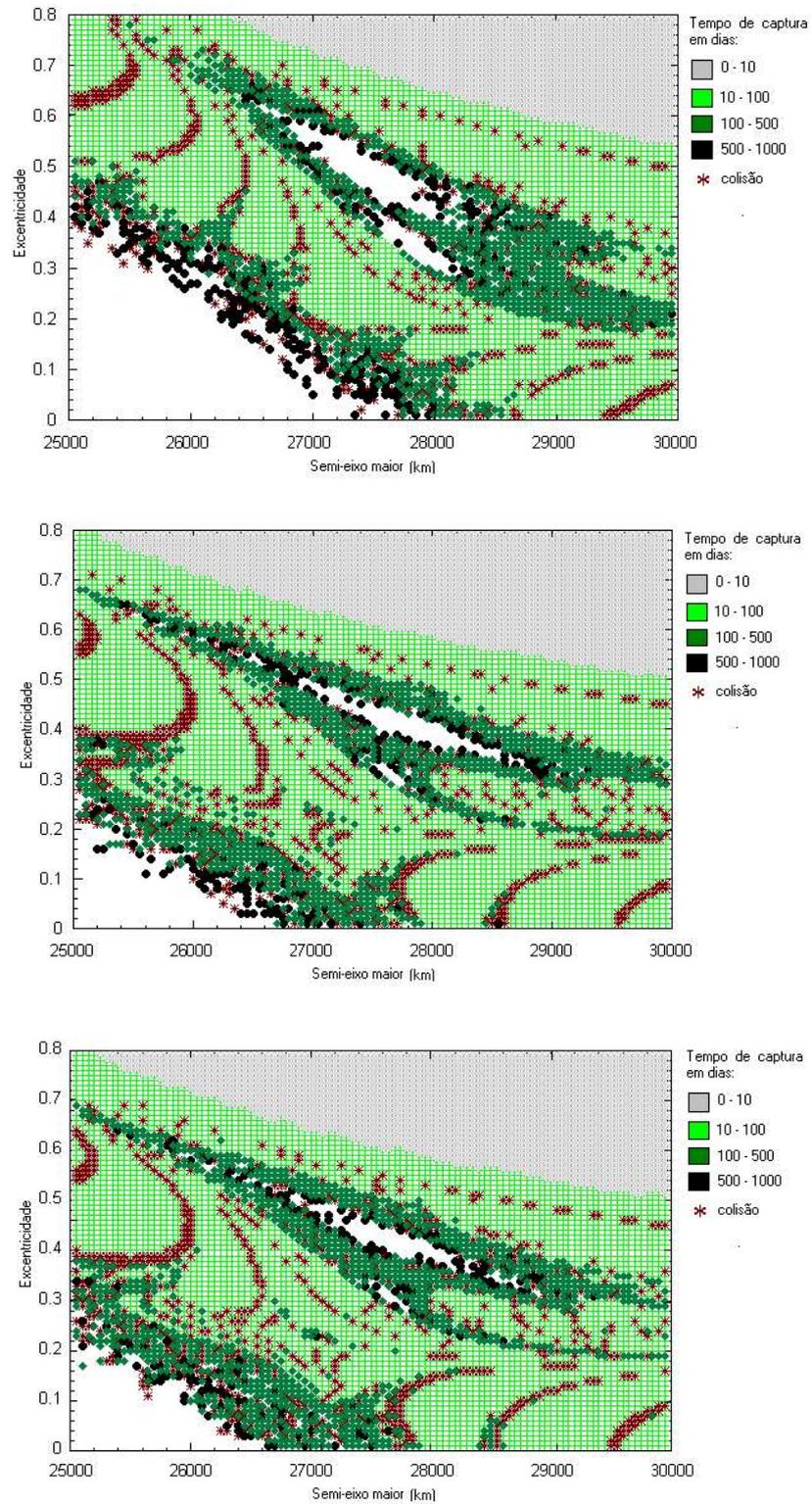


Figura 8. Continuação da página anterior.

Seguindo a mesma linha de Winter e Vieira Neto (2002) (seção1), mostraremos nas Figuras 12, 13, 14 e 15 o comportamento de quatro trajetórias em dois dos sistemas dinâmicos considerados – o sistema Terra-Lua-partícula (problema restrito de três corpos) na coluna da esquerda, e o sistema Sol-Terra- Lua-partícula- geral (com as excentricidades da Terra e da Lua e a inclinação da Lua) na coluna da direita. Nos mesmos moldes das Figuras 2 e 3, nós temos na primeira linha as trajetórias no sistema baricêntrico girante Terra- Lua por 1000 dias, na segunda e terceira linhas mostramos as variações do semi-eixo maior e da excentricidade para um tempo de 100 dias no sistema lunicêntrico, respectivamente. Na quarta linha mostramos as variações, também no sistema lunicêntrico da magnitude da velocidade em função do tempo também para 100 dias, porém, assim como para o semi-eixo maior e a excentricidade, o comportamento é o mesmo para o período de 1000 dias. Na quinta linha, temos a variação da inclinação da partícula em relação ao plano equatorial da Lua, para 100 dias na coluna da esquerda e 1000 dias na coluna da direita, mostrando que a inclinação da partícula aumenta de forma contínua e suave quando se considera o problema Sol-Terra- Lua-partícula- geral, ou seja, a órbita da partícula sai do plano e passa a “envolver a Lua”. Na Figura 9 mostramos a mesma trajetória da Figura 2 no sistema baricêntrico girante Terra- Lua cujas condições iniciais da órbita osculadora no sistema lunicêntrico são  $a = 27.751,7\text{km}$  e  $e = 0,3227$ . Esta trajetória é estável por mil dias no sistema Terra Lua-partícula, contudo, no sistema Sol-Terra- Lua-partícula- geral ela escapa da influência da Lua após 156 dias (para a Figura 9, a evolução temporal do semi-eixo maior, da excentricidade, da velocidade e a inclinação da partícula em relação à Lua são mostradas para um período de 160 dias). Na Figura 10

mostramos a mesma trajetória da Figura 3 a qual é estável em todos os dois sistemas dinâmicos considerados. Como se pode verificar, tanto na Figura 3 quanto na Figura 10 a órbita se torna mais larga, mesmo assim, ela ainda é uma trajetória estável dentro do parâmetro de estabilidade adotado. Na Figura 11, também mostramos uma órbita estável em todos os dois sistemas considerados.

