



Sincronização, Escada do Diabo e Tempo de Atraso

Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni, Elbert E. N. Macau

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

12227-010, São José dos Campos, SP

E-mail: mariana@lac.inpe.br, elbert@lac.inpe.br

Resumo: *Um dos fenômenos mais interessantes da dinâmica não-linear é o de sincronização entre dois osciladores, que se caracteriza pelo fenômeno de travamento de frequência. Seja o caso de um pêndulo sob a ação de uma força externa periódica. O fenômeno do travamento de frequência acontece quando a razão entre as frequências de oscilação do pêndulo e da força externa torna-se travados na razão p/q de dois inteiros, dentro de algum intervalo finito de valores de parâmetros. Neste trabalho foi usado o mapa do círculo para caracterizar esse fenômeno. Através dele é possível obter duas estruturas: a Escada do Diabo e Arnold Tongues. Em ambas é possível verificar a sincronização e estabelecer uma relação entre o fenômeno e os números racionais e irracionais. Além disso, se o tempo de iteração não for desprezível, analisa-se qual o efeito deste tempo sobre a sincronização e como essas estruturas se modificarão, também com relação aos números racionais.*

Palavras-chave: sincronização, travamento de frequência, escada do diabo, Arnold tongues.

Introdução e Motivação

Um dos fenômenos mais interessantes da dinâmica não-linear é o de sincronização entre dois osciladores que se caracteriza pelo fenômeno de travamento de frequência que se mantém robusto dentro de um limite de variações de parâmetros. Seja o caso de um pêndulo sob a ação de uma força externa periódica. O fenômeno do travamento de frequência acontece quando a razão de frequência do pendulo para da força externa torna-se travado está na razão p/q de dois inteiros, acima de algum domínio finito de valores de parâmetros^[1].

Este fenômeno é similar ao observado por Christian Huygens no século dezessete: a sincronização de dois relógios em uma mesma parede. Um acessório comum às duas paredes pode ter fornecido um acoplamento dos relógios para cada um^[1].

Este trabalho estabelece uma relação entre a sincronização e os números racionais e irracionais, através do estudo das estruturas: Escada do Diabo e Arnold Tongues obtidas através do Mapa do Círculo e a influencia do tempo de propagação do sinal entre os osciladores.

O Mapa do Círculo

Este fenômeno de sincronização pode ser adequadamente modelado pelo mapa do círculo^[1]. A equação de diferenças de um mapa do círculo conhecido como mapa padrão é:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - (K/2\pi) \sin(2\pi\theta_n) \text{ mod } 1$$

O parâmetro Ω é a frequência de rotação (número de rotação) na ausência de não-linearidade. Esse acoplamento não linear pode modificar o ângulo por interação^[4].

Para uma certa série de amplitudes forçadas e frequências, um mapa do círculo pode ser uma razoável aproximação para um pêndulo excitado por uma força externa periódica^[1].

Número de Rotação

Para obtermos um sentido do comportamento do mapa padrão, omitiremos o termo não-linear ajustando $K = 0$. O mapa reduz-se à

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega$$

Usaremos os valores $\Omega = 0.4, 0.404004\dots$, $K = 0.95$ e condição inicial $\theta_0 = 0.3$ para exemplificar o comportamento deste mapa.

Para $\Omega = 0.4$ e $K = 0$ com $\theta_0 = 0.3$, temos:

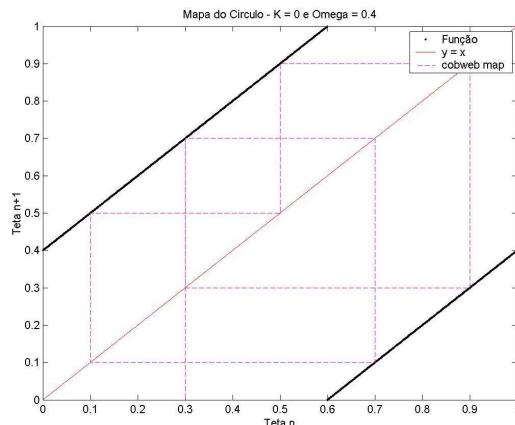


Figura 1: Mapa do círculo com $\Omega = 0.4$ e $\theta_0 = 0.3$

Percebe-se, na Figura 1, que após cinco iterações, retornamos a condição inicial, tendo feito duas voltas. O número de rotação, W , é $2/5$, igual a Ω . Neste caso, temos um movimento periódico.

