



Modelagem e Controle de Estruturas Flexíveis - Abordagem Ideal e Não Ideal: Caso Linear Ao DINCON 2004*

Cíntia Prado de Rezende[†]

EEI - Escola de Engenharia Industrial
Av. Barão do Rio Branco, 882
12242-800, São José dos Campos, SP
E-mail: Cintiasjc@aol.com

André Fenili *, **Luiz Carlos Gadelha de Souza**

INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Divisão de Mec. Espacial e Controle)
Av. dos Astronautas, 1758 - 12227-010 São José dos Campos, SP
e Prof. Visitante na UNITAU - Universidade de Taubaté (Depart. de Eng. Mec. e Mecatrônica)
Rua Daniel Danelli s/n (Campus da Juta) - CEP: 12060-440 Taubaté, SP – Brasil
E-mails: fenili@dem.inpe.br, gadelha@dem.inpe.br

José Manoel Balthazar

UNESP - Universidade Estadual Paulista
13500-230 Rio Claro, SP
E-mail: jmbaltha@rc.unesp.br

Resumo: *Este trabalho investiga a dinâmica em malha aberta e em malha fechada de um sistema composto por um atuador (motor dc) e uma estrutura flexível. Para a modelagem matemática da estrutura flexível considera-se curvatura linear. O formalismo Lagrangeano é utilizado para a obtenção das equações governantes do movimento. Duas diferentes abordagens são utilizadas: em uma delas o sistema atuador-estrutura é tratado como sistema ideal e na outra como sistema não ideal. Para cada uma dessas abordagens projeta-se uma malha de controle com o objetivo de amortecer a vibração da estrutura flexível. É utilizado um controlador clássico do tipo PD.*

Palavras-chave: estruturas flexíveis, sistema ideal, sistema não ideal, controle, modelagem, PD.

Introdução

Estruturas flexíveis em movimento de rastreamento (*slewing*) possuem vasta (e crescente) aplicação na indústria e no programa espacial em geral. Uma analogia para o movimento de rastreamento é o de uma porta se movendo em torno de suas dobradiças. A estrutura flexível descrita neste

trabalho é matematicamente modelada utilizando-se a hipótese de curvatura linear. Apesar desta consideração, o sistema completo possui um termo não linear que será inicialmente negligenciado por determinadas razões (baixas velocidades de rastreamento). Duas abordagens serão utilizadas neste trabalho tendo-se em vista a transferência de energia entre o atuador e a estrutura flexível: a abordagem de sistema ideal e a abordagem de sistema não ideal. Na abordagem não ideal, a dinâmica da estrutura pode influenciar o comportamento do atuador, o que não acontece na abordagem ideal, onde apenas o atuador influencia o comportamento da estrutura flexível. O atuador utilizado aqui é um motor de corrente contínua.

Uma vez que o modelo matemático tenha sido definido, este trabalho concentra-se no projeto de uma estratégia de controle para o amortecimento das vibrações da estrutura flexível, utilizando para tal um controlador PD (não colocado). Os ganhos são obtidos e o sistema satisfatoriamente controlado para ambas as abordagens propostas.

Algumas simulações numéricas ilustram os resultados de um caso investigado em malha aberta e em malha fechada.

*Realização SBMAC, apoio FAPESP, URL:
<http://www.ibilce.unesp.br/eventos/cnmac/home.htm>

[†]Bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq



Este estudo é um primeiro passo na investigação de estruturas flexíveis rápidas.

Equações Governantes do Movimento

A abordagem utilizada para a obtenção das equações governantes do movimento consiste na aplicação das equações de Lagrange. Esta formulação trabalha com a energia acumulada em um sistema dinâmico durante a sua evolução no tempo e é invariante com respeito ao sistema de coordenadas utilizado. Adota-se neste trabalho o modelo de viga de Euler-Bernoulli [1].

Seja uma estrutura flexível de rastreamento apresentando curvatura linear (ou seja, o suficiente para provocar apenas deslocamentos transversais dos pontos ao longo da estrutura) e conduzida por um torque aplicado ao eixo de rastreamento. Esta estrutura movimenta-se no plano, conforme mostra a Figura 1.