Um fato interessante pode ser visto a partir da Figura 12, cujas condições da órbita osculadora inicial no sistema lunicêntrico são  $a = 27.200\text{ km}$  e  $e = 0,3100$ , escapa da influência da Lua em torno de 116 dias no sistema Terra- Lua-partícula, no entanto, quando consideramos o sistema Sol-Terra- Lua-partícula- geral, ela passa a ser uma trajetória estável dentro dos critérios de estabilidade considerados. Observando o diagrama 11.e verifica-se que as condições iniciais desta órbita pertence a uma pequena área branca localizada logo abaixo da área maior, ambas na região central do diagrama. Por outro lado, também podemos observar comparando os diagramas das Figuras 1.b e 11.e que esta pequena região de estabilidade presente no sistema Sol-Terra- Lua-partícula- geral não faz parte da região de estabilidade para o sistema Terra- Lua-partícula.

Os resultados exibidos nesta seção podem ser considerados satisfatórios, pois apesar de mostrarem nítida diminuição da região de estabilidade quando comparamos o caso mais simples, o problema restrito de três corpos Terra- Lua-partícula, Figura 1.a, com sistema dinâmico mais próximo do real, o problema Sol-Terra- Lua-partícula- geral, Figura 11.e, eles também mostram que as regiões finais ainda têm tamanhos expressivos. Os seja, as possibilidades de utilização das trajetórias estáveis pertencentes a estas regiões em futuras missões ao redor da Lua continuam existindo concretamente.

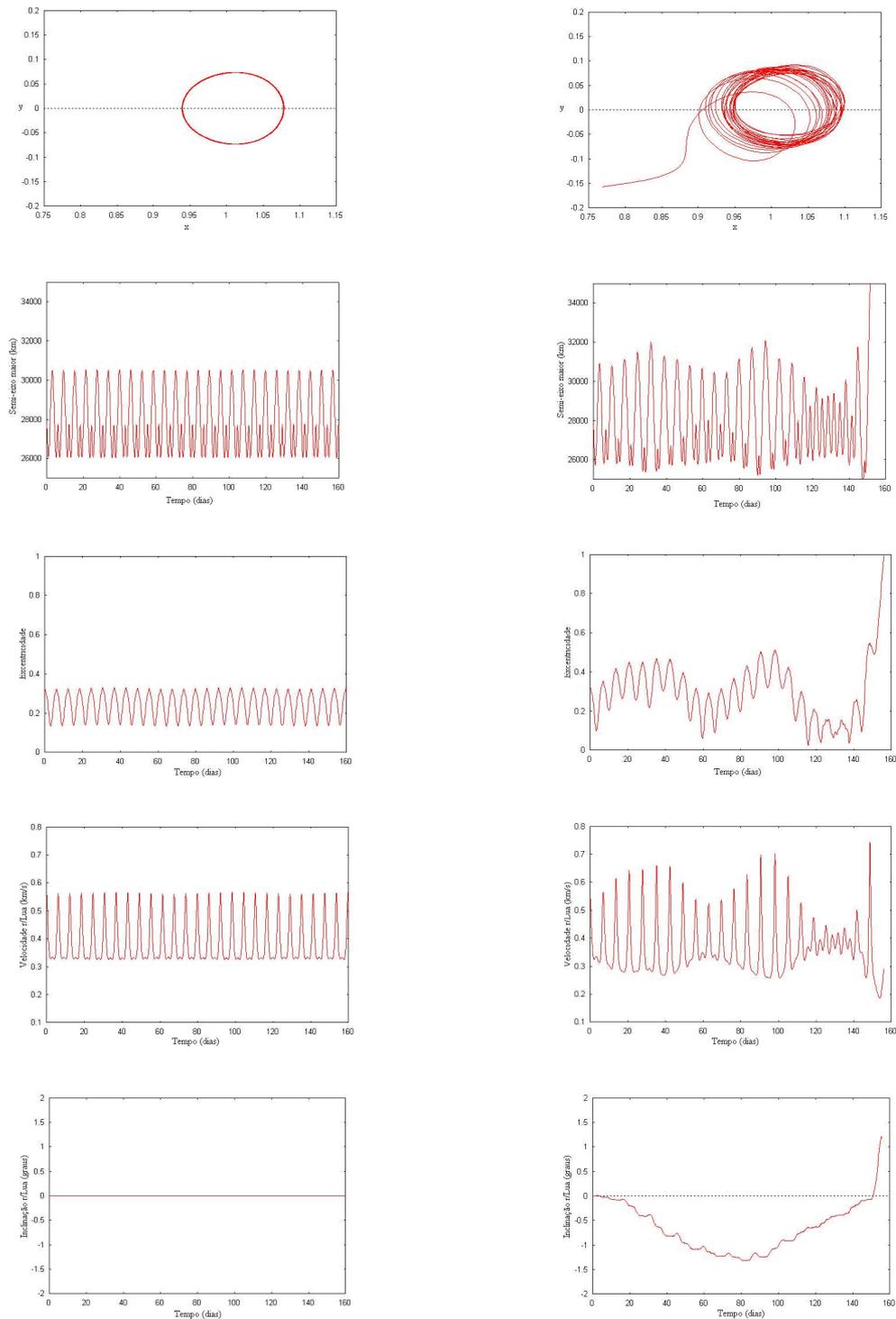


Figura 9. Exemplo de trajetória com condição inicial  $a = 27.751,7$  km e  $e = 0,3227$ ; a qual é estável no sistema dinâmico Terra- Lua-partícula e (coluna da esquerda), e escapa do domínio gravitacional da Lua em 156 dias no sistema dinâmico Sol- Terra- Lua-partícula- geral (coluna da direita). Na primeira linha é mostrada a trajetória no sistema baricêntrico girante Terra- Lua para 1000 dias. Nas linhas subsequentes, as variações do semi-eixo maior, da excentricidade e da velocidade da partícula no tempo, respectivamente, todos em relação à Lua. A quinta e última linha, mostra a variação no tempo para a inclinação da partícula em relação ao plano equatorial da Lua para 100 dias, na coluna da esquerda, e para 1000 dias na coluna da direita.