Para $\Omega = 0.4040040004\dots$ e $K = 0$ com $\theta_0 = 0.3$, temos:

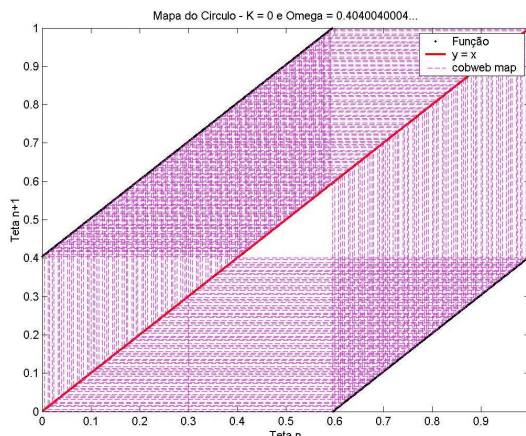


Figura 2: Mapa do círculo com $\Omega = 0.4040040004\dots$ e $\theta_0 = 0.3$

A Figura 2, após 200 iterações, mostra um movimento quase-periódico onde θ não retorna exatamente a condição inicial, mas essa órbita permanece fechada no intervalo $[0,1]$. Neste caso, o número de rotação é irracional ($W=\Omega$).

Para $\Omega = 0.4040040004\dots$ e $K = 0.95$ com $\theta_0 = 0.4$, temos:

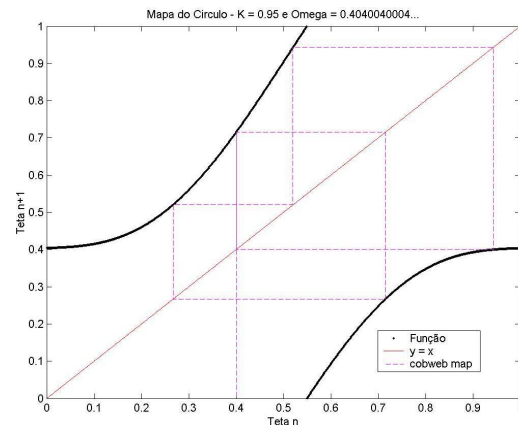


Figura 3: Mapa do círculo com $\Omega = 0.4040040004\dots$, $K=0.95$ e $\theta_0 = 0.4$

Neste caso, apesar de Ω ser um número irracional, o movimento apresentou periodicidade, pois em $K=0.95$ o mapa é ainda inversível^[1].

Logo, temos que se o número de rotação é um número racional, então o mapa é cíclico ou periódico (como na Figura 1). Se o número de rotação for um número irracional, então θ não retorna exatamente a condição inicial e o movimento é denominado quase-periódico (Figura 2). O ângulo vem arbitrariamente fechando para algum valor particular se n é suficientemente grande. Travamento de frequência ocorre quando o termo não-linear é adicionado, sustentando o movimento periódico inclusive quando Ω for irracional (Figura 3).

Além disso, percebe-se na Figura 3 que o movimento se repete após cinco iterações. O número de rotação mede a mudança média de fase por iteração. Para $K \neq 0$, ele não é igual a Ω , sendo definido geralmente como:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\theta_n - \theta_0}{n} \right)$$

O termo não-linear muda a forma de representação da função. Note que para $K = 0.95$, o mapa ainda é inversível.

Números Racionais e Sincronização: Arnold Tongues e Escada do Diabo

Há um número infinito de intervalos de travamento de frequência. Há também um número infinito de números de rotação racionais. Conforme Ω varia em K fixo, o mapa mostra os movimentos periódicos e quase-periódicos^[1]. Esse comportamento, onde as larguras em Ω das várias regiões onde o número de rotação varia conforme aumenta K , é mostrado na Figura 4. Esse resultado é chamado de “Arnold

tongues” em homenagem ao matemático russo que descobriu essa estrutura^[1].