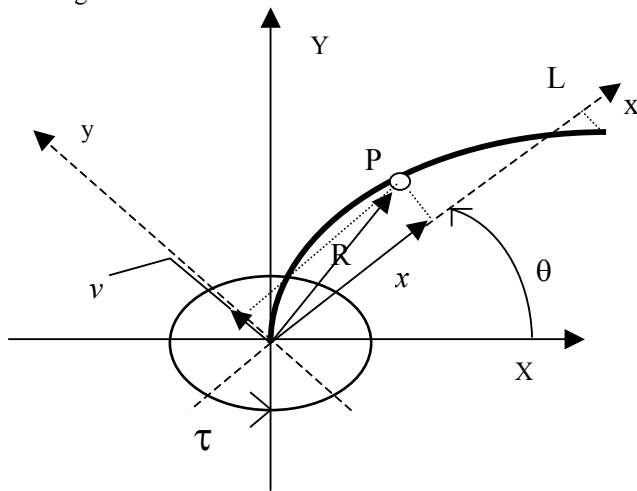


Figura 1 - Estrutura flexível de rastreamento (plano) – curvatura linear

Seja T a energia cinética e V a energia de deformação transversal acumuladas pela estrutura flexível de rastreamento durante uma evolução qualquer no tempo. Assim:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho |\dot{\mathbf{R}}|^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \rho [(\dot{v} + x\dot{\theta})^2 + (v\dot{\theta})^2] dx \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx \quad (2)$$

onde cada uma das quantidades que aparecem em (1) e (2) estão, de alguma forma, referenciadas na Figura 1. De acordo com (2), a curvatura da estrutura é representada por v'' .

Seja o lagrangiano, L, definido por:

$$L = T - V \quad (3)$$

Utilizando (1) e (2) em (3) obtém-se:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho \left[\dot{v}^2 + 2vx\dot{\theta} + (x\dot{\theta})^2 + (v\dot{\theta})^2 \right] - EI v''^2 \right\} dx \quad (4)$$

Expandindo $v(x,t)$ em (4) através do método dos modos assumidos [2] e [3] obtém-se:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho \left[\left(\sum_{i=1}^n \phi_i \dot{q}_i \right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n \phi_i \dot{q}_i \right) x\dot{\theta} + (x\dot{\theta})^2 + \left(\dot{\theta} \sum_{i=1}^n \phi_i \dot{q}_i \right)^2 \right] \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[-EI \left(\sum_{i=1}^n \phi_i'' q_i \right)^2 \right] dx \quad (5)$$

Seja a equação de Lagrange definida como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

Substituindo (5) em (6), onde $q_i = v$, resulta:

$$\int_0^L \left[\rho \left(\sum_{i=1}^n \phi_i^2 \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n \phi_i x \ddot{\theta} - \sum_{i=1}^n \phi_i^2 q_i \dot{\theta}^2 \right) + EI \sum_{i=1}^n \phi_i'' \phi_j'' q_i \right] dx = 0 \quad (7)$$

Fazendo [4]:

$$\phi_i'' \phi_j'' = \phi_i^{iv} \phi_j \quad (8)$$

$$\phi_i^{iv}(x) = \frac{w_i^2 \rho A}{EI} \phi_i(x) \quad (9)$$

e substituindo (8) e (9) em (7) obtém-se:

$$\int_0^L \left[\rho \left(\sum_{i=1}^n \phi_i^2 \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n \phi_i x \ddot{\theta} - \sum_{i=1}^n \phi_i^2 q_i \dot{\theta}^2 \right) + EI \sum_{i=1}^n \frac{\rho A \omega_i^2}{EI} \phi_i \phi_j q_i \right] dx = 0 \quad (10)$$



Utilizando a propriedade de ortogonalização dos modos, definida como $\int_0^L \phi_i \phi_j dx = 1$ se $i=j$ e $\int_0^L \phi_i \phi_j dx = 0$ se $i \neq j$, e integrando (10) de $x=0$ a $x=L$, obtém-se a equação governante do movimento discretizada dada por:

$$\ddot{q}_j + \alpha_j \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 q_j + \omega_j^2 q_j = 0 \quad (11)$$

onde: $\alpha_j = \int_0^L x \phi_j dx$.