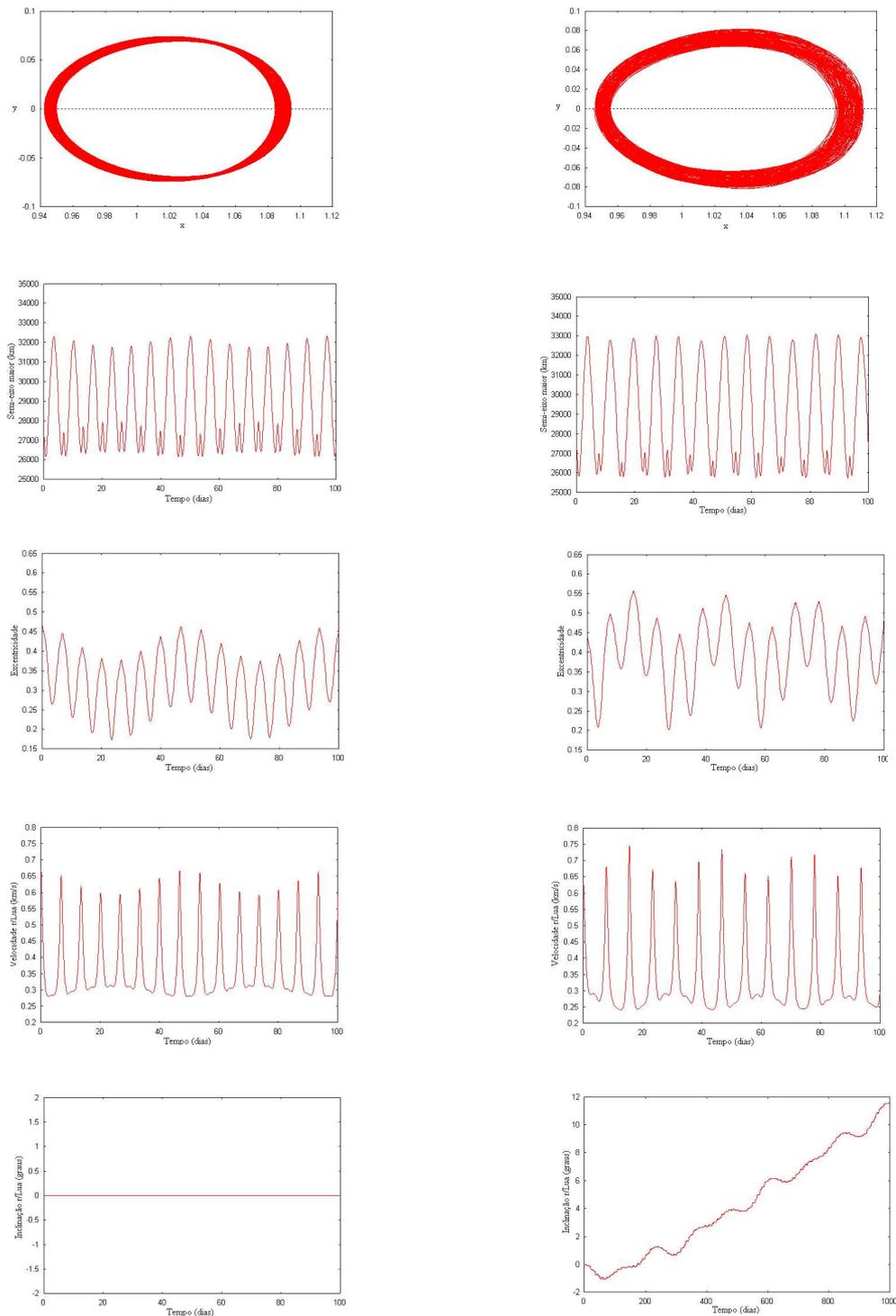


Figura 10. Exemplo de trajetória com condição inicial  $a = 27.248,3$  km e  $e = 0,4368$ ; a qual é estável nos dois sistemas dinâmicos considerados Terra- Lua-partícula e (coluna da esquerda), e Sol-Terra- Lua-partícula- geral (coluna da direita). Na primeira linha é mostrada a trajetória no sistema baricêntrico girante Terra- Lua para 1000 dias. Nas linhas subsequentes, as variações do semi-eixo maior, da excentricidade e da velocidade da partícula no tempo, respectivamente, todos em relação à Lua, para 100 dias, mas o comportamento é o mesmo para 1000 dias. A quinta e última linha, mostra a variação no tempo para a inclinação da partícula em relação ao plano equatorial da Lua para 100 dias, na coluna da esquerda, e para 1000 dias na coluna da direita.