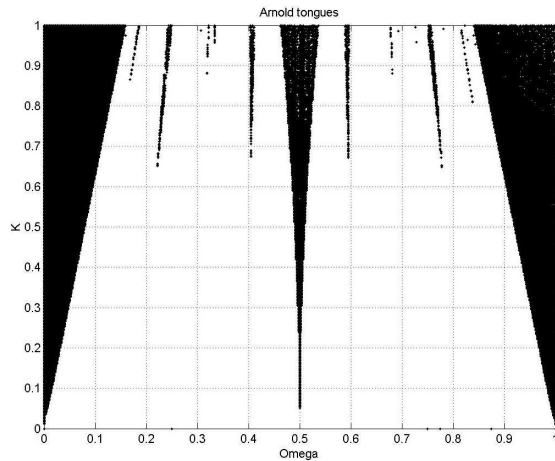
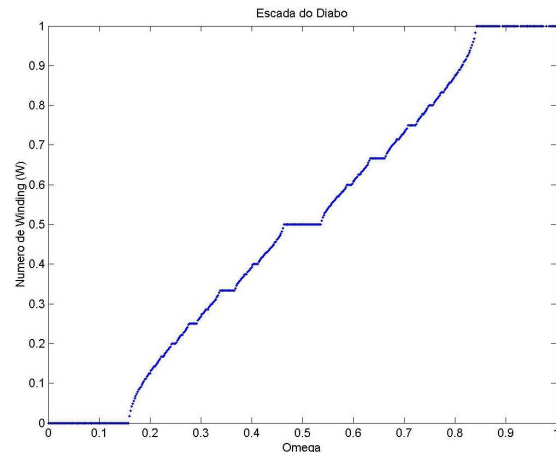


Figura 4: Arnold Tongues

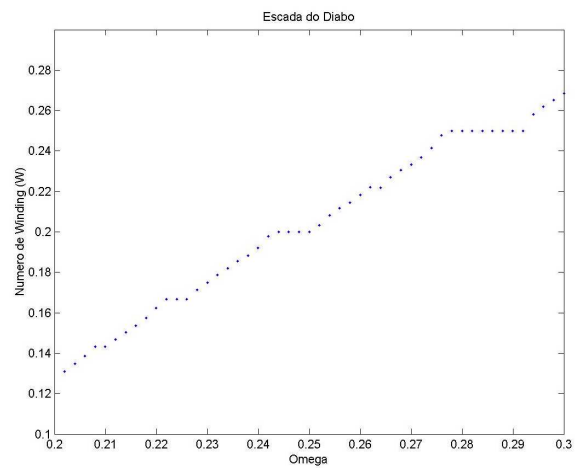
Nessa figura, os pontos pretos são o movimento periódico (número de rotação racional) e os pontos brancos, o movimento quase-periódico (número de rotação irracional).

Para $0 < K < 1$ o número de rotação fica em cada número racional p/q em um intervalo não-nulo de Ω . Para $K = 0$, todos os intervalos são pequenos, assim a probabilidade que o número de rotação para um valor randômico de Ω racional é quase zero, isto é, a probabilidade de acertar ao acaso um número de rotação irracional é quase um. Entretanto com o aumento de K , a largura de todos os intervalos de travamento de frequência aumenta, assim para $K = 1/2$ a probabilidade de observarmos números de rotação racionais e irracionais são quase iguais (Figura 4). Para $K \sim 1$ a probabilidade de encontrarmos um número de rotação racional é quase 1. Em $K = 1$ o conjunto dos intervalos racionais é um fractal, um conjunto de Cantor de medida zero^[4]. Fazendo W versus Ω , temos uma curva que mostra a repetição de padrões. Tal curva é dita auto-similar. Essa estrutura é chamada Escada do Diabo.

Essa repetição de padrões corresponde aos números de rotação racionais. Ela representa a sincronização dos dois osciladores. Entre duas soluções periódicas, caracterizadas por números de rotação racionais, existe uma solução periódica com um período mínimo^[4]. O mapa desenvolve mínimo e máximo local e, portanto torna-se não inversível para $K > 1$ (Figura 6), uma condição necessária para comportamento caótico^[1].



a)



b)

Figura 5: Escada do diabo. a) $0 < \Omega, K < 1$, b) Zoom ($0.2 < \Omega < 0.3$ e $0.1 < K < 0.3$)

Como consequência caos pode ser observado para alguns valores de Ω , onde a serie comporta-se irregularmente.