Modelagem de um Motor de Corrente Contínua Ideal e Não Ideal

O balanço de tensão elétrica em um motor de corrente contínua controlado por armadura é dado, de acordo com a Lei de Kirchoff, por:

$$L_m \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \dot{\theta}_{motor} = U \quad (12)$$

onde U representa a tensão de armadura (tensão aplicada aos terminais do motor); R_a representa a resistência da armadura; i_a representa a corrente de armadura; L_m representa a indutância do motor; K_b representa a constante de força contra-eletromotriz e θ_{motor} representa a posição angular do motor.

A somatória dos torques em relação ao eixo do motor fornece a equação mecânica do motor de corrente contínua controlado por armadura, dada por:

$$\tau_m = K_t i_a - c_m \dot{\theta}_{motor} - I_{motor} \ddot{\theta}_{motor} \quad (13)$$

onde I_{motor} representa a inércia do motor; c_m representa o atrito interno ao motor; τ_m representa o torque aplicado à transmissão mecânica (caso haja) entre o atuador e a estrutura a ser movida ou

diretamente à estrutura a ser movida e K_t representa a constante de torque do motor.

O deslocamento angular do eixo do motor e o torque aplicado pelo mesmo eixo à transmissão mecânica entre o motor e a carga a ser movida relacionam-se ao deslocamento angular da estrutura sobre a qual o motor esta atuando e ao torque aplicado à mesma por:

$$\theta_{motor} = N_g \theta \quad (14)$$

$$\tau = N_g \tau_m \quad (15)$$

aonde τ representa o torque aplicado pelo motor de corrente contínua à estrutura a ser movida, θ representa o deslocamento angular desta estrutura e N_g representa a relação de transmissão entre o motor e a estrutura. Portanto, em relação aos parâmetros da estrutura a ser movida, as Equações (12) e (13) podem ser reescritas como:

$$L_m \dot{i}_a + R_a i_a + K_b N_g \dot{\theta} = U \quad (16)$$

$$I_{motor} N_g^2 \ddot{\theta} + c_m N_g^2 \dot{\theta} - N_g K_t i_a + \tau = 0 \quad (17)$$

A opção por uma abordagem de sistema dinâmico ideal ou por uma abordagem de sistema dinâmico não ideal [4] e [5] está vinculada à maneira pela qual o acoplamento atuador-estrutura for considerado. Na Equação (17), portanto, dependerá de considerações feitas em relação ao torque τ .

Seja o esquema representativo do eixo do motor e seu acoplamento a estrutura flexível de rastreamento sob análise conforme representado na Figura 2 [4].

Se o eixo em questão for suficientemente curto, poder-se-á considerá-lo rígido. Assim, o torque total, τ , atuando sobre a estrutura flexível pode ser escrito como:

$$\tau = -M + I_{eixo} \ddot{\theta} \quad (18)$$

onde o parâmetro M representa o momento de flexão da viga atuando sobre o eixo do motor.

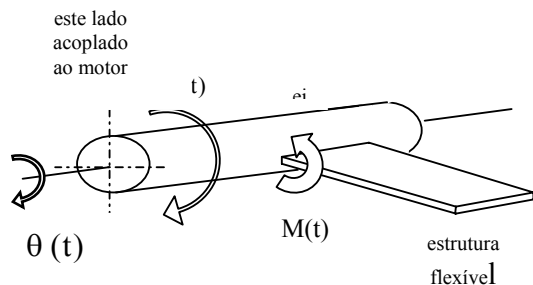


Figura 2 - Acoplamento atuador-estrutura flexível de rastreamento (Fenili, 2000)

Desta forma, a Equação (17) pode ser reescrita como:

$$(I_{\text{eixo}} + I_{\text{motor}} N_g^2) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a - M = 0 \quad (19)$$