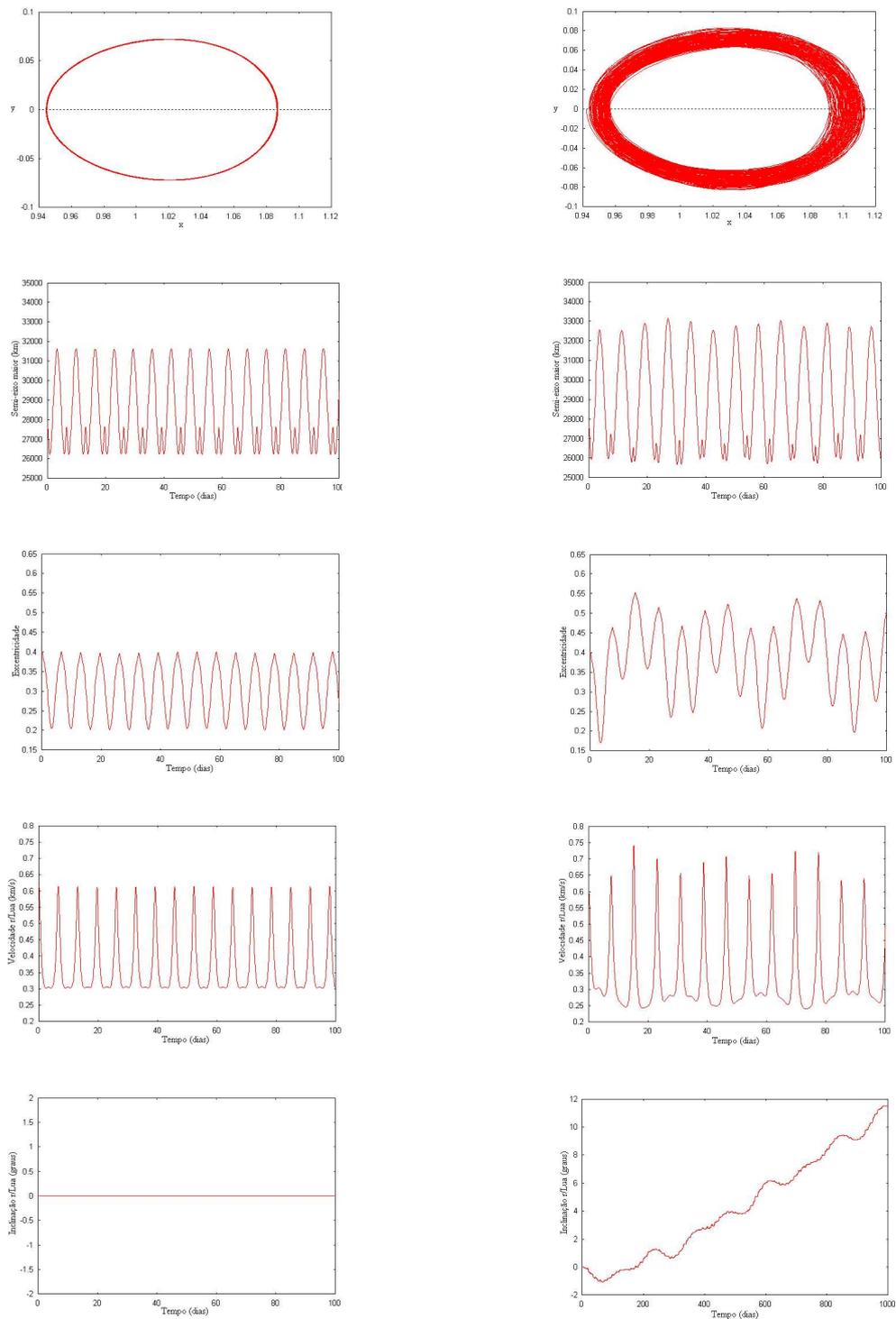


Figura 11. Exemplo de trajetória com condição inicial  $a = 27.600,0$  km e  $e = 0,4000$ ; a qual é estável nos dois sistemas dinâmicos considerados Terra- Lua-partícula e (coluna da esquerda), e Sol-Terra- Lua-partícula- geral (coluna da direita). Na primeira linha é mostrada a trajetória no sistema baricêntrico girante Terra- Lua para 1000 dias. Nas linhas subsequentes, as variações do semi- eixo maior, da excentricidade e da velocidade da partícula no tempo, respectivamente, todos em relação à Lua, para 100 dias, mas o comportamento é o mesmo para 1000 dias. A quinta e última linha, mostra a variação no tempo para a inclinação da partícula em relação ao plano equatorial da Lua para 100 dias, na coluna da esquerda, e para 1000 dias na coluna da direita.

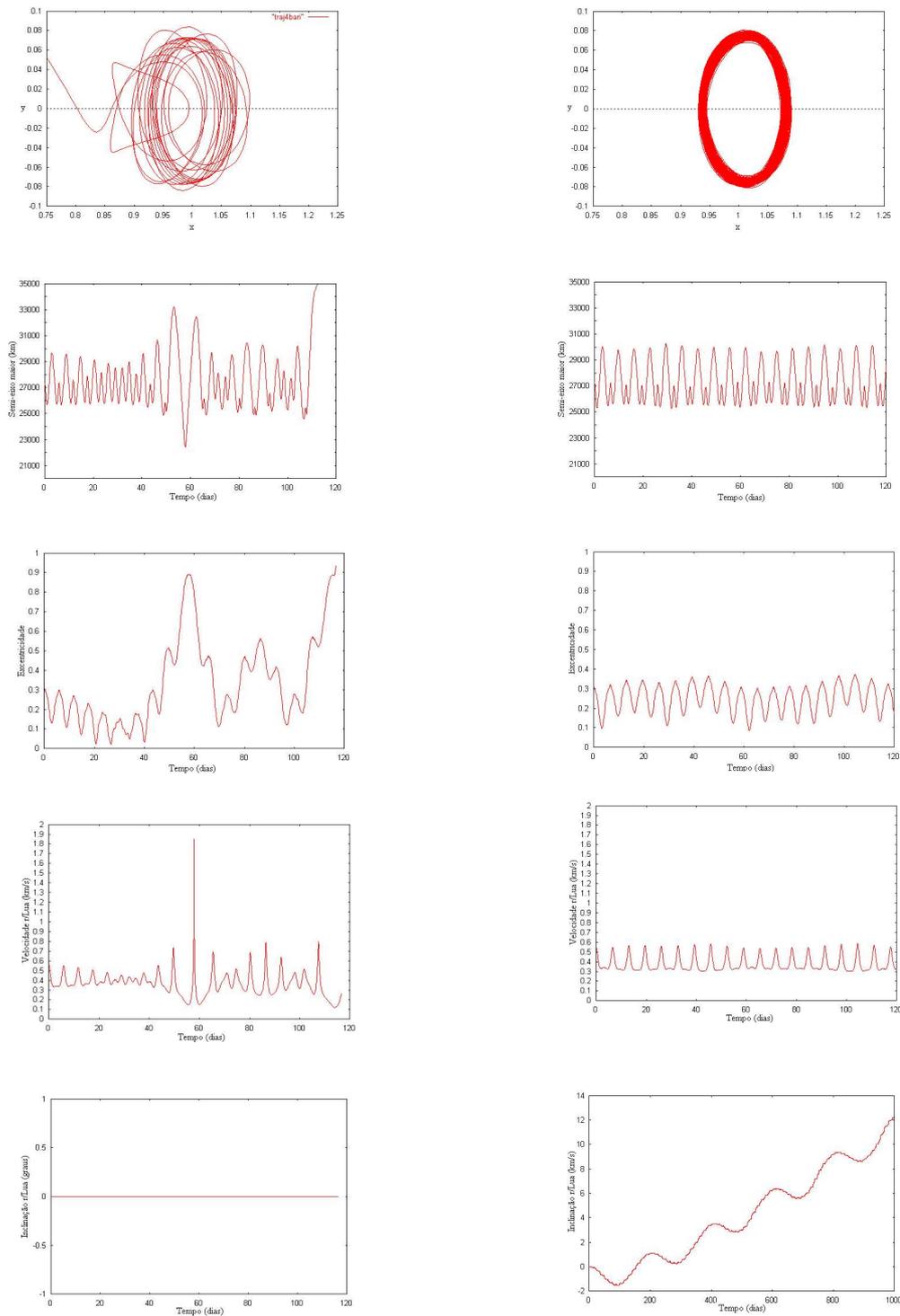


Figura 12. Exemplo de trajetória com condição inicial  $a = 27.300,0$  km e  $e = 0,3100$ ; a qual escapa do domínio gravitacional da Lua no sistema dinâmico Terra- Lua-partícula (coluna da esquerda) em torno de 116 dias, e é estável no sistema Sol-Terra- Lua-partícula- geral (coluna da direita). Na primeira linha é mostrada a trajetória no sistema baricêntrico girante Terra-Lua para 1000 dias. Nas linhas subsequentes, as variações do semi-eixo maior, da excentricidade e da velocidade da partícula no tempo, respectivamente, todos em relação à Lua, para 120 dias. A quinta e última linha, mostra a variação no tempo para a inclinação da partícula em relação ao plano equatorial da Lua para 120 dias, na coluna da esquerda, e para 1000 dias na coluna da direita.

### 2.3. Efeitos da Pressão de Radiação Solar

Veículos espaciais cuja razão entre sua área e sua massa é muito grande (área grande massa pequena) podem sofrer perturbações significativas em suas trajetórias devido à força de pressão de radiação solar. Esta força é causada pela troca de momento linear entre os fótons da radiação emitida pelo Sol quando estes colidem com a superfície externa do veículo. O momento linear transferido pelos fótons depende, basicamente, da distância entre o Sol e o veículo. Para um satélite em órbita da Terra, por exemplo, a intensidade da energia transferida é constante (não varia com a atividade solar) e vale, aproximadamente,  $1350 \text{ W/m}^2$ .