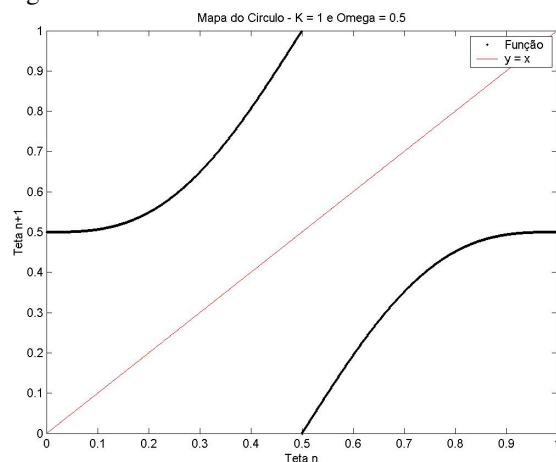


Figura 6: Mapa do círculo com $\Omega = 0.5$ e $K = 1$.



Racionais e Irracionais: um método numérico

Como já vimos anteriormente, quando o número de rotação é racional, temos movimento periódico (sincronização) e quando ele é irracional temos movimento quase-periódico. Para a visualização desse comportamento usa-se a estrutura ‘Arnold Tongues’, que é um espaço de parâmetros (Ω, K) . Nessa estrutura (Figura 4), marcou-se o movimento periódico com pontos pretos e o movimento quase-periódico com pontos brancos. Desta forma, os pontos pretos são os números de rotação racionais, assim como os pontos brancos são os números de rotação irracionais.

Mas como implementar um algoritmo para diferenciar os números racionais dos números irracionais?

O conjunto dos números racional é definido como o conjunto dos números que podem ser obtidos como frações, ou seja, todo número que pode ser colocado na forma p/q onde p e q são números inteiros e $q \neq 0$. Já os números irracionais são aqueles que não podem ser colocados nessa forma^[3].

No conjunto dos números racionais estão os números inteiros, os decimais e as dízimas periódicas. As representações decimais de um racional são necessariamente de dois tipos: ou possuem uma quantidade finita de casas decimais, ou “terminam” em uma dízima periódica. Logo, uma representação decimal para um número irracional tem necessariamente que ser uma dízima não-periódica^[3].

Isto significa que podemos dispor os números racionais numa sucessão da forma r_1, r_2, r_3, \dots com uma infinidade de elementos. Pode-se interpretar este fato dizendo-se que a quantidade de números racionais, embora sendo infinita, é uma ordem de infinidade equivalente a dos números naturais (o argumento para a demonstração desse fato é devido a Georg Cantor). Essa representação como fração p/q é única com p e q inteiros positivos primos entre si, basta que saibamos enumerar os pares ordenados (p, q) de naturais primos entre si^[3].

Todo número irracional positivo possui uma representação decimal única por meio de uma dízima não-periódica. Isto significa que não podemos dispor os números irracionais numa sucessão, mesmo admitindo uma infinidade de elementos. Diferentemente dos racionais, a ‘ordem de infinidade’ da quantidade dos números irracionais é maior que a dos números naturais. Daí pode-se concluir, de uma certa forma, que existem muito mais números irracionais do que racionais^[3].

Usando o fato do período nas dízimas para números racionais, podemos estabelecer um método para encontrarmos números racionais e irracionais, estabelecendo uma exatidão na busca para valores racionais.

Reproduzindo a Escada do Diabo

Para a obtenção da escada do Diabo, que representa as soluções periódicas e quase-periódicas do número de rotação para K fixo e Ω variando, aplicou-se o mapa do círculo para $K = 1$ e $\Omega = [0, 1]$ desprezando os transientes iniciais (Figura 5).

Reproduzindo Arnold Tongues

Para a obtenção da estrutura ‘Arnold Tongues’ necessita-se, na obtenção da escada do Diabo, variar também o K . Neste caso, vamos utilizar $K = [0, 1]$. Logo, a escada do Diabo em duas dimensões é:

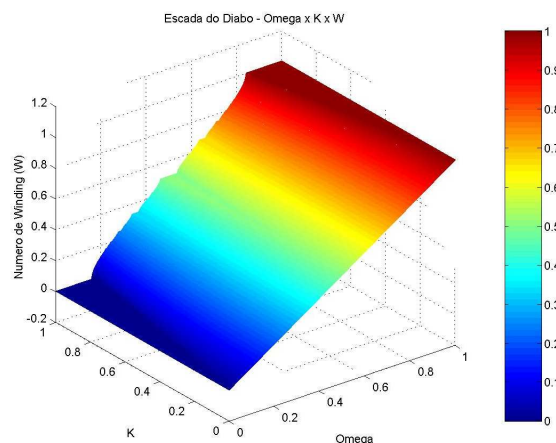


Figura 7: Escada do Diabo em duas dimensões

Assim, com a matriz formada pelos números de rotação obtidos variando K e Ω , podemos tentar encontrar nela quais deles são racionais.