O momento M pode ser representado, para o modelo de curvatura linear [1] e [6], como:

$$M = EI v'' \quad (20)$$

Utilizando novamente a expansão para v , pode-se reescrever (19) como:

$$(I_{\text{eixo}} + I_{\text{motor}} N_g^2) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a - EI \sum_{i=1}^n q_i(t) \phi_i''(0) = 0 \quad (21)$$

Sistema Ideal e Sistema Não Ideal

Adicionando a Equação (11) às equações do motor dadas por (16) e (21) e acrescentando o termo de amortecimento $\mu \dot{q}_\ell$ em (13), as equações governantes do movimento para a estrutura flexível de rastreamento considerando fonte de potência ideal ($\beta=0$) e considerando fonte de potência não ideal ($\beta=1$) tornam-se :

$$L_m \dot{i}_a + R_a i_a + K_b N_g \dot{\theta} = U \quad (22)$$

$$(I_{\text{eixo}} + I_{\text{motor}} N_g^2) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a - \beta \left(EI \sum_{i=1}^n q_j(t) \phi_j''(0) \right) = 0 \quad (23)$$

$$\ddot{q}_j + \mu \dot{q}_j + w_j^2 q_j + \alpha_j \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 q_j = 0 \quad (24)$$

mais as condições de contorno $\phi''(L,t)=0$, $\phi'''(L,t)=0$ e as condições iniciais $i_a(0) = 0$, $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$.

Neste trabalho será considerado apenas um modo na expansão para v .

Controle PD de uma Estrutura Flexível de Rastreamento (Linear)

Um método denominado imposição de pólos ou técnica de atribuição de pólos. Admite-se que todas as variáveis de estado sejam mensuráveis e estão disponíveis para realimentação. Uma nova localização dos pólos será proposta para o sistema em malha fechada e os ganhos necessários para que esta nova posição seja atingida serão determinados. Embora o sistema linear seja inicialmente estável, pretende-se fazer com que a vibração da viga se extinga o mais rápido possível (apresente um amortecimento maior).

Escrevendo as equações diferenciais ordinárias governantes do movimento (22 a 24) na forma de estado, considerando baixas velocidades de rastreamento (o termo não linear associado à rigidez centrípeta é negligenciado) e escrevendo o sistema resultante de equações na forma matricial, obtem-se:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (25)$$

onde:

$$x = \{x_1 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6\}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_m} & 0 & -\frac{K_b N_g}{L_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{N_g K_t}{I} & 0 & -\frac{c_m N_g^2}{I} & \frac{\beta EI \phi_1''(0)}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_1 N_g K_t}{I} & 0 & \frac{\alpha_1 c_m N_g^2}{I} & -\frac{\alpha_1 \beta EI \phi_1''(0)}{I} & -w_1^2 - \mu \end{bmatrix}$$

$$I = I_{\text{eixo}} + I_{\text{motor}} N_g^2$$

$$B = \left\{ \frac{1}{L_m} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}^T$$



Anais do 3º Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC

31-maio a 3-junho-2004
UNESP – Campus de Ilha Solteira

Seja o esquema de controle de retroação de estado [7] dado por:

$$u = -K_1 x \quad (26)$$

onde K_1 é a matriz dos ganhos a ser determinada, x é o vetor de estado e $u=U$. Este tipo de estratégia de controle é denominado controle proporcional derivativo.

O teste de controlabilidade:

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & A^4B \end{bmatrix} \quad (27)$$

garante que o sistema é a estados completamente controláveis.

A equação característica do sistema em malha aberta é dada por:

$$|sI-A| = s^5 + a_1s^4 + a_2s^3 + a_3s^2 + a_4s + a_5 = 0 \quad (28)$$

A localização dos pólos desejados em malha fechada foi determinada modificando (aumentando) a parte real de um par conjugado (encontrado para o caso em estudo e de acordo com os valores apresentados na Tabela 1), mantendo os demais pólos idênticos àqueles obtidos em malha aberta. A equação característica em malha fechada é dada por:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)(s - \mu_5) = s^5 + \alpha_1s^4 + \alpha_2s^3 + \alpha_3s^2 + \alpha_4s + \alpha_5 \quad (29)$$

Os pólos desejados são dados por: $\mu_1 = 0.0000$, $\mu_2 = -0.5000 + 3.7322i$, $\mu_3 = -0.5000 - 3.7322i$, $\mu_4 = -60.897$ e $\mu_5 = -603.1560$.