A razão entre a área efetiva do veículo exposta à radiação solar e a sua massa ( $A/m$ ) é um fator crítico e deve ser sempre considerado, pois varia de veículo para veículo. Uma razão muito alta pode afastar o veículo de sua trajetória original.

Um estudo mais detalhado sobre os efeitos da pressão de radiação mostra que a pressão de radiação solar causa variação senoidais de longo período nos elementos orbitais, em especial na excentricidade. A magnitude desta variação depende da razão entre a área do veículo exposta à radiação solar e sua massa. Para um satélite de comunicação geosíncrono, a variação na excentricidade é da ordem de 0,001 a 0,004 em seis meses.

Para estimar o quão destrutivos são os efeitos da pressão de radiação sobre as órbitas estáveis encontradas na subseção anterior, consideramos um caso extremo onde a razão  $A/m$  é considerada grande. Adotamos os parâmetros da sonda SMART-1 (Figura 13), onde o efeito da pressão de radiação pode ser bastante significativo.

Nosso objetivo é estimar a aceleração experimentada pela SMART-1 devido à pressão de radiação solar calculada a partir de um modelo padrão. A SMART-1 é uma sonda de 1m onde estão alojados os instrumentos científicos, sensores, motor iônico e etc. Acoplado ao cubo estão dois painéis de 14m de comprimento quando abertos capazes de fornecer 1900W de potência. A massa total da sonda é de 307kg. Para aplicarmos um modelo padrão, bem simplificado, vamos assumir as seguintes hipóteses: 1) a área efetiva da sonda exposta

à radiação solar é  $14 \text{ m}^2$ , e permanecerá com este valor constante por todo o período de integração como sua massa, assim, a razão  $A/m = 0,0456 \text{ m}^2/\text{kg}$ . 2) o coeficiente de eclipse também será constante e igual a 1 por toda integração e 3) consideraremos  $\eta = 2$ , isto é, consideraremos que toda radiação incidente sobre a sonda é refletida, o que não é verdade. Desta forma, estamos de fato superestimando a aceleração experimentada pela sonda. Assim, de acordo com este modelo, a aceleração estimada é aproximadamente  $4,1 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$ .

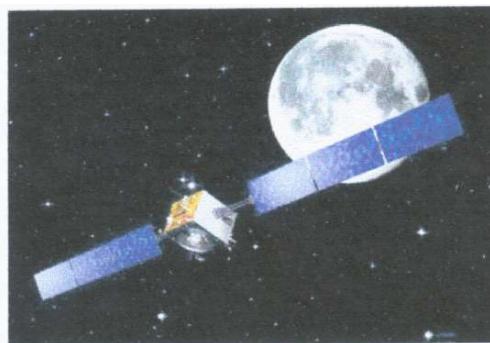


Figura 13. Ilustração da sonda SMART-1 com a Lua ao fundo (ESA).

Os resultados das investigações numéricas considerando esta aceleração nas equações de movimento podem ser vistos nas Figuras 14 e 15. Na Figura 14 mostramos dois diagramas *exa* em termos do tempo de captura para o sistema Sol-Terra-Lua-geral, sem a pressão de radiação (Figura 14.a) e com a aceleração devido a pressão de radiação (Figura 14.b). O diagrama da Figura 14.a é o mesmo da Figura 8.e, porém, com um zoom nas regiões de estabilidade. As diferenças entre os dois diagramas da Figura 14 são quase imperceptíveis em uma primeira observação, na verdade, são pequenos detalhes pontuais que diferem os dois diagramas. Na Figura 15, são exibidas as trajetórias de uma sonda com as características descritas acima no sistema baricêntrico girante Terra-Lua para os dois casos considerados: sem pressão de radiação solar (coluna da esquerda) e com a pressão de radiação (coluna da direita). As variações do semi-eixo maior e da excentricidade em relação à Lua estão na segunda e terceira linhas respectivamente. Notemos que os

efeitos da perturbação devido à pressão de radiação solar não podem ser vistos a partir das trajetórias nem tão pouco a partir das variações do semi-eixo maior e da excentricidade. Contudo, tomando um zoom em duas pequenas regiões dos gráficos do semi-eixo e da excentricidade, simbolizados pelos pequenos retângulos nos gráficos nós podemos ver a ordem de grandeza da perturbação. Na Figura 16.a mostramos o zoom dos gráficos da variação do semi-eixo no tempo superpostos. Em vermelho temos um “pico” representando o valor do semi-eixo de aproximadamente 33.423,57km em 91,11 dias sem a perturbação devido à pressão de radiação. Em verde, temos um “pico” ligeiramente maior com, aproximadamente, 33.425,5 km, e um pouco deslo-

cado para direita, em 91,15 dias. Isto quer dizer que a perturbação fez com que o valor máximo do semi-eixo maior, no intervalo de tempo considerado, fosse maior, cerca de 2km e ocorresse 57,6 minutos mais tarde. Com relação à excentricidade, verificamos, neste mesmo intervalo de tempo, uma variação da ordem de 0,00035, tal mostra a Figura 16.b.

Como podemos perceber, a perturbação devido à pressão de radiação solar não chega a causar efeitos significativos na trajetória de um veículo espacial com as características da SMART-1, nem é capaz de reduzir significativamente o tamanho das regiões de estabilidade da família H2.