Para encontra-los trabalharemos com o período das dízimas, ou seja, sabe-se que os números racionais ou são inteiros (que não é o caso), ou são decimais ou são dízimas com período finito.

Assim foi feita uma busca no intervalo considerado pelos parâmetros K e Ω $[0, 1]$, comparando cada elemento desse intervalo (dentro de um intervalo 10^{-3}) com todos os valores da matriz de números de rotação, procurando os números dentro de uma determinada precisão.

Por exemplo, suponhamos que nossa matriz de números de rotação seja:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.967854358\dots & 0.4 \\ 0.89573216\dots & 0.3 & 0.889278963258\dots \\ 0 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

e a nossa precisão seja 10^{-5} .

Assim, no intervalo dos parâmetros K e Ω $[0, 1]$ procuraremos os índices desses respectivos vetores cujos valores são os números racionais da matriz A . Nosso primeiro valor do intervalo $[0, 1]$ é 0 . Então



buscaremos os valores tais que sejam maiores ou iguais a $(0-10^{-5})$ e menores ou iguais a $(0+10^{-5})$. Dessa forma estamos procurando a região onde há sincronização (presença de números racionais). Na nossa matriz o único valor é θ . Assim aparecerá o ponto na estrutura cujos dois vetores apresentam o valor zero. O próximo passo pode ser ao redor de 0.1 , ou seja, os valores da matriz que estão no intervalo $[0.1-10^{-5}, 0.1+10^{-5}]$. Nesse caso, o método não encontra nenhum valor dentro da precisão, pois na nossa matriz de rotação A não tem nenhum número racional dentro desse intervalo, ou seja, não encontrou, nesse intervalo, uma região de sincronização. Agora, analisa-se o próximo valor, 0.2 . Ou seja, segundo a nossa precisão, o método varrerá o intervalo $[0.2-10^{-5}, 0.2+10^{-5}]$ e encontrará na nossa matriz A o número 0.2 e marcará na estrutura a posição cujos dois vetores apresentam este valor. Continuando assim, o último passo será ao redor de 1 , ou seja, os valores no intervalo $[1-10^{-5}, 1+10^{-5}]$, onde o método também encontrará um ponto.

Desta maneira, estaremos encontrando os números racionais que possuem representação única como fração (decimais e dízimas periódicas). A adoção da precisão decorre dos períodos das dízimas periódicas, ou seja, para 10^{-5} temos dízimas com período 5. Assim há a necessidade de maior precisão.

O efeito do tempo de atraso no sistema

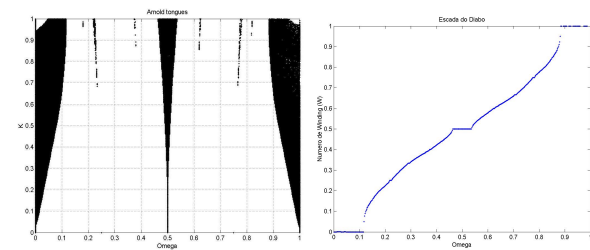
As estruturas desenvolvidas acima (Arnold Tongues e Escada do Diabo) exemplificam a idéia de dois osciladores com iterações instantâneas. Mas, se o tempo de iteração não for desprezível, ou seja, se houver uma força externa que cause entre esses dois osciladores um tempo de atraso, qual será o efeito deste tempo sobre a sincronização? Como as estruturas se modificarão? Para investigar este tipo de comportamento, inserimos um tempo de atraso no sistema, ou seja, o mapa do círculo com tempo de atraso será dado por:

$$\theta_{n+1} = \theta_{n-T} + \Omega - (K/2\pi) \sin(2\pi\theta_n) \text{ mod } 1$$

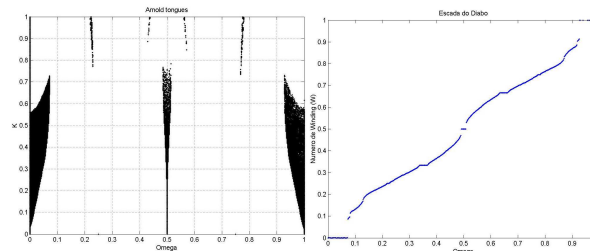
onde T é o tempo de atraso inserido no sistema.