A determinação da matriz de ganho de retroação de estado, K , será dada por:

$$K = [\alpha_5 - a_5 \mid \alpha_4 - a_4 \mid \alpha_3 - a_3 \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1] T^{-1} \quad (30)$$

onde a matriz T é dada por:

$$T = MW \quad (31)$$

a matriz M é dada pela Equação (27) e a matriz W é dada por:

$$W = \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Assim, a matriz de ganho de retroação (novamente utilizando os dados da tabela 1) é dada por:

$$K = [-0.00303 \quad 0 \quad 0.003961 \quad -0.244 \quad 0.0004073] \quad (33)$$

Por conseguinte, o sinal de controle u (a ser substituído em (25)) é dado por:

$$u = 0.00303x_1 - 0.003961x_3 + 0.244x_4 - 0.0004073x_5 \quad (34)$$

Simulações Numéricas

Os parâmetros do sistema são apresentados na Tabela 1.

Motor DC			Viga (seção reta 0.0150m x 0.0005m)		
C_m	0.0046290	$\frac{Nms}{rad}$	L	1.2000	m
K_t	0.0528140	$\frac{Nm}{A}$	μ	0.100	$\frac{kg}{ms}$
K_b	0.0528140	$\frac{Vs}{rad}$	E	$0.7000 \cdot 10^{11}$	$\frac{N}{m^2}$
L_m	0.003100	H	I	$1.5625 \cdot 10^{-13}$	m^4
R_a	1.9149520	Ω	ρ	2700.0000	$\frac{kg}{m^3}$
I_{motor}	0.0000654	$\frac{kg}{m^2}$	w_1	11.3097	rad/s
			$\phi_1^*(0)$	4.8984	
			$\alpha_1 = \int_0^1 x \phi_1 dx$	0.8210	

Tabela 1 – Parâmetros do sistema



Anais do 3º Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC

31-maio a 3-junho-2004
UNESP – Campus de Ilha Solteira

As simulações numéricas foram realizadas utilizando-se os parâmetros da Tabela 1. O controle é acionado assim que a estrutura flexível atingir o seu destino (uma posição angular desejada). As Figuras (4) a (9) e (11) a (16) ilustram o deslocamento angular, velocidade angular e a deflexão da viga, comparando os sistemas com e sem controle para diferentes velocidades angulares (diferentes tensões aplicadas ao motor, conforme figuras (3) e (10)) para o sistema ideal e para o sistema não ideal.