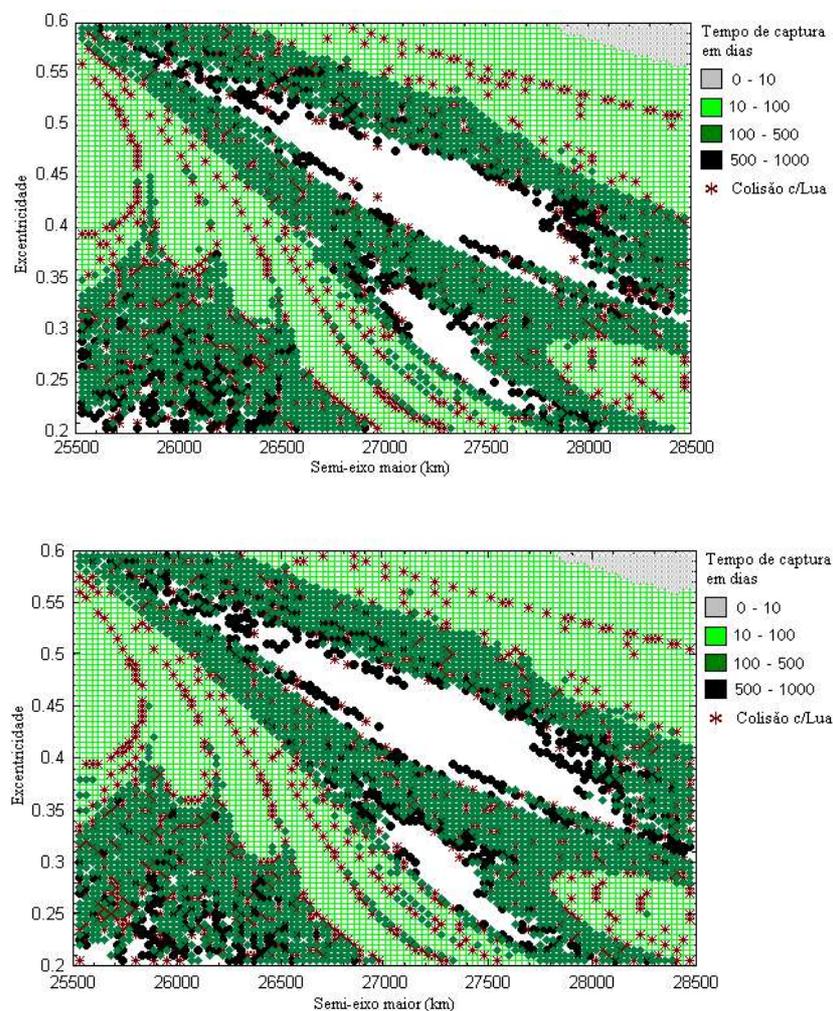


Figura 14. Diagramas *exa* em termos do tempo de captura: (a) para o sistema Sol-Terra- Lua-partícula- geral sem pressão de radiação solar, e (b) para sistema Sol-Terra- Lua-partícula- geral com pressão de radiação solar, para uma sonda com as características da SMART-1

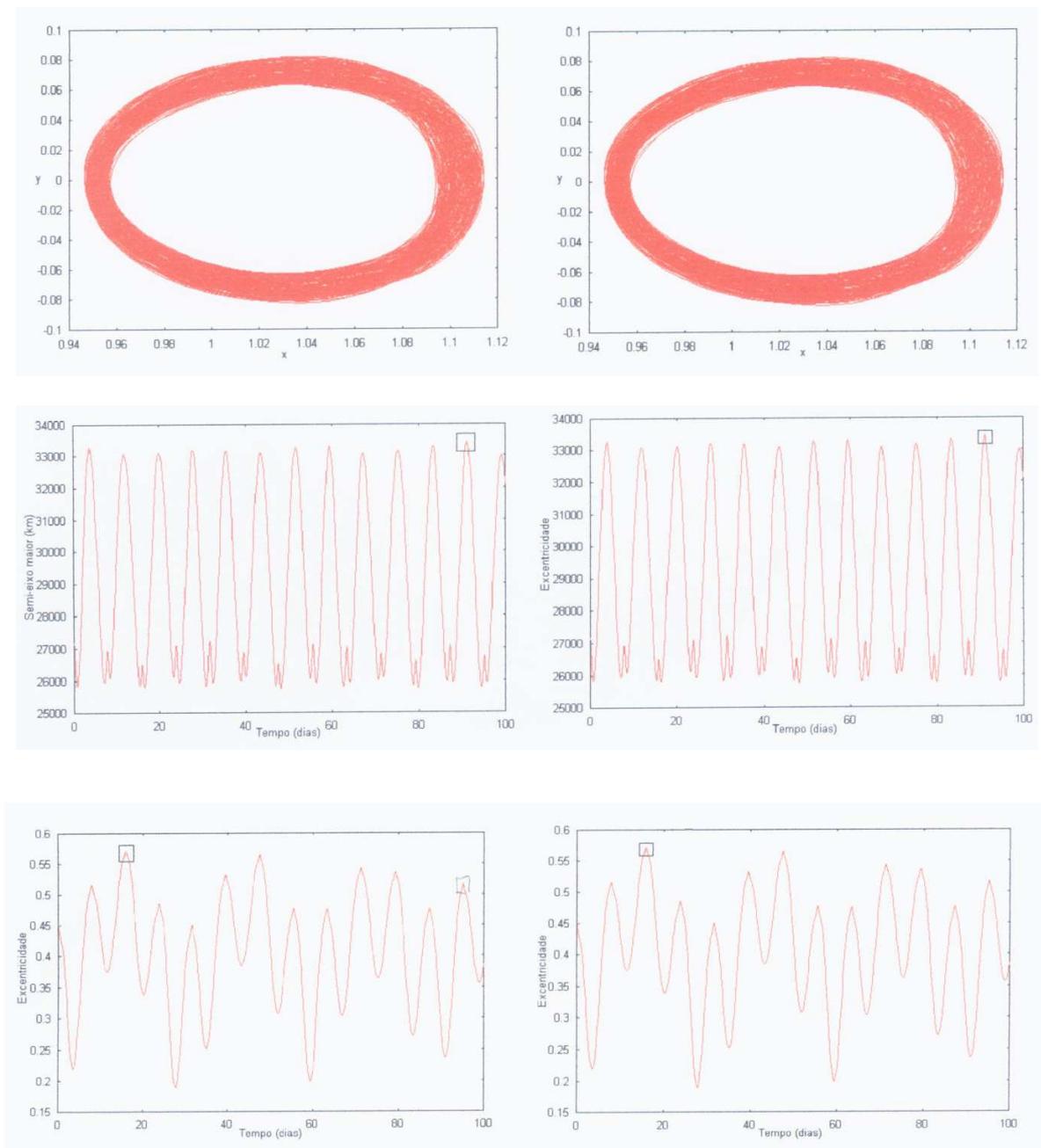


Figura 15. Exemplo de trajetória com condição inicial  $a = 27.200$  km e  $e = 0,4500$  estável no sistema Sol-Terra-Lua-partícula-geral sem levar em conta a pressão de radiação (coluna da esquerda) e com a pressão de radiação (coluna da direita).