Os resultados com relação as estruturas para $T = 1, 2, 3, 4, 5, 10$ são mostrados abaixo:

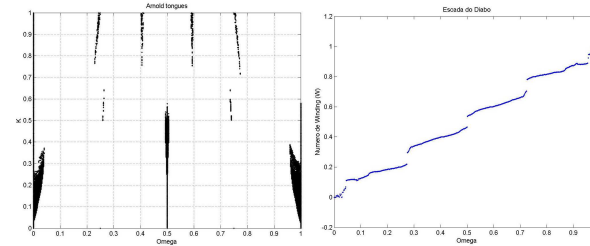
$T = 1$



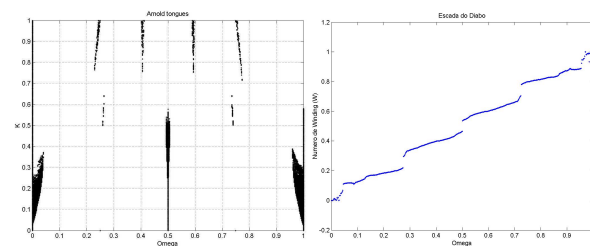
$T = 2$



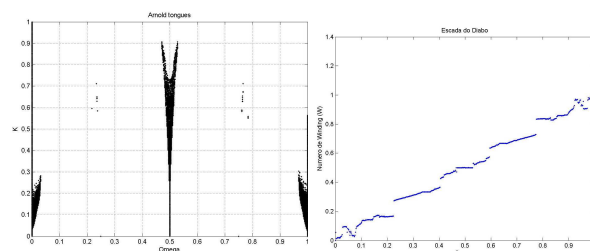
$T = 3$



$T = 4$

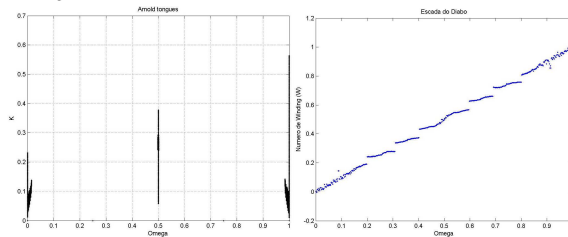


$T = 5$





T = 10



Pode-se notar que conforme aumentamos o atraso mais difícil fica de encontrarmos uma região de sincronização (intervalo com números de rotação racionais – movimento periódico), ou seja, maior o número de números de rotação irracionais (movimento quase periódico).

Conclusão

Através do mapa círculo, pode-se investigar a sincronização de dois osciladores.

Essa sincronização pode ser vista na estrutura da Escada do Diabo, que apresenta os períodos de sincronização, na repetição dos padrões. Esses períodos de sincronização são números de rotação racionais (movimento periódico). Quando temos número de rotação irracional, temos um movimento quase-periódico, e não há sincronização.

Com o tempo de atraso fica mais difícil de encontrarmos uma região de sincronização. Isso fica ainda mais visível quando $T=10$. Ou seja, os intervalos de sincronização ficam mais “raros” conforme se aumenta o tempo de atraso.

Esse fenômeno pode ser observado em diferentes tipos de mapas que representam sistemas dinâmicos. Mas é muito mais fácil identificar soluções periódicas, quase-periódicas, e caóticas iterando o mapa do que por uma integração numérica, por exemplo, de uma equação diferencial.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES e a FAPESP.

Referências

- [1] Baker, G. L. & Gollub, J. P. *Chaotic Dynamics: An Introduction*, 2nd ed., Cambridge, 1996.
- [2] Calvo, O., Cartwright, J. H. E., Gonzalez, D. L., Piro O. & Rosso, O. A., “Three-Frequency Resonances in Dynamical Systems”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol 9, n. 11, 1999, 2181-2187.
- [3] Frid, H., “Os números irracionais”, Notas de aula, *IMPA*, 1998.
- [4] Jensen, M. H., Bak P. & Bohr T., “Transition to chaos by iteration of resonances in dissipative systems. I. Circle maps”, *Physical Review A*, vol.30, n.4, 1984, 1960-1969.