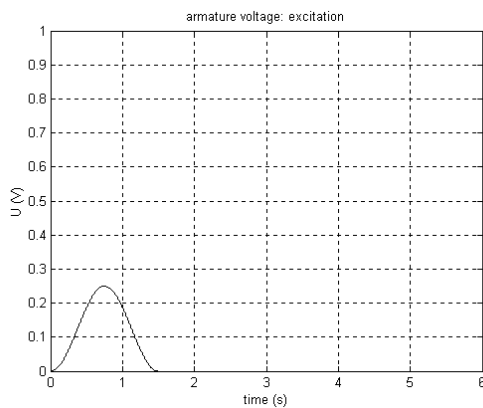


Figura 3 – Tensão de excitação $U=0.25V$

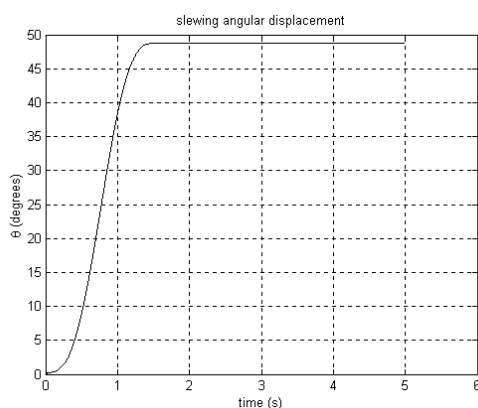


Figura 4 – Sistema Ideal/Deslocamento angular para $U=0.25V$

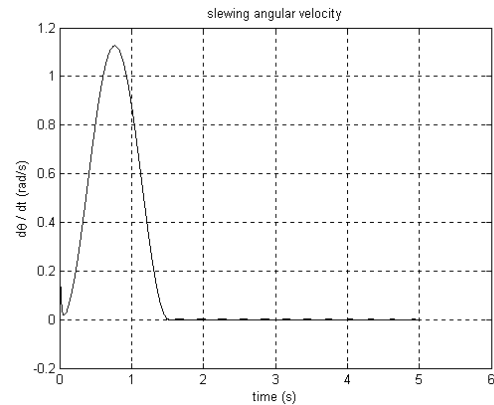


Figura 5 – Sistema Ideal/Velocidade angular para $U=0.25V$

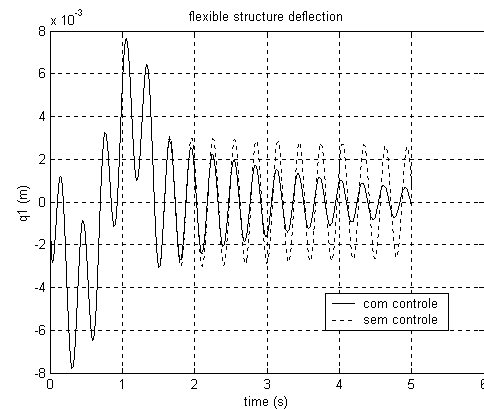


Figura 6 – Sistema Ideal/Deflexão da viga para $U=0.25V$

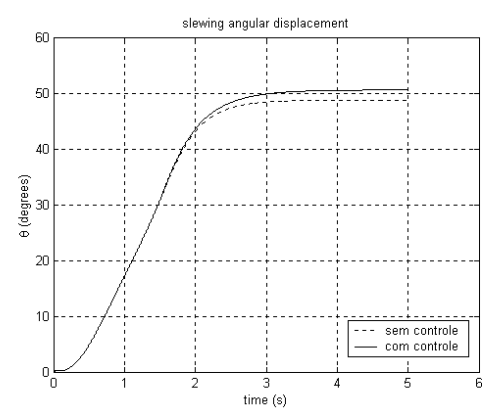


Figura 7– Sistema Não Ideal/Deslocamento angular $p/ U=0.25V$



Anais do 3º Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC

31-maio a 3-junho-2004
UNESP – Campus de Ilha Solteira

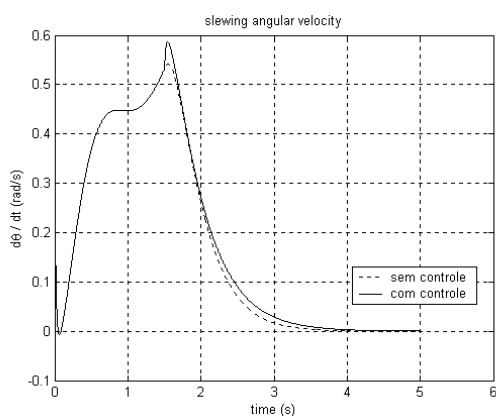


Figura 8 – Sistema Não Ideal/Velocidade angular para U=0.25V

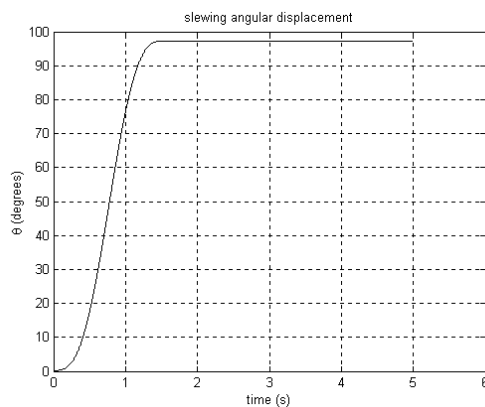


Figura 11 – Sistema Ideal/Deslocamento angular para U=0.5V

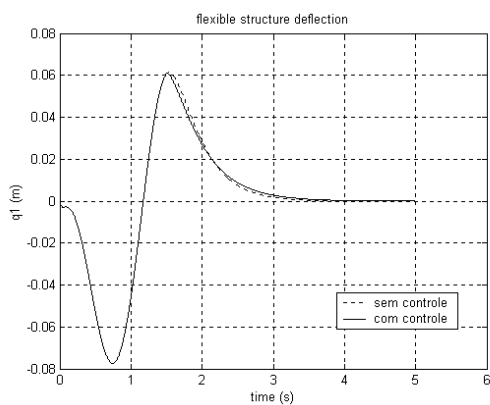


Figura 9 – Sistema Não Ideal/Deflexão da viga para U=0.25V

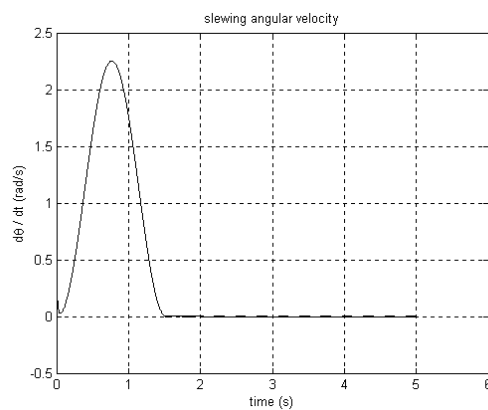


Figura 12 – Sistema Ideal/Velocidade angular para U=0.5V

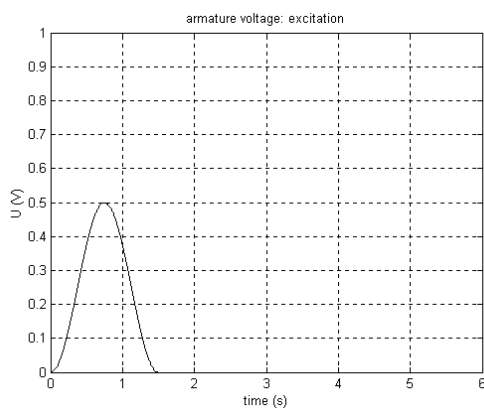


Figura 10 – Tensão de excitação U=0.5V

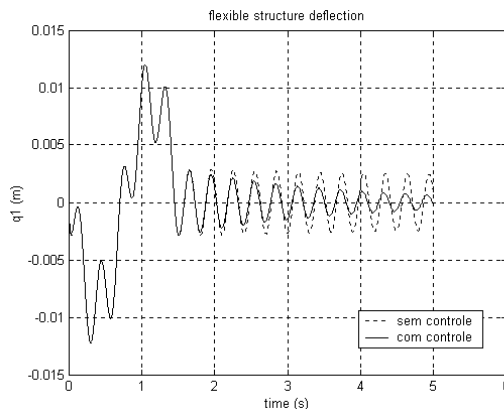


Figura 13 – Sistema Ideal/Deflexão da viga para U=0.5V

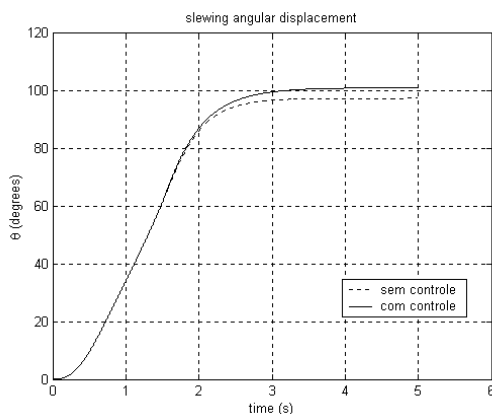


Figura 14 – Sistema Não Ideal/Deslocamento angular $p/U=0.5V$

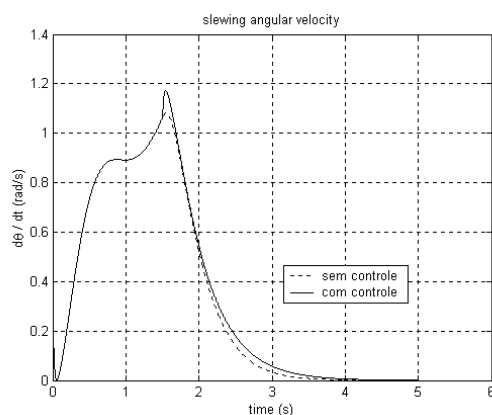