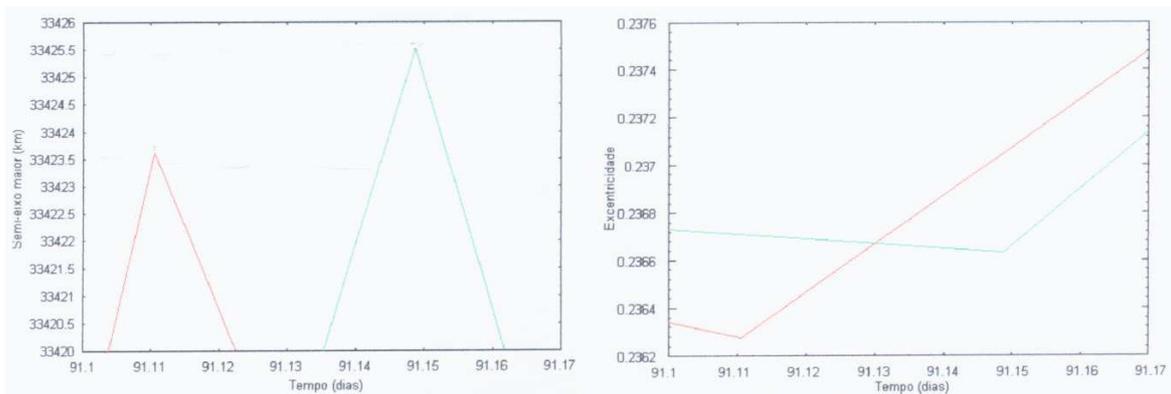


Figura 16. (a) Zoom de uma pequena região do gráfico da variação do semi-eixo maior no tempo sem a perturbação devido à pressão de radiação solar (linha vermelha) e com a pressão de radiação solar (linha verde) para o intervalo de tempo de 91,10 a 91,17 dias. Verifica-se uma diferença da ordem de 2km entre os valores máximos do semi-eixo maior neste intervalo de tempo, e também uma diferença no instante de tempo no qual cada pico ocorre, cerca de 56,7 minutos mais considerando a pressão de radiação. (b) Zoom da região correspondente ao mesmo intervalo de tempo da Figura 15.a, para a variação da excentricidade no tempo. Verifica-se que a variação de 2km no semi-eixo corresponde a uma variação de 0,00035 na excentricidade.

#### 2.4. Problema Tridimensional

A seguir apresentamos um conjunto de diagramas que mostram a evolução da região de estabilidade em função da inclinação das órbitas das sondas espaciais. Os diagramas são dados na Figura 17 de (a) até (r), sendo a variação de inclinações iniciais de 10 em 10 graus, respectivamente.

Os resultados mostram que a região de estabilidade só existe para órbitas muito próximas do plano, com menos de 30 graus de inclinação. A partir de 60 graus o espaço de condições iniciais é quase que completamente tomado por órbitas de colisão. Isto se explica em função da ressonância de Kozai que gera instabilidade para inclinações relativamente altas (Yokoyama et. al, 2003).

#### 2.5. Manobras Orbitais

Com os resultados das subseções anteriores chegamos ao ponto de delimitar precisa-

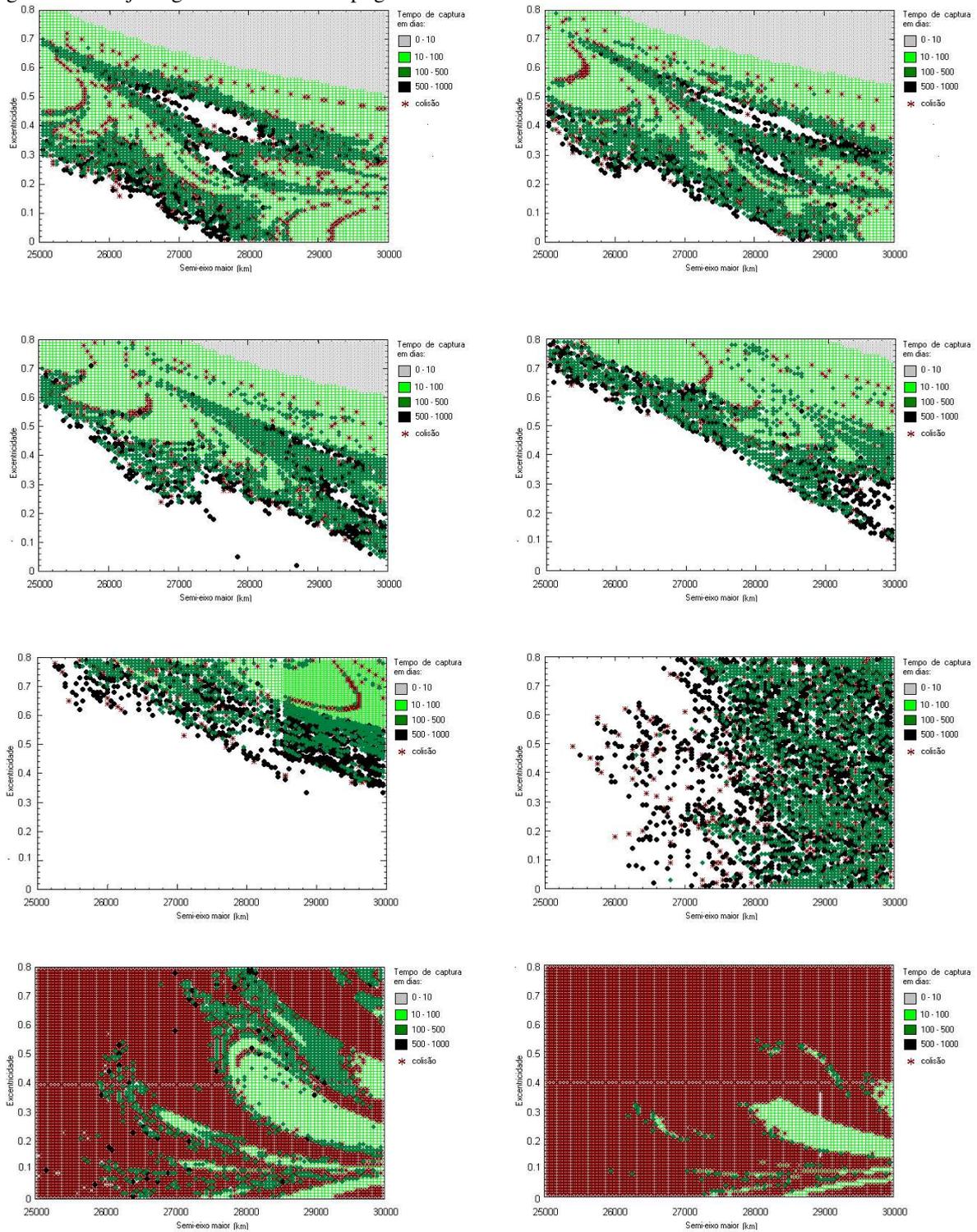
mente regiões de órbitas que são estáveis por período mínimo de 1000 dias. Neste contexto, a utilização destas órbitas estáveis ao redor da Lua possibilitará considerável economia de combustível propiciando o transporte de maior quantidade de carga útil. A economia se dá com as manobras de manutenção. Como as órbitas estão imersas em regiões de estabilidade, elas não necessitam de manutenção para se manterem nas vizinhanças das órbitas desejadas (estáveis por 1000 dias).

Com relação às manobras de aquisição, poderão ser adotados diversos tipos de abordagem, como a dos tempos de captura na vizinhança das regiões estáveis (Winter et. al, 2003).

#### Agradecimentos

Este trabalho contou com o suporte financeiro do CNPq, da Fapesp e da Capes.

Figura 17. Veja legenda na última página.