Figura 15 – Sistema Não Ideal/Velocidade angular para $U=0.5V$

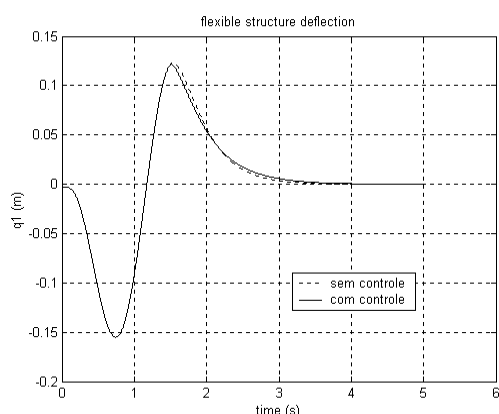


Figura 16– Sistema Não Ideal/Deflexão da viga para $U=0.5V$

De acordo com as Figuras (5), (8), (12) e (15), para a mesma excitação, as velocidades angulares alcançadas pelo sistema não ideal são sempre menores que aquelas atingidas pelo sistema

ideal. Devido à troca de energia entre o atuador e a estrutura, o sistema não ideal é naturalmente muito mais amortecido que o equivalente ideal.

Os mesmos ganhos foram utilizados para o sistema ideal e para o sistema não ideal. Para o caso não ideal, a ação do controlador utilizado (e para o ganho escolhido) mostra-se imperceptível.

Conclusões

A estratégia de controle PD proposta para a estrutura flexível de rastreamento linear mostrou-se eficaz, fazendo com que a vibração da estrutura amortecia mais rapidamente assim que a posição angular do eixo do motor tenha atingido a posição desejada (esse efeito é mais perceptível para o caso ideal; veja, por exemplo, a figura 13). Nesse instante, a tensão elétrica no motor passa a atuar como um sinal de controle.

É interessante observar também a maneira como a interação atuador-estrutura para o sistema não ideal naturalmente amortecia a vibração da estrutura flexível, aparentemente eliminando a necessidade de um controlador. Novas possibilidades de ganho para o controlador PD serão futuramente investigadas para esse tipo de sistema.

Uma estratégia para ganho ótimo, independente do tipo de abordagem utilizada (ideal ou não ideal) para este tipo de controlador também deverá ser futuramente investigada, assim como a inclusão de não linearidades (a fim de que possa ser determinado o limite desta estratégia de controle para este problema).

Referências

- [1] Popov, E. P., "Introdução à mecânica dos sólidos", Editora Edgar Blücher Ltda, 1978.
- [2] Meirovitch, L., "Analytical methods in vibrations", Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1967.
- [3] Thompson, W.T., "Theory of vibration with applications", Prentice Hall, New Jersey, 1988.



Anais do 3º Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC

31-maio a 3-junho-2004
UNESP – Campus de Ilha Solteira

-
- [4] Fenili, A., "Modelagem matemática e análise dos comportamentos ideal e não ideal de estruturas flexíveis de rastreamento", Tese de Doutorado financiada pela Fapesp e defendida em dezembro de 2000 pela Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
 - [5] Kononenko, V. O., "Vibrating systems with a limited power supply", Iliffe Books Ltd., 1969.
 - [6] Craig, Jr., R. R., "Structural dynamics - An introduction to computer methods", John Wiley and Sons, 1981.
 - [7] Ogata, K., "Engenharia de Controle Moderno", Editora Prentice-Hall do Brasil Ltd, 1993.