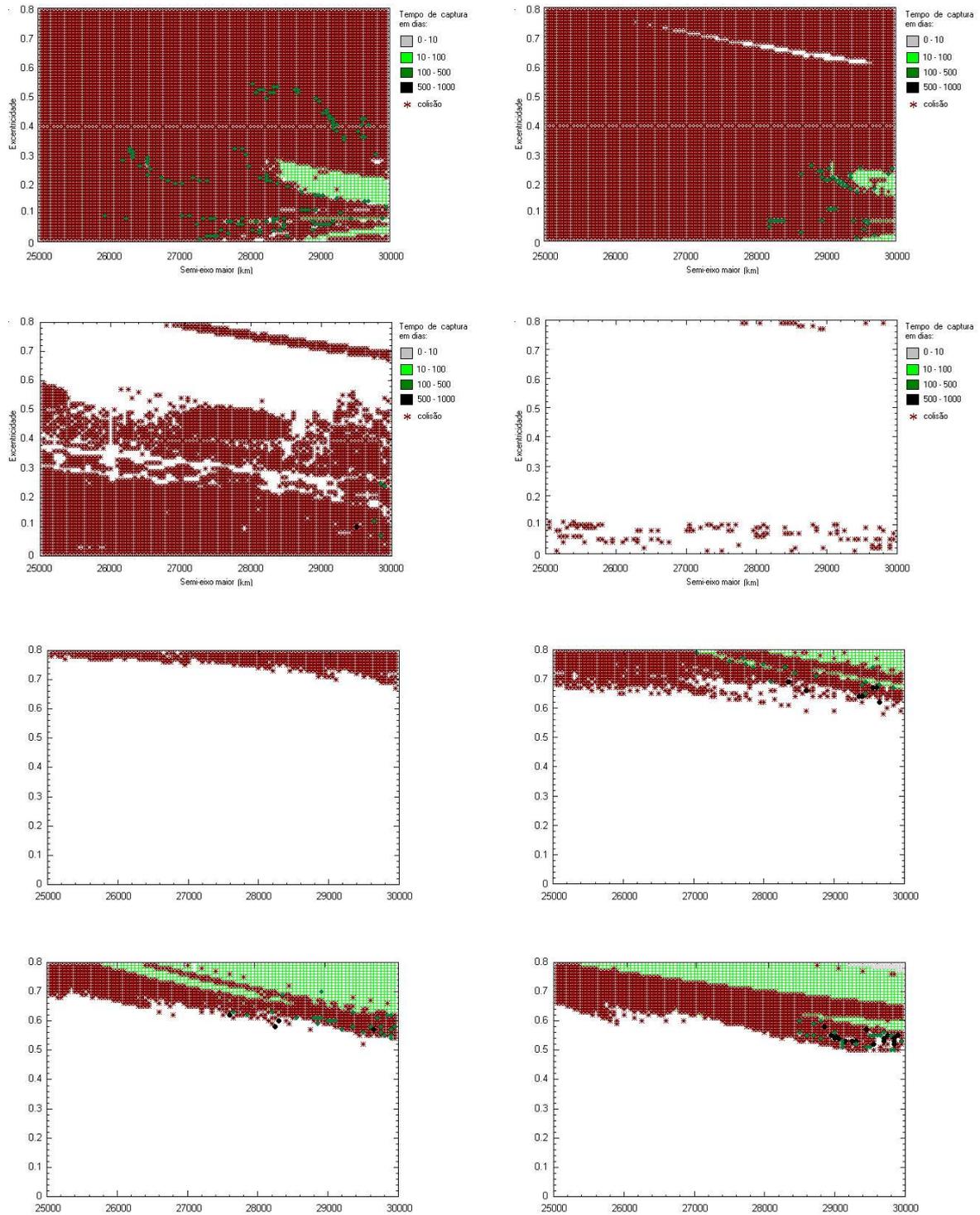
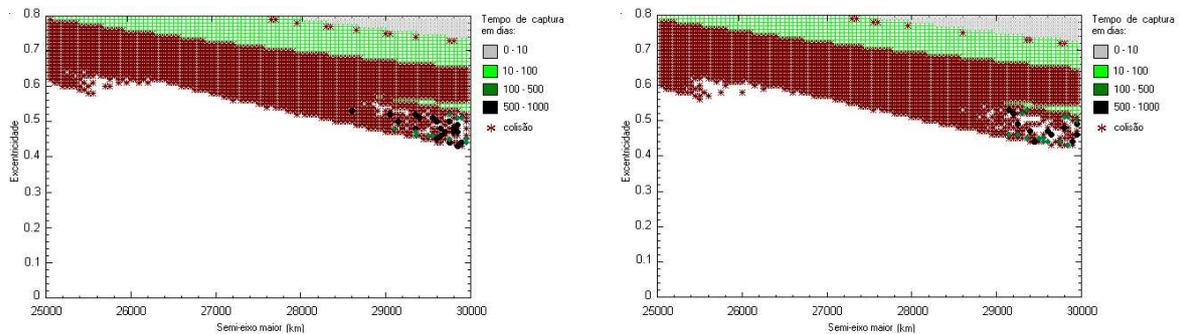


Figura 17. Veja legenda na última página.

Figura 17. Evolução da região de estabilidade em função da inclinação da órbitas das sondas espaciais. Os diagramas são dados de (a) até (r), sendo a variação de inclinações iniciais de 10 em 10 graus, respectivamente.



## Referências

Broucke, R. A., *Periodic Orbits in the Restricted Three-Body Problem With Ratio Earth-Moon Mass*, Techn. Rep. 32-1168, JPL, 1968.

Brunini, A., *On the Satellites Capture Problem. Capture and Stability Regions for Planetary Satellites*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **64**, 79-92, 1996.

Hénon, M., *Numerical Explorations of the Restricted Problem. VI Hill's case: Non-Periodic Orbits*, *A&A*, **9**, 24-36, 1970.

Huang, T.-Y. and Innanen, K. A., *The Gravitational Escape/Capture of Planetary Satellites*, **88**, 1537-1547, 1983.

Jefferys, W.H., *An Atlas of Section for the Restricted Problem of Three Bodies*. Univ. Texas, Austin, 1971.

Roy, A. E., *Orbital Motion 3<sup>rd</sup> ed.*, J. W. Arrowsmith Ltd., London, 1988.

Winter, O. C., *The Stability of a Family of Simple Periodic Orbits*, *Planet. Sp. Sci.*, **48**, 23-28, 2000.

Winter, O. C. and Vieira Neto, E., *Time Analysis for Temporary Gravitational Capture: Stable Orbits*, *A&A*, **377**, 1119-1127, 2001.

Winter, O. C. and Vieira Neto, E., *Distant Stable Direct Orbits Around the Moon*, *A&A*, **393**, 661-671, 2002.

Yokoyama, T., Santos, M.T., Cardin, G., Winter, O.C., *On the Orbits of the Outer Satellites of Jupiter*, *A&A*, **401**, 763-772, 2003.